

ИСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ.

ИСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ.

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ РАЗВИТІЯ ГЕОМЕТРІИ.

Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владиміра

М. Е. Ващенко-Захарченко.

ТОМЪ ПЕРВЫЙ.



КІЕВЪ.

Въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра

1883.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра.

Ректоръ *И. Рахманиновъ.*

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ ПЕРВОМУ ТОМУ.

De toutes les Sciences, les Mathématiques sont celles dont les pas dans la recherche de la vérité ont été les plus assurés et les mieux soutenus. On les a vues, il est vrai, souvent marcher avec lenteur: elles ont été quelquefois, et même des siècles entiers, s t a t i o n n a i r e s, je veux dire, comme arrêtées dans leur marche, et ne faisant aucun progrès sensible; mais on les a vues moins que toute autre, r é t r o g r a d e s, c'est-à-dire, prenant l'erreur pour la vérité; car dans la marche de l'esprit humain, une erreur est un pas en arrière.

M o n t u c l a, Histoire des Mathématiques. T. I Préface, pag. XXV.

Предлагаемое сочиненіе есть первый томъ предпринятаго нами обширнаго труда, предметъ котораго Исторія Математики. Сочиненіе мы начали съ очерка развитія Геометріи, какъ отрасли болѣе древней и которой наиболѣе занимались древніе, развившіе ее до той высокой степени совершенства, въ которой она находиться въ настоящее время. Въ этомъ отношеніи первое мѣсто принадлежитъ древнимъ греческимъ философамъ, а потому съ развитія Геометріи у грековъ мы и начинаемъ очеркъ развитія этой науки. Показавъ развитіе Геометріи въ различныхъ философскихъ школахъ древнихъ грековъ и прослѣдивъ состояніе ея во время господства римлянъ, а затѣмъ вообще на Западѣ до эпохи возрожденія наукъ, т. е. до XV вѣка, мы переходимъ къ краткому очерку развитія Алгебры. Прослѣдивъ состояніе Геометріи у грековъ, указавъ на различныя методы, предложенныя ихъ геометрами и изложивъ содержаніе различныхъ математическихъ сочиненій, написанными болѣе выдающимися учеными, мы переходимъ къ обозрѣнію состоянія математическихъ наукъ у различныхъ народовъ. Вопросу этому мы отдѣлили нѣсколько отдѣльныхъ главъ, посвященныхъ, каждая, извѣстной народности.

Мы начали съ древнѣйшихъ обитателей Востока—халдеевъ, математическія познанія которыхъ обратили на себя вниманіе ученыхъ послѣдняго времени. Познакомившись съ отрывками математическихъ сочиненій, написанныхъ клиновидными письменами, мы переходимъ къ обозрѣнію математическихъ познаній древнихъ египтянъ и излагаемъ содержаніе дошедшихъ

до насъ письменныхъ памятниковъ, именно: папируса Ринда и іероглифическихъ надписей на стѣнахъ храма Гора въ Эдфу. Далѣе слѣдуютъ китайцы, индусы и арабы. Послѣднимъ мы посвятили едва-ли не треть перваго тома, въ виду того, что вопросъ о состояніи математическихъ наукъ у арабовъ казался намъ заслуживающимъ особеннаго вниманія, такъ какъ они оказали громадное вліяніе на развитіе математическихъ наукъ на Западѣ. На арабахъ и заканчивается первый томъ.

Во второмъ томѣ мы изложимъ развитіе Геометріи и Алгебры на Западѣ до XVII вѣка, при чемъ подробно изложимъ исторію различныхъ попытокъ рѣшенія уравненій третьей и четвертой степеней; возникновеніе Аналитической Геометріи и различныхъ геометрическихъ методовъ вообще.

Въ третьемъ томѣ будетъ изложена исторія дифференціальнаго исчисленія и различныхъ другихъ методовъ.

Всему сочиненію мы предполагаемъ предпослать введеніе, въ которомъ сдѣлаемъ общій обзоръ состоянія математическихъ наукъ вообще, коснемся вопроса о различныхъ системахъ счисленія и нумераціи у различныхъ народовъ. Въ концѣ сочиненія будетъ приложенъ подробный алфавитный указатель и списокъ источниковъ, которыми мы пользовались при составленіи своего труда.

Мы далеки отъ мысли, что предпринятая нами задача лишена промаховъ: многое недосказано, многое осталось намъ неизвѣстнымъ. Всякія поправки и указанія мы примемъ съ благодарностью. Читатель, знакомый нѣсколько съ вопросами, относящимися къ Исторіи Математики, знаетъ какія трудности представляетъ этотъ предметъ, такъ какъ огромное большинство фактовъ разсѣяно въ различныхъ мемуарахъ, напечатанныхъ въ различныхъ періодическихъ изданіяхъ, часто трудно доступныхъ. Намъ приходилось, иногда, ждать годъ и больше выписанное сочиненіе, такъ какъ оно составляло библіографическую рѣдкость. Съ многимъ мы знакомились тогда, когда относящееся къ извѣстному вопросу было напечатано, вслѣдствіе этого многое напечатано не въ своемъ мѣстѣ. Всѣ болѣе извѣстныя сочиненія, относящіяся къ Исторіи Математики мы имѣли подъ руками и извлекли изъ нихъ все то, что казалось для насъ болѣе интереснымъ. Постоянныхъ ссылокъ на то или другое сочиненіе мы считали лишнимъ дѣлать, такъ какъ этимъ увеличился бы объемъ книги.

Въ заключеніе считаемъ долгомъ принесть искреннюю благодарность просвѣщенному вниманію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра, предоставившему средства для напечатанія настоящаго труда.

М. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ.
Въ Октябрѣ 1882 г.

Оглавленіе перваго тома.

Историческій очеркъ развитія Геометріи.

Вступленіе.

Намъ кажется съ перваго раза легко и естественно построить геометрическую систему: положить основанія, связать между собою всѣ истины, вытекающія изъ этихъ основаній, и распредѣлить ихъ въ наилучшемъ порядкѣ, но, вдумываясь глубже, невольно сознаешь, какъ было трудно сложить все это въ стройную систему, и прошли тысячелѣтія прежде чѣмъ человѣкъ уяснилъ себѣ значеніе первыхъ началъ протяженія и мало-помалу, такъ сказать по каплѣ, извлекалъ изъ нихъ все болѣе и болѣе сложныя свойства протяженія; поэтому было-бы въ высшей степени интересно прослѣдить развитіе Геометріи съ самаго ея зародыша. Интересно въ двухъ отношеніяхъ: съ точки зрѣнія развитія самой Геометріи и развитія логическаго мышленія, т. е. развитія тѣхъ пріемовъ, съ помощью которыхъ человѣкъ убѣждаетъ себя и другихъ, что это такъ, а не иначе. Но для такого изслѣдованія необходимъ обширный письменный матеріалъ, а до насъ дошли лишь скудные отрывки.

Всѣ согласны въ томъ, что колыбель цивилизаціи находится на Востокѣ, но никто до сихъ поръ не могъ поднять завѣсу, которая ее окружаетъ и весьма вѣроятно, что первые шаги по пути прогресса навсегда останутся покрыты мракомъ неизвѣстности. Было высказано много различныхъ предположеній о томъ, гдѣ именно началось первоначальное развитіе математическихъ наукъ; одни указывали на Египетъ, другіе на древнюю Халдею, Китай и Индію, наконецъ нѣкоторые ученые, какъ напр. Дюпью и Бальи, высказали мнѣніе, что первоначальное развитіе математическія науки, и всѣ науки вообще, получили свое начало у народа, который совершенно исчезъ и который достигъ высокой степени развитія. Остатки этой древней—первоначальной цивилизаціи перешли въ Египетъ, откуда снова началось развитіе наукъ, такъ неожиданно прерванное. Къ сожалѣнію подобныя гипотезы ни на чемъ положительномъ не основаны, такъ какъ до-

площади такихъ четыреугольниковъ они находили взявъ произведенiе полусуммы двухъ противоположныхъ сторонъ. Формула эта вѣроятно была выведена съ начала для прямоугольниковъ, къ которымъ она вполнѣ приложима, впослѣдствiи они распространили ее и на другiе виды четыреугольниковъ, хотя необходимо замѣтить, что египетскiе геометры тщательно избѣгали четыреугольниковъ, въ которыхъ противоположныя стороны сильно разнятся между собой. Выраженiе это они подвели и для нахожденiя площади треугольника принявъ, что четвертая сторона его равна нулю. Приведенное обобщенiе есть одинъ изъ древнѣйшихъ примѣровъ, изъ которыхъ видно, какъ подъ одно правило стремились подвесть наиболѣе возможное число различныхъ частныхъ случаевъ. Проведенiе полуденной линiи было также извѣстно древнимъ этрусскамъ, которые линiю эту считали основной при закладкѣ городовъ, колоний и т. д. Въ городахъ всѣ улицы должны были быть параллельны между собой и должны были дѣлить городъ на прямоугольные участки. Точно опредѣленныя и проведенныя границы считались священными, изъ чего можно заключить какое онѣ имѣли важное значенiе.

Прослѣдить развитiе Геометрiи у различныхъ народовъ древняго мiра въ настоящее время невозможно за недостаткомъ указаний по этому предмету. Самые древнiе изъ дошедшихъ до насъ памятниковъ математическаго развитiя древнихъ принадлежатъ халдеямъ и египтянамъ. Объ развитiи и состоянiи Геометрiи у халдеевъ мы почти ничего не знаемъ, такъ какъ до насъ дошелъ только отрывокъ сочиненiя, въ которомъ видны слѣды геометрическихъ познаний древнѣйшихъ обитателей Востока. Отрывокъ этотъ былъ изданъ Сэйсомъ, который полагаетъ, что геометрическiя фигуры у древнихъ халдеевъ имѣли значенiе гадательныхъ знаковъ *). О познанiяхъ египтянъ въ Геометрiи мы можемъ судить по двумъ сохранившимся памятникамъ, именно: папирусъ Ринда и iероглифическiя надписи на стѣнахъ храма Гора въ Эдфу. Первый изъ упомянутыхъ памятниковъ папирусъ Ринда написанъ, полагаютъ, за 3000 лѣтъ до Р. Х. **) Надписи въ Эдфу относятся къ болѣе позднему времени, онѣ написаны въ XI столѣтiи до Р. Х. ***). Изъ содержанiя этихъ двухъ памятниковъ можно видѣть въ

*) Отрывокъ геометрическаго содержанiя, написанный клиновидными письменами изданъ подъ заглавiемъ: *A. H. Sayce*, Babylonian Augury by means of geometrical figures Напечатано въ Transactions of the Society of Biblical Archaeology. Vol. IV, Part. 2, London, 1876, in-8, pag. 302—314.

**) Папирусъ Ринда изданъ подъ заглавiемъ: *Aug. Eisenlohr* Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum) uebersetzt und erklärt, *Erster Band*—Commentar *Zweiter Band*—Tafeln; Leipzig, 1877. in-4, in-fol.

***) Надписи на стѣнахъ храма въ Едфу были объяснены Лепсiусомъ въ статьѣ: *Lepsius,* Ueber eine Hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu ect. Напечатано въ Abhand. der Königl. Akad. der Wissen. zu Berlin; aus dem Jahre 1855.

чемъ состояли познанія въ Геометріи древнихъ египтянъ. Геометрія является собраніемъ практическихъ правилъ для рѣшенія различныхъ вопросовъ, встрѣчающихся въ обыденной жизни. О геометрической системѣ нѣтъ и помину.

Какъ постепенно могла сложиться Геометрія въ науку чисто умозрительную, какимъ образомъ изъ собранія правилъ, полученныхъ путемъ наблюденія и долголѣтняго опыта, могла возникнуть наука, въ которой все основано на нѣсколькихъ очевидныхъ истинахъ, впослѣдствіи названныхъ аксіомами, намъ совершенно неизвѣстно. Въ послѣднее время англійскій ученый Алманъ, высказалъ мнѣніе, что первоначальная Геометрія была основана на *наглядномъ представлении*, что всѣ правила получены были опытомъ, съ начала для отдѣльныхъ частныхъ случаевъ, а потомъ съ постепеннымъ усовершенствованіемъ практическихъ пріемовъ, правила эти обобщались. Такимъ образомъ возникли самыя элементарныя теоремы Геометріи. О доказательствѣ предложеній не могло быть и рѣчи, такъ какъ все выводилось изъ чертежа и все было основано на наглядномъ представленіи. Подобный методъ можетъ показаться намъ съ перваго разу страннымъ, но необходимо принять во вниманіе, что такой методъ дѣйствительно существовалъ у индусовъ. До насъ дошло нѣсколько математическихъ сочиненій индусовъ, написанныя въ VI, VII и XI вѣкахъ по Р. Х., въ которыхъ пріемъ нагляднаго представленія примѣняется не прибѣгая къ какимъ либо доказательствамъ предложеній. О справедливости геометрическаго предложенія индусскіе математики заключали прямо изъ чертежа; если чертежъ удовлетворялъ условіямъ вопроса, то дальнѣйшія толкованія считались излишними и вмѣсто всякихъ доказательствъ около чертежа писали слово „смотри“.

Намъ изучавшимъ Геометрію по методу изложенія грековъ, пріученнымъ къ строго-логической послѣдовательности, привыкшимъ относиться съ глубокимъ уваженіемъ къ классической литературѣ древнихъ грековъ, кажется, что эта форма изложенія есть единственно возможная и научная, и мы не замѣчаемъ, какъ не только вся наша нынѣшняя ариѳметика и алгебра, но и вся наша новѣйшая математика по формѣ и по своему духу разнятся отъ формы и духа Геометріи древнихъ грековъ. Значеніе метода нагляднаго представленія особенно ясно выразилось въ послѣднее время, когда германскій философъ Шопенгауеръ, наиболѣе склонный къ метафизики древнихъ индусовъ, одинъ изъ первыхъ возсталъ противъ метода евклидовскаго, и не зная метода индусовъ, предложилъ методъ, согласный съ послѣднимъ и основанный на развитіи нагляднаго представленія.

Немногіе уцѣлевшіе памятники математической литературы древнихъ, указываютъ, что вездѣ Геометрія была собраніемъ правилъ, пригодныхъ въ практической жизни и имѣющихъ чисто эмпирическій характеръ. Геометри-

ческія правила древніе прилагали при измѣреніи земель, а также къ астрономическимъ наблюденіямъ. Развитіе Геометріи шло рука объ руку съ развитіемъ Астрономіи, зачатки которой существовали въ древнѣйшемъ періодѣ существованія человѣчества. Хотя первоначальная астрономія имѣла характеръ астрологическій, но тѣмъ не менѣе она оказала большое вліяніе на развитіе Геометріи, какъ науки. Астрономія оказала также вліяніе и на другія науки и нѣкоторые ученые даже высказали мнѣніе, что астрономическими фактами можно объяснить происхожденіе всѣхъ миѳологій. Послѣднее мнѣніе особенно поддерживалъ Дюпью *).

Начало Геометріи обыкновенно полагаютъ въ Египтѣ; мнѣніе это основано на словахъ древнихъ греческихъ писателей: Геродота, Діодора Сицилійскаго и другихъ, но едва-ли это предположеніе справедливо. Есть основанія предполагать, что развитіе наукъ въ Египтѣ началось только послѣ нашествія гиксовъ, народа семитическаго племени, пришедшаго съ Востока. Отъ египетскихъ ученыхъ Геометрія перешла къ грекамъ. Многаго почерпнуть греки у египтянъ не могли, такъ какъ научнаго развитія Геометрія въ Египтѣ не достигла. Въ настоящее время съ достовѣрностью можно сказать, что египетскіе геометры не имѣли понятія объ аксіомахъ и у нихъ геометрическія предложенія не имѣли характеръ истинъ, вытекающихъ рядомъ логическихъ разсужденій изъ простѣйшихъ. Также не достигли египетскіе математики обобщенія частныхъ случаевъ и сведеніе ихъ подъ одно общее правило. Подобное направленіе и характеръ получила Геометрія впервые только у греческихъ математиковъ. Въ средѣ философскихъ школъ древней Греціи Геометрія быстро подвинулась впередъ и изъ науки чисто практической, изъ собранія эмпирическихъ правилъ, лишенныхъ всякой системы и связи, она сдѣлалась наукой теоретической, въ полномъ значеніи слова. У греческихъ геометровъ мы впервые встрѣчаемъ аксіомы, общія понятія; имъ же мы обязаны доказательствами и діоризмами, т. е. введеніемъ различныхъ условій въ задачи. Основательное и всестороннее изученіе сохранившихся памятниковъ математической литературы древнихъ доказало, что своимъ развитіемъ Геометрія вполнѣ обязана древнимъ греческимъ философамъ. И дѣйствительно, какой изъ народовъ древняго міра можетъ привесть имена, подобныя именамъ Гиппарха и Птоломея, Евклида и Аполлонія, Архимеда и Діофанта? Подобные геніи свойственны только эллинской расѣ.

Историческій очеркъ развитія Геометріи мы начнемъ съ грековъ, такъ какъ у нихъ она впервые приняла характеръ науки и сохранила до настоящаго времени тотъ духъ, который она получила въ твореніяхъ древ-

*) *Dupuis*, Origines de tous les cultes, ou religion universelle. Paris, An III, (1795), 2 vol. in-4, avec atlas.

нихъ греческихъ философовъ. Познакомившись съ развитіемъ Геометріи въ различныхъ школахъ древней Греціи, прослѣдивъ состояніе ея во время процвѣтанія наукъ въ александрійской школѣ и времена упадка наукъ послѣ завоеванія Египта римлянами, мы перейдемъ къ обозрѣнію состоянія Геометріи у римлянъ и вообще на Западѣ до эпохи возрожденія наукъ *). Послѣ этого мы сдѣлаемъ краткое обозрѣніе состоянія математическихъ наукъ у халдеевъ, египтянъ, китайцевъ, индусовъ и арабовъ. На арабахъ мы остановимся подробнѣе, такъ какъ они имѣли особенное вліяніе на развитіе наукъ на Западѣ. Состоянія Геометріи у евреевъ и древнихъ этрусковъ мы не коснемся, такъ какъ объ этомъ извѣстно весьма мало. Безъ сомнѣнія народы эти имѣли понятіе объ основныхъ геометрическихъ истинахъ, такъ какъ безъ нихъ невозможно ни одно сооруженіе. Древнѣйшія познанія евреевъ въ Геометріи нѣкоторые ученые находятъ въ Талмудѣ **). Спеціальныхъ математическихъ сочиненій у евреевъ несуществовало, а сохранившіяся еврейскія геометрическія сочиненія принадлежатъ сравнительно болѣе позднему времени, такъ какъ онѣ написаны послѣ VIII вѣка по Р. Х.

О геометрическихъ познаніяхъ китайцевъ также извѣстно весьма мало. Древнѣйшій изъ сохранившихся памятниковъ Геометріи китайцевъ относится, по словамъ самихъ китайцевъ, къ 2637 г. до Р. Х. Сочиненіе это озаглавлено: „Девять отдѣловъ Ариѳметики“. Изъ содержанія его видно, что Геометрія древнихъ китайцевъ состояла изъ собранія эмпирическихъ правилъ. Другое геометрическое сочиненіе китайцевъ, было озаглавлено: „Тшіу-Пи“, его относятъ къ XII в. до Р. Х. Нѣкоторыми учеными было высказано мнѣніе, что въ глубокой древности китайцы достигли высокой

*) Состояніе математическихъ наукъ у различныхъ народовъ до XLI вѣка представлено, въ общихъ чертахъ, въ сочиненіи: *M. Cantor*, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle, 1863, in-8. Первоначальное состояніе и развитіе всѣхъ естественныхъ наукъ вообще прекрасно изложено въ интересной статьѣ *П. Л. Лавровъ*, Очеркъ исторіи физико-математическихъ наукъ. Составлено по лекціямъ, читаннымъ въ лабораторіи Артиллерійской Академіи П. Л. Лавровымъ. Спб. 1865, in-8.

**) Вопросъ о познаніяхъ древнихъ евреевъ въ математическихъ наукахъ занималъ многихъ ученыхъ. На слѣды такихъ познаній указано въ сочиненіи: *B. Zuckermann*, Das Mathematische im Talmud. Breslau 1878, in-8. На геометрическое сочиненіе, написанное на еврейскомъ языкѣ обратилъ вниманіе Штейншнейдеръ; оно было недавно издано и переведено Шапирой подъ заглавіемъ: משנת המדות Mischnath Ha-Mmiddoth (Lehre von den Maassen) aus einem Manuscripte der Münchener Bibliothek, bezeichnet Cod. Heb. 36, als erste geometrische Schrift in hebräischer Sprache herausgegeben und mit einigen Bemerkungen versehen von Dr. M. Steinschneider (Berlin 1864), ins Deutsche übersetzt, erläutert und mit einem Vorwort versehen von *Hermann Schapira*. Напечатано въ Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Drittes Heft. Leipzig, 1880, in-8. См. pag. 1—56. Необходимо замѣтить, что сочиненіе это принадлежитъ сравнительно болѣе позднему времени, такъ какъ оно написано между 740—1200 гг. Сочиненіе это могло быть написано подъ вліяніемъ арабовъ.

степени развитія. Подобное мнѣніе высказалъ Шлегель *), указывая на астрономическія наблюденія китайцевъ, производившихся за много тысячелѣтій до Р. Х. Другіе ученые противнаго мнѣнія, по ихъ словамъ наука китайцевъ не такъ многолѣтня, какъ полагаютъ, многое они заимствовали у другихъ народовъ **), астрономическія методы они заимствовали отчасти у арабовъ и болѣе близкое знакомство съ математическими науками они получили благодаря вліянію европейцевъ ***).

Весьма жаль, что нѣтъ никакихъ указаній объ развитіи математическихъ познаній древнихъ обитателей Новаго Свѣта. Все извѣстное по этому вопросу ограничивается ничтожными свѣдѣніями объ системахъ счисленія, бывшихъ въ употребленіи въ Мексикѣ, Перу и у нѣкоторыхъ индѣйскихъ племенъ Сѣверной Америки. Нѣкоторыя познанія въ Геометріи необходимо должны были существовать, такъ какъ безъ нихъ невозможно бы было производство сооруженій, устройство плотинъ, каналовъ и т. п. Знакомство съ познаніями ацтековъ и другихъ народовъ Америки въ Геометріи могло бы указать на первобытное состояніе этой науки въ Старомъ Свѣтѣ если только справедливо предположеніе нѣкоторыхъ ученыхъ, высказавшихъ мнѣніе, что первоначальное культурное развитіе Новаго Свѣта получило свое начало въ Старомъ ****). Къ сожалѣнію вопросъ этотъ совершенно неразработанъ.

*) *Gus. Schlegel*, Uranographie chinoise. T. I—II, avec Atlas. Leyde, 1875, gr. in-8.

**) Сношенія Запада съ Китаемъ существовали уже въ I-мъ вѣкѣ нашей эры, когда китайскіе чиновники посѣтили страны подвластныя римлянамъ; въ 164 г. римскій императоръ Маркъ Аврелій посылалъ посольство въ Китай. Съ науками грековъ, вѣроятно китайцы познакомились при посредствѣ несторіанъ, когда они проникли въ Китай въ VII в. Однимъ изъ самыхъ дѣятельныхъ несторіанъ былъ извѣстный Олопенъ, основатель первыхъ христіанскихъ храмовъ въ Китаѣ.

***) Объ астрономическихъ познаніяхъ китайцевъ, на русскомъ языкѣ есть интересная статья *К. Скачкова*, Судьба астрономіи въ Китаѣ. См. Журналъ Министер. Народ. Просвѣщ. Часть CLXXIII Спб., 1874, стр. 1—81.

****) Подтвержденіе этого Фаульманъ видитъ въ томъ, что способъ передавать свои мысли при посредствѣ клубковъ шерсти, состоящихъ изъ нитокъ различной толщины и цвѣта, бывшій въ употребленіи у древнихъ перуанцевъ и существовавшій еще во время прихода испанцевъ, совершенно неизвѣстенъ въ Старомъ Свѣтѣ, хотя есть основанія предполагать, что такое своеобразное письмо, если только такъ можно выразиться, существовало. У индѣйцевъ Сѣверной Америки существовалъ обычай передавать свои мысли при посредствѣ маленькихъ раковинъ, нанизанныхъ на нитки. Подобныя связки находятъ въ настоящее время въ Бретани, во Франціи, и есть основанія думать, что онѣ имѣли тоже самое значеніе, какъ и у индѣйцевъ. (См. *Faulmann*, Illustrirte Geschichte der Schrift, Wien, 1880, in-8).

Греки.

Первоначальное развитіе Геометрія, какъ наука, получила у грековъ. Все извѣстное объ геометрическихъ познаніяхъ различныхъ народовъ древняго міра указываетъ, что Геометрія не была ими возведена въ стройную научную систему, только послѣдовательный умъ грековъ, какъ увидимъ ниже, далъ ей ту строго-логическую форму, въ которой она дошла до насъ въ „Началахъ" Евклида. Само названіе этой науки указываетъ, что первоначально она имѣла у грековъ чисто практическій характеръ. Слово *Геометрія* произошло отъ словъ ἡ γῆ—*земля* и μετρέω—*мѣрю*, такимъ образомъ первоначально названіе *геометрія* примѣнялось въ смыслѣ искусства измѣренія земель, т. е. *землемѣрія*. Такой логическій умъ, какимъ отличались древніе эллины, если ему представлялась какая нибудь геометрическая теорема или какое нибудь замѣчательное соотношеніе между частями извѣстной фигуры, не могъ принимать замѣченную истину не прослѣдивши ея происхожденіе изъ простѣйшихъ. Такимъ образомъ дошли до истинъ первоначальныхъ, очевидныхъ, которыхъ происхожденіе необъяснимо; эти послѣднія истины они назвали *общими понятіями* (κοιναὶ ἔννοιαι) и изъ нихъ, въ строго-логическомъ порядкѣ, выводили всѣ свойства протяженія *).

Первоначальныя познанія древнихъ грековъ въ Геометріи были вѣроятно весьма ничтожны, онѣ заключались, можно думать, въ знаніи только самыхъ обыкновенныхъ и простыхъ геометрическихъ истинъ, необходимыхъ при производствѣ построекъ. Съ болѣе сложными правилами греки вѣроятно познакомились только начиная съ VII в. до Р. Х., когда начинаются путешествія ихъ философовъ въ Египетъ, незадолго передъ тѣмъ открытый для иностранцевъ. Въ Египтѣ въ то время существовала Геометрія въ видѣ

*) Желающихъ познакомиться болѣе обстоятельно съ развитіемъ Геометріи у древнихъ грековъ мы отсылаемъ къ интереснымъ монографіямъ. *M. Cantor*, Euclid und sein Jahrhundert Mathematisch-historische Skizze. Leipzig, 1867, in-8. —*C. A. Bretschneider*, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides, Leipzig, 1870, in-8.—*J. L. Heiberg*, Litterargeschichtliche Studien über Euklid. Leipzig, 1882 in-8.—*H. Weissenborn*, Die Übersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti. Eine mathem.-histor. Studie. Halle, 1882, in-8.

собранія правилъ, но научнаго характера она не имѣла. Почерпнутое у египетскихъ жрецовъ, греки, посѣтившие Египетъ, передали, по возвращеніи на родину, своимъ соотечественникамъ. Познанія эти передавались въ различныхъ школахъ, изъ которыхъ древнѣйшая возникла въ Малой Азіи, въ Милетѣ, и была извѣстна подъ названіемъ *іонійской* *). На какой степени своего развития находилась Геометрія въ этой школѣ неизвѣстно. Можно думать, что она научнаго характера не имѣла, что объ аксіомахъ и строго-логической системѣ не имѣли еще представленія, а все основывалось на наглядномъ представленіи, этомъ первоначальномъ методѣ, замѣняющемъ собою всѣ доказательства и разсужденія позднѣйшихъ ученыхъ. Болѣе научный характеръ получила Геометрія въ другой школѣ, замѣнившей первоначальную. Новое направленіе внесъ Пиѳагоръ и школа имъ основанная получила названіе *пиѳагорійской*. Ученые этой школы занимаются изслѣдованіемъ различныхъ свойствъ чиселъ, приписывая имъ мистическое значеніе. Подобное направленіе имѣла Ариѳметика во все время существованія пиѳагорейской школы **). Одновременно съ этой школой существовали и другія, но школы эти придавали мало значенія изученію математическихъ наукъ. Изъ этихъ школъ особенно выдается школа *элеатовъ*, которые благодаря своимъ софизмамъ доходили до самыхъ странныхъ противорѣчій, хотя послѣдователи этой школы занимались также Геометріей. Послѣ пиѳагорейской школы слѣдуютъ школы *платоновская* и *аристотелевская*. Основатели этихъ школъ Платонъ и Аристотель сами мало занимались математическими науками, но за то ученики ихъ значительно подвинули впередъ Геометрію. Аристотелемъ особенное вниманіе было обращено на изученіе природы и такимъ образомъ положено было начало правильному изученію различныхъ явленій. Затѣмъ слѣдуетъ *александрійская* школа, самая блестящая изъ всѣхъ. Школу эту дѣлятъ на двѣ: *первую* и *вторую*. Ученые этой школы возводятъ Геометрію на самую высокую степень совершенства. Она имъ обязана тѣмъ состояніемъ, въ которомъ она находится въ настоящее время. Въ этой школѣ Геометрія получила ту законченность, какую она имѣетъ въ „Началахъ" Евклида, одномъ изъ самыхъ замѣчательныхъ сочиненій, когда либо написанныхъ и сохранившихъ свое прен-

---

*) Желающихъ познакомиться съ ученіями и воззрѣніями древнихъ греческихъ философскихъ школъ мы отсылаемъ къ сочиненію: *F. Ueberweg*, Grundriss der Philosophie des Alterthums. Berlin, 1871, in-8. Воззрѣнія философовъ іонійской школы были подробно разобраны Ретомъ въ сочиненіи: *E. Roth*, Geschichte der Griechischen Philosophie. Mannheim, 1858, in-8. По мнѣнію Рета философскія воззрѣнія [illegible] получили свое начало на Востокѣ.

**) Ариѳметики грековъ мы не касаемся, такъ какъ этотъ вопросъ занялъ-бы слишкомъ много времени. Также мы не будемъ говорить о системѣ счисленія, замѣтимъ только, что числа выражались буквами греческаго алфавита. О системѣ счисленія грековъ есть интересный мемуаръ: *Delambre*, De l'Arithmétique des Grecs. Paris, 1808, in-8.

мущество передъ всѣми сочиненіями подобнаго рода, написанными и въ настоящее время. Такимъ образомъ мы видимъ, что первоначальное развитіе Геометрія получаетъ у восточныхъ грековъ—іонійцевъ, въ Малой Азіи, заимствовавшихъ большую часть своихъ познаній въ Египтѣ. Послѣ этого возникаетъ другая школа въ южной Италіи, въ Тарентѣ,—это пиѳагорейская школа. Слѣдующая школа, платоновская, процвѣтаетъ въ самомъ центрѣ Греціи —Аѳинахъ, откуда центръ научнаго развитія снова переносится въ Александрію, гдѣ онъ первоначально находился. Съ паденіемъ Александріи оканчиваетъ свое существованіе александрійская школа и возникаютъ другія школы, одна въ Аѳинахъ—*аѳинская*, а другая, впослѣдствіи, въ Византіи—*византійская*, но школы эти только указываютъ на паденіе математическихъ наукъ среди грековъ и вскорѣ окончательно распадаются. Съ паденіемъ византійской школы оканчивается развитіе математическихъ наукъ у грековъ.

Вполнѣ научный характеръ Геометрія получила въ первой александрійской школѣ, благодаря трудамъ такихъ философовъ, какъ Евклидъ, Архимедъ, Аполлоній и другіе. Геометры эти принадлежатъ къ величайшимъ философамъ древности и сочиненія ихъ до настоящаго времени считаются образцомъ по глубинѣ мысли, изяществу методовъ и пріемовъ, и ясности изложенія. Въ позднѣйшихъ школахъ Геометрія снова принимаетъ характеръ и направленіе не науки, а собранія практическихъ правилъ. Въ сочиненіяхъ писателей того времени мы снова встрѣчаемъ нѣкоторые изъ практическихъ пріемовъ, заимствованныхъ у древнихъ египтянъ. Одно изъ такихъ практическихъ сочиненій было написано еще во II в. до Р. Х. александрійскимъ геометромъ Герономъ Старшимъ. Многіе изъ его пріемовъ впослѣдствіи были снова внесены въ свои сочиненія другими учеными. Пріемы эти часто даютъ только приближенное рѣшеніе вопроса. Въ византійской школѣ такое направленіе преобладаетъ, такъ какъ Геометрія обращается въ науку объ измѣреніи земель. Какія правила существовали видно изъ содержанія „Геодезіи“ Герона Младшаго, жившаго около X в. Пріемы Герона Младшаго снова примѣняетъ византіецъ Іоаннъ Педіасимусъ, въ своей „Геометріи“, написанной въ началѣ XIV в *). Нѣкоторые изъ его неточныхъ пріемовъ переходятъ на Западъ. Подобные неточные пріемы встрѣчаются также въ сочиненіяхъ римскихъ землемѣровъ **). Итакъ мы видимъ, какъ Геометрія у грековъ изъ науки практической, въ короткій, сравнительно промежутокъ времени, сдѣлалась наукой умозрительной въ полномъ значеніи этого слова. Съ паденіемъ греческаго творчества прекра-

*) *Friedlein*, Die Geometrie des Pediasimus. Ansbach, 1866, in-4

**) Указанія на состояніе Геометріи у римлянъ и приложеніи ея къ измѣренію земель можно найти въ сочиненіи: *M. Cantor*, Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Leipzig, 1875, in-8.

щается развитіе Геометріи у грековъ, она снова нисходитъ на степень науки практической и изъ науки точной, дѣлается собраніемъ приближенныхъ правилъ, имѣющихъ примѣненіе при рѣшеніи вопросовъ обыденной жизни. Подобное явленіе повторилось и у другихъ народовъ древности. Съ прекращеніемъ самостоятельнаго развитія наукъ у грековъ въ IV в. по Р. X. математическія науки теряютъ свое первенствующее значеніе на Западѣ, и только снова, начиная съ XI вѣка, постепенно подготовляется возрожденіе наукъ, и въ томъ числѣ и математическихъ. Въ этотъ промежутокъ времени математическія науки достигаютъ значительной степени своего развитія у индусовъ, а затѣмъ также у арабовъ. Направленіе, которому слѣдовали индусы, столь же характерно, какъ и направленіе древнихъ грековъ. Въ послѣдствіи мы познакомимся съ этими методами ближе, замѣтимъ только, что методъ геометрическій индусскихъ математиковъ былъ основанъ на наглядномъ представленіи и что Геометрія ихъ имѣетъ чисто ариѳметическій характеръ.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ объ источникахъ, которые могутъ служить для ознакомленія съ историческимъ развитіемъ Геометріи въ различныхъ школахъ Греціи. Собственно сочиненій, заключающихъ исторію Геометріи у грековъ не сохранилось. Особенное значеніе могла-бы имѣть для указанной цѣли „Исторія Геометріи“, написанная однимъ изъ учениковъ Аристотеля *Евдемомъ Родосскимъ*. Сочиненіе это состояло изъ шести книгъ, къ сожалѣнію оно утеряно и отъ него сохранились лишь незначительные отрывки въ сочиненіяхъ нѣкоторыхъ позднѣйшихъ философовъ. Въ этомъ отношеніи для насъ особенную важность представляютъ сочиненія Діогена Лаэртскаго *) и „Комментаріи“ Прокла на первую книгу „Началъ“ Евклида. Въ послѣднемъ сочиненіи авторъ дѣлаетъ выписки изъ сочиненія Евдема. Сочиненіе Евдема заключало вѣроятно весьма много данныхъ о первоначальномъ состояніи Геометріи у грековъ, такъ какъ оно написано въ сравнительно раннее время и авторъ его принадлежалъ къ свѣдущимъ геометрамъ. Также написана была Евдемомъ „Исторія астрономіи“ **).

Не меньшее значеніе могла бы имѣть для насъ „Исторія Геометріи“ въ четырехъ книгахъ, написанная современникомъ Евдема, *Теофрастомъ Эретійскимъ*, но сочиненіе это также до насъ не дошло ***).

*) *Діогенъ Лаэртскій*, родомъ изъ г. Лаэрты въ Сициліи, жилъ въ III в. по Р. X. Онъ написалъ сочиненіе: „Жизнеописаніе и ученія знаменитыхъ философовъ“.

**) Также написалъ Евдемъ сочиненіе „объ углахъ“, въ которомъ онъ впервые подвелъ углы подъ категорію количествъ, т. е. началъ измѣрять ихъ.

***) Теофрастъ, былъ уроженецъ города Эрезоса, на островѣ Лесбосѣ, и родился между 373—368 гг. Онъ написалъ болѣе 227 сочиненій, которыя всѣ утеряны, кромѣ незначительныхъ отрывковъ. Нѣкоторыми учеными было высказано мнѣніе, что Теофрасту приписываютъ написанное Евдемомъ, но такое мнѣніе ошибочно.

Изъ другихъ сочиненій, въ которыхъ говориться о первоначальномъ развитіи математическихъ наукъ вообще, укажемъ еще на сочиненія Симпликія, Теона Смирнскаго, Плутарха и другихъ. Много свѣдѣній также объ методахъ древнихъ греческихъ геометровъ сохранилъ намъ Паппусъ, въ своихъ „Математическихъ Коллекціяхъ". О развитіи Геометріи у грековъ мы можемъ составить себѣ довольно полное понятіе, такъ какъ множество сочиненій первоклассныхъ мыслителей различныхъ философскихъ школъ и разныхъ временъ сохранились въ дошедшихъ до насъ рукописяхъ. Изъ такихъ сочиненій особенное значеніе имѣютъ: „Начала" и другія сочиненія Евклида, „Коническія Сѣченія" Аполлонія, „О шарѣ и цилиндрѣ" и другія сочиненія Архимеда, „Ариѳметики" Діофанта, „Математическія Коллекціи" Паппуса и многія другія. Нѣкоторыя изъ этихъ сочиненій стали извѣстны только сравнительно недавно, другія были возстановлены, только благодаря глубокомысленнымъ изслѣдованіямъ ученыхъ. Къ сожалѣнію необходимо замѣтить, что полнаго изданія всѣхъ математическихъ сочиненій древнихъ грековъ несуществуетъ. Сочиненія древнихъ греческихъ математиковъ предпринялъ издать Тевено, но изданные имъ отрывки *) заключаютъ только сочиненія, относящіяся къ военному искусству и устройству различныхъ приборовъ.

Бросивъ общій взглядъ на первоначальное развитіе Геометріи у грековъ перейдемъ теперь къ обозрѣнію развитія этой науки въ различныхъ философскихъ школахъ древней Греціи. Обозрѣніе это мы начнемъ съ древнѣйшей школы—іонійской, первымъ представителемъ которой считаютъ Ѳалеса.

Іонійская школа.

Первая философская школа древнихъ грековъ возникла въ одной изъ греческихъ колоній въ Малой Азіи. Сближеніе восточныхъ грековъ іонійцевъ съ Египтомъ въ VII и VI вѣкахъ до Р. Х. познакомило ихъ съ философскими воззрѣніями и науками египетскихъ жрецовъ. Школа эта получила свое первоначальное развитіе въ Милетѣ и впослѣдствіи получила названіе *іонійской*. Представителями этой школы были: Ѳалесъ, Анаксимандръ, Анаксименъ и Анаксагоръ, всѣ родомъ іонійцы. Къ этой школѣ причисляютъ также: Демокрита, Энопида Хіосскаго, Гераклита и другихъ. Большая часть изъ этихъ ученыхъ посѣтили Египетъ, гдѣ они познакомились съ ученіями жрецовъ въ школахъ Навкратиса и Мемфиса. Въ основаніи философской системы іонійской школы лежало изученіе природы и различныхъ явленій. Почти всѣ ученые занимаются розысканіями надъ началомъ вещей и находятъ его, одни въ воздухѣ, другіе въ огнѣ, водѣ и т. п.

*) *Thevenot*, Veterum mathematicorum, Athenaei, Apollodori, ect. (a Melch. Thevenot, Jo. Boivin et Ph. de la Hire). Parisiis, ex Typ. Regia, 1693, in-fol.

Философы іонійской школы впервые познакомили грековъ съ Геометріей и съ математическими науками вообще. О первоначальномъ состояніи Геометріи въ іонійской школѣ и объ методахъ, которые примѣнялись первыми греческими философами мы знаемъ весьма мало. Есть основанія полагать, что Геометрія была вполнѣ наукой практической и что наглядное представленіе замѣняло собою всякія доказательства. Строго-логической геометрической системы несуществовало, а было собраніе правилъ, которыми руководствовались при построеніяхъ. Правила эти были найдены эмпирически, для каждаго частнаго случая отдѣльно. Самымъ выдающимся геометромъ въ іонійской школѣ былъ Ѳалесъ, но ему были извѣстны только нѣкоторыя самыя элементарныя предложенія Геометріи, именно: углы при основаніи равнобедреннаго треугольника равны; противоположные углы равны; уголъ вписанный въ полуокружность прямой. Неизвѣстно даже была-ли ему извѣстна теорема о равенствѣ двумъ прямымъ угламъ суммы внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ. Весьма вѣроятно также, что ученіе объ измѣреніи и сравненіи площадей плоскихъ фигуръ, существовавшее въ Египтѣ уже въ глубокой древности, было совершенно неизвѣстно геометрамъ іонійской школы, такъ какъ теоремы, знаніе которыхъ приписываютъ Ѳалесу, относятся къ измѣренію и построенію только прямыхъ линій.

Изъ сказаннаго можно заключить, что философамъ Іонійской школы Геометрія обязана только своимъ первоначальнымъ развитіемъ среди эллиновъ. Познанія ихъ въ Геометріи были самыя элементарныя и Геометрія существуетъ у нихъ не какъ наука, а скорѣе, какъ искусство — собраніе эмпирическихъ правилъ. Научное развитіе Геометрія получила только позднѣе въ другой школѣ, извѣстной подъ именемъ *пиѳагорейской*.

Ѳалесъ. Основатель іонійской школы *Ѳалесъ* считается однимъ изъ первыхъ философовъ древней Греціи. Онъ былъ родомъ изъ города Милета; родился Ѳалесъ около 640 г. до Р. Х. и умеръ въ глубокой старости, около 540 г. Въ теченіи многихъ столѣтій онъ пользовался славой перваго философа и считался однимъ изъ семи мудрецовъ Греціи. Ему приписываютъ первому ознакомленіе грековъ съ Геометріей. По происхожденію, если вѣрить словамъ Діогена Лаэртскаго, Ѳалесъ принадлежалъ къ финикійскому семейству, которое переселилось въ Милетъ. Въ молодости своей Ѳалесъ занимался торговлей и, весьма вѣроятно, благодаря этому ему пришлось посѣтить Египетъ, незадолго передъ тѣмъ открытый для иностранцевъ Псамметихомъ *).

Въ Египтѣ Ѳалесъ познакомился съ философскими воззрѣніями та-

*) Желающихъ познакомиться съ ученіемъ и воззрѣніями Ѳалеса мы отсылаемъ къ сочиненію Рета, а также къ статьямъ *P. Tannery*, Thalès de Milet. Ce qu'il a emprunté à l'Egypte (Revue Philosophique, Mars, 1880). — *Decker*, De Thalete Milesio, Halle, 1865.

мощныхъ ученыхъ и изучалъ науки ихъ въ теченіи многихъ лѣтъ въ школахъ Мемфиса и Ѳивъ, которые въ то время были центрами умственнаго развитія древнихъ египтянъ. Послѣ многолѣтняго пребыванія въ Египтѣ, Ѳалесъ возвратился на родину уже въ преклонныхъ лѣтахъ и основалъ въ Милетѣ школу, въ которой онъ развивалъ свою философскую систему и знакомилъ учениковъ съ тѣмъ, что имъ было заимствовано въ Египтѣ *). Ѳалеса считаютъ также первымъ греческимъ астрономомъ **). За начало всего онъ принималъ *воду*.

Познакомимся теперь съ познаніями Ѳалеса въ Геометріи. Указанія по этому вопросу сохранилъ намъ Проклъ въ своихъ комментаріяхъ на первую книгу „Началъ" Евклида. Свѣдѣнія свои Проклъ заимствовалъ изъ „Исторіи Геометріи" Евдема. Предложенія, которыя Проклъ приписываетъ Ѳалесу суть слѣдующія: 1) Противоположные углы, полученные при пересѣченіи двухъ прямыхъ линій, равны. Научное доказательство этого предложенія дано было только гораздо позже Евклидомъ. 2) Въ равнобедренномъ треугольникѣ углы, лежащіе при основаніи, равны. 3) Треугольникъ вполнѣ опредѣляется двумя углами и прилежащею имъ стороною. По словамъ Евдема, на основаніи этого предложенія Ѳалесъ опредѣлилъ разстояніе корабля отъ пристани; 4) Кругъ дѣлиться діаметромъ пополамъ. Предложеніе это, по словамъ Евдема, было доказано въ первый разъ Ѳалесомъ.

Кромѣ приведенныхъ предложеній Діогенъ Лаертскій упоминаетъ еще одно, именно, что уголъ, вписанный въ полуокружность прямой. Предложеніе это Ѳалесъ, по словамъ Памфила, приводимымъ Діогеномъ, нашелъ въ то время, когда онъ изучалъ Геометрію у египтянъ. Памфилъ говоритъ, что: „Ѳалесъ первый вписалъ въ кругъ прямоугольный треугольникъ и за это принесъ богамъ въ жертву быка". Впрочемъ необходимо замѣтить, что это же предложеніе нѣкоторые приписываютъ Пиѳагору. Также приписываютъ Ѳалесу способъ нахожденія высоты пирамиды, и вообще различныхъ предметовъ, по измѣренію тѣни.

Приведенныя предложенія заключаютъ все то, что намъ извѣстно о геометрическихъ познаніяхъ Ѳалеса. Какъ доказалъ эти предложенія Ѳалесъ не сохранилось никакихъ указаній. Знаніе приведенныхъ нами истинъ, хотя бы въ видѣ эмпирическихъ правилъ, было необходимо, такъ какъ безъ нихъ немыслимо производство сооруженій и правильное измѣреніе земель. На основаніи сказаннаго можно предположить, что предложенія, которыя Проклъ приписываетъ Ѳалесу, заимствованы послѣднимъ у египтянъ, у которыхъ уже въ глубокой древности процвѣтало архитектурное искусство,

*) Сочиненія Ѳалеса заключали вѣроятно только собраніе правилъ, выраженныхъ въ самой сжатой и лаконической формѣ, такъ какъ всѣ онѣ составляли только 200 стиховъ.

**) Ѳалесу приписываютъ предсказаніе солнечнаго затмѣнія 28 мая 585 года.

производились различныя сооруженія и существовало правильно-организованное измѣреніе земель. Кромѣ приведенныхъ нами выше предложеній, Θалесу, по мнѣнію Бретшнейдера, должны были быть извѣстны самыя простыя изъ теоремъ, относящіяся къ параллельнымъ линіямъ, къ равностороннимъ, равнобедреннымъ и разностороннимъ треугольникамъ, нѣкоторыя изъ свойствъ параллелограммовъ. Подобное предположеніе Бретшнейдера основано на словахъ Прокла, который въ своемъ перечисленіи древнихъ геометровъ, говоритъ, что: „Θалесъ многое нашелъ самъ, основанія многаго онъ передалъ своимъ послѣдователямъ; нѣкоторое онъ обобщилъ, а другое сдѣлалъ болѣе нагляднымъ". По словамъ Аполлодора, Θалесъ развилъ многія изъ предложеній, которыя Каллимахъ приписывалъ фригійцу Эвфорбу *); предложенія эти относились къ свойствамъ различныхъ треугольниковъ и вообще линій.

Мы уже выше сказали, что до насъ не дошли доказательства предложеній, приписываемыхъ Прокломъ Θалесу. Если только допустить, что такія доказательства существовали во время Θалеса, то необходимо ему были извѣстны всѣ аксіомы, составляющія основы элементарной Геометріи. Знаніе этихъ аксіомъ и доказательство на основаніи ихъ различныхъ предложеній можетъ указывать на то, что Геометрія изъ науки практической сдѣлалась наукой теоретической.

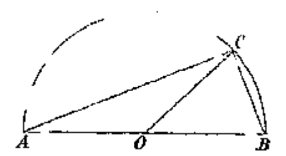
Весьма интересно было-бы знать какія именно предложенія, кромѣ поименованныхъ Прокломъ, были извѣстны Θалесу. Вопросъ этотъ занималъ многихъ ученыхъ. Нѣкоторые полагаютъ, что Θалесу необходимо было извѣстно, что сумма внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ. По мнѣнію Алмана знаніе этой теоремы явилось у Θалеса, какъ слѣдствіе изъ предложенія, что въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основаніи равны и что уголъ, вписанный въ полуокружность, прямой. Алманъ пытается возстановить **) построеніе, которое навело Θалеса на существованіе предложенія о равенствѣ двумъ прямымъ угламъ суммы внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ. Методъ Алмана очень остроуменъ; построеніе это заключается въ слѣдующемъ: Пусть ABC треугольникъ, вписанный въ кругъ, въ которомъ уголъ при C прямой, а слѣдовательно сторона AB (фиг. 1) есть діаметръ круга. Соединивъ точку C съ точками A, B и O, получимъ два равнобедренные треугольника AOC и BOC, въ которыхъ $\angle OAC = \angle OCA$ и $\angle OBC = \angle OCB$, сложивъ эти два равенства получимъ, что: $\angle OAC + \angle OBC = \angle ACB = d$, а слѣдовательно сумма

*) *Каллимахъ*, греческій поэтъ, жилъ въ III в. до Р. Х; онъ былъ учителемъ Эратосѳена. Время когда жилъ Евфорбъ неизвѣстно.

**) *G. J. Allman*, Greek geometry from Thales to Euclid. Напечатано въ журналѣ Hermathena, a series of papers on Literature, Science, and Philosophy, by Members of Trinity College, Dublin. № V, 1877, pag. 164—174, in-8

$\angle A + \angle B + \angle C = 2d$. Канторъ иного мнѣнія *), онъ думаетъ, что съ начала Θалесу были извѣстны предложенія, что сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ и что углы при основаніи въ равнобедренномъ треугольникѣ равны. Зная эти предложенія Θалесъ вывелъ свойство, что уголъ, вписанный въ полуокружность, прямой. Очевидно, что

Фиг. 1.



если было извѣстно Θалесу, что сумма угловъ $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ и что сумма угловъ $\angle A + \angle B = \angle C$, то необходимо онъ долженъ былъ заключить, что $\angle C = d$. Предположеніе Кантора заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ указанный имъ путь происхожденія предложенія о суммѣ внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ тождественъ съ порядкомъ изложенія этого предложенія въ „Началахъ" Евклида, который также съ начала доказываетъ предложеніе о равенствѣ угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, затѣмъ доказываетъ, что сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ и наконецъ показываетъ, что уголъ, вписанный въ полуокружность прямой **).

Предположеніе Кантора, что Θалесу было извѣстно предложеніе, что сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, весьма вѣроятно. Теорема эта могла быть найдена путемъ эмпирическимъ, прямо изъ извѣстныхъ построеній. Справедливость этого предложенія могла быть выведена еще задолго передъ тѣмъ, какъ Геометрія сложилась въ науку, въ которой рядомъ логическихъ разсужденій изъ самыхъ простыхъ, основныхъ, истинъ выводятся болѣе сложныя. Постоянство суммы угловъ въ треугольникѣ могло быть замѣчено еще въ тотъ періодъ, когда доказательствъ различныхъ предложеній въ Геометріи несуществовало, а все было основано на наглядномъ представленіи. Мы уже выше замѣтили, что вѣроятно вся Геометрія древнихъ египетскихъ философовъ была основана на наглядномъ представленіи. Отъ нихъ, безъ сомнѣнія, методъ этотъ перешелъ и къ первымъ греческимъ философамъ. Предположеніе это заслуживаетъ вниманія еще потому, что извѣстно, какъ постепенно обобщались различныя доказательства геометрическихъ предложеній. Первоначально давались отдѣльныя доказательства

*) *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd I, Leipzig, 1880 in-8, pag. 119—121.

**) См. „Начала" Евклида: кн. I, пред. 5; кн. I, пред. 32; и кн. III пред: 31

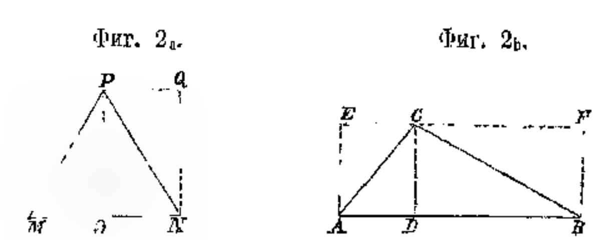
для различныхъ частныхъ случаевъ, а уже съ теченіемъ времени доказательства эти замѣнялись однимъ болѣе общимъ. Тоже имѣло мѣсто и относительно доказательства предложенія о равенствѣ суммы внутреннихъ угловъ въ треугольники двумъ прямымъ угламъ. Въ комментаріяхъ Евтокія на „Коническія Сѣченія“ Аполлонія сохранилась выписка изъ утеряннаго сочиненія Геминуса, заглавіе котораго: „Основы математики“, гдѣ говорится, что: „древніе для каждаго вида треугольниковъ доказывали предложеніе о равенствѣ двумъ прямымъ угламъ суммы угловъ въ треугольникѣ; сначала они доказывали его для равносторонняго, затѣмъ для равнобедреннаго и наконецъ для разносторонняго. Впослѣдствіи уже, съ теченіемъ времени, доказана была общая теорема: сумма трехъ внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ“ *). Изъ словъ Геминуса видно, какими несовершенными методами пользовались первые греческіе геометры. Весьма вѣроятно, что древніе, о которыхъ упоминаетъ Геминусъ, были Өалесъ и другіе современные ему математики. Геминусъ могъ быть весьма обстоятельно знакомъ съ первоначальными методами доказательствъ древнѣйшихъ философовъ, такъ какъ онъ жилъ во II вѣкѣ до Р. Х., около 140 г. Замѣтка Геминуса обратила на себя особенное вниманіе Ганкеля, который пытался возстановить всѣ три отдѣльные вида доказательствъ, о которыхъ упоминаетъ греческій геометръ **). Ганкель обращаетъ вниманіе на то, что разложеніе фигуръ и построеніе правильныхъ многоугольниковъ и многогранниковъ было извѣстно пиѳагорейцамъ и занимало видное мѣсто въ ихъ ученіи. Весьма вѣроятно они умѣли составить равносторонній треугольникъ изъ двухъ прямоугольныхъ. Также было ими выражено предложеніе, что „плоскость около точки выполняется шестью треугольниками, или четырьмя квадратами, или тремя шестиугольниками“. Предложеніе ими выраженное они могли заимствовать у египтянъ, которые умѣли вписывать въ кругъ правильные шестиугольники и которые вѣроятно замѣтили связь, существующую между радіусомъ круга и стороной, вписаннаго въ него шестиугольника. Проведя въ кругѣ три діаметра, пересѣкающіеся подъ угломъ въ 60° и соединивъ ихъ концы хордами, получался правильный шестиугольникъ. Изъ такого построенія легко было усмотрѣть, наглядно, что сумма внутреннихъ угловъ правильнаго треугольника равна выпрямленному углу, т. е. $2d$.

Для другихъ двухъ видовъ треугольниковъ доказательство иное. Оно основано на томъ, что во всякомъ прямоугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ, очевидно, равна $4d$. Взявъ теперь равнобедренный треугольникъ

*) См. Apollonii Pergaei Conicorum libri IV priores cum Pappi Alexandrini lemmatis et Eutocii Ascolonitae Commentariis, pag. 9. Ed. Ed. Halleius, Oxoniae, 1710, in-fol.

**) *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig, 1874, in-8; pag. 95—97.

MNP (фиг. 2_a) и опустивъ на основаніе *MN* высоту *OP* получаемъ два прямоугольные треугольники *MOP* и *NOP*; давъ треугольнику *MOP* положеніе *NQP*, получаемъ прямоугольникъ *ONQP*, въ которомъ сумма угловъ равна $4d$, но сумма двухъ изъ нихъ равна $2d$, слѣдовательно сумма двухъ другихъ также $2d$, а эти послѣдніе суть именно углы первоначальнаго треугольника *MNP*.



Фиг. 2_a. Фиг. 2_b.

Наконецъ, если данъ разносторонній треугольникъ *ABC* (фиг. 2_b), то разбивая его на два прямоугольные и дополняя ихъ до прямоугольника *ABFE*, легко найти, что сумма угловъ треугольника *ABC* равна $2d$.

Впослѣдствіи, когда Геометрія значительно подвинулась впередъ, когда въ нее была введена теорія параллельныхъ линій, приведенныя три частныя доказательства могли быть замѣнены однимъ болѣе общимъ. Такое доказательство дѣйствительно и дано въ „Началахъ" Евклида. Можно также съ большой вѣроятностью предположить, что и извѣстная теорема Пиѳагора о равенствѣ квадрата, построеннаго на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ, была первоначально доказана, или вѣрнѣе сказать замѣчена, на равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ *)

Приведенныя нами соображенія относительно первоначальнаго метода доказательствъ геометрическихъ предложеній, мы полагаемъ, могутъ быть всецѣло отнесены и къ методамъ, которые примѣнялъ Ѳалесъ, для доказательства предложеній, упоминаемыхъ Прокломъ. Методы доказательствъ, основанные на наглядномъ представленіи существовали у индусовъ, какъ мы замѣтили уже выше; впослѣдствіи пріемъ этотъ встрѣчается въ сочиненіяхъ землемѣровъ. Такъ напр. въ „Геодезіи", приписываемой византійскому геометру Герону Младшему, жившему вѣроятно въ X в., говориться, что „сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, потому, что во всякомъ четыреугольникѣ сумма угловъ равна $4d$, а онъ діагональю всегда мо-

*) Построивъ на катетахъ и гипотенузѣ такого треугольника квадраты и проведя въ двухъ меньшихъ квадратахъ по одной діагонали, а въ большемъ двѣ, легко прямо изъ чертежа видѣть справедливость предложенія о которомъ мы говоримъ.

жетъ быть разбитъ на треугольники, заключающіе шесть угловъ" *). Въ подтвержденіи того, что Ѳалесъ, въ своихъ доказательствахъ геометрическихъ истинъ, слѣдовалъ методу нагляднаго представленія можно еще указать на то, что по словамъ Евдема: „Ѳалесъ замѣтилъ предложеніе о равенствѣ угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, но только Евклидъ нашелъ нужнымъ дать доказательство этого предложенія".

Мандріатъ. Къ числу учениковъ Ѳалеса причисляютъ также *Мандріата*, который, по словамъ Діогена Лаертскаго, полагалъ, что солнце въ 720 разъ больше луны. Слова Діогена Лаертскаго совершенно непонятны. Болѣе ясно выражается Апулей, который говоритъ, что Мандріатъ сообщилъ Ѳалесу свои наблюденія надъ отношеніемъ видимаго діаметра солнца къ длинѣ солнечнаго пути, которое равно отношеніи 1 къ 720. Какъ было найдено это отношеніе Мандріатомъ неизвѣстно. Отношеніе это впослѣдствіи встрѣчается въ сочиненіи Архимеда „О числѣ песчинокъ"; онъ заимствовалъ его у Аристарха Самосскаго.

Анаксимандръ. Ученикъ и впослѣдствіи другъ Ѳалеса философъ *Анаксимандръ* былъ также родомъ изъ Милета. Родился онъ въ 611 г. до Р. Х., а умеръ въ 545 г. Объ ученой дѣятельности Анаксимандра извѣстно очень мало, мы знаемъ только, что онъ написалъ сочиненіе „О природѣ", въ которомъ изложены его философскія воззрѣнія. За начало вещей онъ принималъ тонкую матерію, которую онъ называетъ *безграничное* (ἄπειρον).

Были-ли написаны Анаксимандромъ сочиненія геометрическаго содержанія неизвѣстнаго, но Рётъ, изъ словъ Свиды, полагаетъ, что Анаксимандромъ было написано сочиненіе по практической Геометріи, въ которомъ даны были различныя правила для геометрическихъ построеній. Вѣроятно въ этомъ сочиненіи различныя построенія производились примѣненіемъ методовъ нагляднаго представленія. Такое же предположеніе о сочиненіи Анаксимандра высказалъ Фридлейнъ **). Если-бы сочиненіе Анаксимандра было-бы геометрическій трактатъ, то, по справедливому замѣчанію Бретшнейдера, оно необходимо вошло-бы въ списокъ Прокла, который положительно говоритъ, что „первое сочиненіе по Геометріи было написано Гиппократомъ Хіосскимъ". Сочиненіе о которомъ мы говоримъ было озаглавлено, по словамъ Свиды, терминомъ ὑποτύπωσιν -*hypotyposis.* Что именно означалъ этотъ терминъ неизвѣстно, по Рётъ думаетъ, какъ мы сказали выше, что его можно перевести словами. „наглядное представленіе". Это и все,

---

*) *Vincent,* Extraits des manuscrits relatifs à la Géométrie pratique des Grecs. См. Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale. T. XIX, seconde partie, 1858, pag 368.

**) *Friedlein,* Beiträge zur Geschichte der Mathematik, II. Hof. 1872, in-8, pag. 15.

что намъ извѣстно объ математическихъ познаніяхъ Анаксимандра. Сочиненія его до насъ не дошли.

Америстъ. Проклъ въ своемъ перечисленіи именъ древнихъ греческихъ геометровъ упоминаетъ *Америста,* брата поэта Стесихора, который былъ весьма свѣдущъ въ Геометріи. Объ этомъ геометрѣ находятся также указанія въ дошедшихъ до насъ отрывкахъ сочиненій Герона Старшаго, гдѣ говориться, что „послѣ Ѳалеса слѣдуетъ Америстъ". Свида Америста называетъ *Мамерціемъ,* можетъ быть потому, что онъ былъ родомъ изъ Сициліи. Бретшнейдеръ полагаетъ, что Америстъ былъ ученикомъ Ѳалеса; такое предположеніе вѣроятно, такъ какъ извѣстно, что Стесихоръ, братъ Америста, умеръ въ 560 г. до Р. Х. Объ геометрическихъ познаніяхъ Америста мы ничего не знаемъ, хотя Гиппій Элейскій, по словамъ Прокла, считалъ его весьма свѣдущимъ геометромъ.

Анаксименъ. Третій представитель іонійской школы былъ *Анаксименъ,* ученикъ Анаксимандра, родомъ изъ Милета. Онъ родился въ 570 г. и умеръ въ 499 г. до Р. Х. О познаніяхъ его въ математическихъ наукахъ несохранилось никакихъ указаній. Подобно своимъ предшественникамъ Анаксименъ занимался розысканіями надъ первымъ началомъ вещей, за которое онъ принимаетъ *воздухъ,* наполняющій весь міръ. По его понятіямъ воздухъ вѣченъ и безграниченъ, такимъ образомъ онъ приходитъ къ представленію о безконечности. На основаніи нѣкоторыхъ указаній полагаютъ, что Анаксименъ написалъ сочиненіе объ устройствѣ міра, но оно до насъ не дошло.

Эонипидъ Хіосскій. Къ ученымъ іонійской школы причисляютъ также *Эонипида Хіосскаго,* жившаго около 450 г. до Р. Х. Онъ предпринималъ, подобно другимъ греческимъ философамъ, путешествіе въ Египетъ. По словамъ Евдема, приводимымъ въ комментаріяхъ Прокла, Эонипиду принадлежатъ теоремы 12-я и 23-я книги I „Началъ" Евклида; предложенія эти суть слѣдующія: изъ данной точки опустить перпендикуляръ на данную прямую, неопредѣленной длины; при данной прямой, въ данной точкѣ, построить плоскій уголъ, равный данному плоскому углу. Весьма вѣроятно, что предложенія эти Эонипидъ заимствовалъ у египетскихъ ученыхъ.

Демокритъ. Современникъ Эонипида Хіосскаго *Демокритъ,* родился около 460 г. въ Абдерѣ, во Ѳракіи, а умеръ около 360 г. Собственно говоря онъ не принадлежитъ къ ученымъ іонійской школы, такъ какъ его ученіе разниться отъ ученія іонійскихъ философовъ. Демокритъ былъ ученикомъ Левкиппа и послѣдователемъ атомистическаго ученія. Онъ былъ знакомъ почти со всѣми отраслями человѣческихъ знаній и пользовался въ древности большой извѣстностью. Демокритъ, подобно другимъ греческимъ философамъ, предпринималъ путешествіе въ Египетъ, гдѣ, по словамъ Діо-

дора, пробылъ пять лѣтъ; а по словамъ нѣкоторыхъ другихъ писателей посѣтилъ также переднюю Азію, Персію и Индію, но едва-ли это справедливо. Въ Египтѣ Демокритъ познакомился съ методами геометрическихъ построеній, примѣняемыми туземными учеными. Объ этихъ построеніяхъ Климентъ Александрійскій сохранилъ намъ слѣдующія слова самаго Демокрита: „въ построеніи линій данной длины, полученныхъ изъ заключеній, слѣдующихъ изъ предположеній, никто меня не превзошелъ, даже сами египетскіе гарпедонапты (землемѣры)". Изъ этихъ словъ видно, что Демокритъ основательно былъ знакомъ съ пріемами египетскихъ ученыхъ.

Весьма страннымъ можетъ показаться, что Проклъ въ своемъ перечисленіи именъ древнихъ греческихъ геометровъ, совершенно неупоминаетъ имени Демокрита. Причина этому вѣроятно та, что Проклъ былъ неоплатоникъ, а Платонъ, несогласный съ воззрѣніями Демокрита, никогда не упоминалъ въ своихъ сочиненіяхъ имени послѣдняго. Невозможно, чтобы Евдемъ, Теофрастъ и Аристотель прошли бы молчаніемъ имя Демокрита. Позднѣйшіе писатели отзываются о немъ съ большимъ уваженіемъ, какъ напр. Цицеронъ и Діогенъ Лаертскій, перечисляющій его сочиненія. Къ сожалѣнію изъ заглавій этихъ сочиненій невозможно ничего заключить о ихъ содержаніи. Заглавія этихъ сочиненій слѣдующія: „Объ разности гномона или о соприкосновеніи круга и шара" (περὶ διαφορῆς γνώμονος ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης); „Двѣ книги объ ирраціональныхъ линіяхъ и плотныхъ вещахъ" (περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν β'). Весьма интересно также было-бы имѣть разъясненіе указанія Плутарха, о томъ, что Демокритъ разсѣкъ конусъ. Всѣ эти вопросы за недостаткомъ какихъ либо указаній остаются вполнѣ неразъясненными. Изъ заглавія втораго изъ упомянутыхъ сочиненій видно, что вопросомъ объ ирраціональныхъ величинахъ занимались уже въ глубокой древности, ранѣе Пиѳагора, и что первое изъ сочиненій, написанныхъ по этому предмету принадлежало вѣроятно Демокриту.

Анаксагоръ. Послѣднимъ философомъ іонійской школы былъ *Анаксагоръ*, родившійся около 500 г. въ Клазоменѣ, не далеко отъ Эфеса, и умершій въ 428 г. до Р. Х. *).

Познанія Анаксагора въ математическихъ наукахъ намъ совершенно неизвѣстны. Проклъ, въ своихъ комментаріяхъ, упоминаетъ, что: „Анакса-

*) Анаксагоръ былъ однимъ изъ самыхъ глубокихъ мыслителей древняго міра; изученіе природы, и въ особенности наблюденіе звѣздъ, онъ считалъ занятіями наиболѣе свойственными человѣку. Сорока пяти лѣтъ отъ роду онъ прибылъ въ Аѳины, гдѣ учениками его были Периклъ и Еврипидъ. Стремленіе объяснить различныя явленія природы физическими законами и отрицаніе зависимости ихъ отъ воли боговъ, навлекли на Анаксагора гоненія со стороны аѳинянъ, которые посадили его въ тюрьму и приговорили къ смерти. Только благодаря бѣгству онъ сохранилъ жизнь.

горомъ дано было многое въ Геометріи". Плутархъ говоритъ, что „Анаксагоръ во время своего заключенія писалъ *о квадратурѣ круга*". Приведенныя два указанія суть единственныя, указывающія на геометрическія познанія Анаксагора. Къ сожалѣнію Проклъ неупоминаетъ, что именно было сдѣлано Анаксагоромъ въ Геометріи, а также намъ совершенно неизвѣстенъ пріемъ, при помощи котораго Анаксагоръ пытался рѣшить знаменитую задачу о квадратурѣ круга. Математическими науками, вѣроятно, Анаксагоръ сталъ заниматься подъ старость, когда ученія іонійской школы уступили мѣсто новому направленію - пиѳагорейской школѣ.

По словамъ Витрувія, Анаксагоръ занимался перспективой и совмѣстно съ Демокритомъ нашелъ правила, какъ наносить строенія и вообще различные предметы на декораціи, какъ изобразить предметъ, чтобы онъ казался ближе или дальше, и т. п. Развитіе ученія о перспективѣ вполнѣ принадлежитъ Анаксагору, такъ какъ почерпнуть свѣдѣній по этому предмету во время своего посѣщенія Египта онъ не могъ, въ виду того, что въ этой странѣ онъ могъ только видѣть изображенія, лишенныя перспективы.

Пиѳагорейская школа.

Пиѳагоръ. О жизни Пиѳагора мало извѣстно, Рётъ полагаетъ, что онъ родился въ 569 г. до Р. Х. на островѣ Самосѣ, а умеръ въ Тарентѣ въ 470 году. Подобно Ѳалесу Пиѳагоръ также отправился въ Египетъ изучать науки у жрецовъ; онъ имѣлъ рекомендательное письмо отъ самосскаго тирана Поликрата къ его союзнику египетскому фараону Амазису, вслѣдствіе чего ему вѣроятно было легко сблизиться съ кастою жрецовъ. Въ Египтѣ Пиѳагоръ пробылъ 22 года, былъ взятъ Камбизомъ въ плѣнъ и отправленъ въ Вавилонъ, гдѣ пробылъ 12 лѣтъ и учился астрологіи и астрономіи у халдейскихъ жрецовъ. По словамъ другихъ, онъ изъ Египта возвратился прямо въ Іонію. Что же касается путешествія Пиѳагора въ Индію и встрѣчѣ его съ Зороастромъ, то это измышленія, не заслуживающія вниманія. Изъ своего отечества Пиѳагоръ переселился въ Южную Италію, и въ Кротонѣ, въ Сициліи, основалъ знаменитую *пиѳагорейскую школу.* Правила школы носили въ своемъ уставѣ и правилахъ отпечатокъ долгаго пребыванія Пиѳагора въ Египтѣ. Мы не коснемся его философіи вообще, а только скажемъ о томъ, что Пиѳагору приписываютъ древніе писатели, такъ какъ отъ него самого ничего не осталось написаннаго по Геометріи *). По нѣкоторымъ указаніямъ, можно полагать, что въ пиѳаго-

*) Желающихъ познакомится съ философскими воззрѣніями Пиѳагора мы отсылаемъ къ сочиненіямъ Рёта и *Chaignet*, Pythagore et la philosophie pythagoricienne ect. T. I II, Paris, 1874, in-8.

рейской школѣ существовалъ геометрическій методъ разложенія и преобразованія прямолинейныхъ фигуръ, который они держали въ секретѣ, и пользовались имъ для доказательства теоремъ и рѣшенія задачъ. Одно изъ указаній мы находимъ въ комментаріяхъ Прокла на „Начала" Евклида. Онъ говоритъ, что „плоскость около одной точки можетъ быть наполнена шестью равносторонними треугольниками, или четырьмя квадратами, или тремя правильными шестиугольниками, такъ что цѣлую плоскость можно раздѣлить на такія фигуры"; къ этому Проклъ прибавляетъ: „καὶ ἔστι τὸ θεώρημα τοῦτο Πυθαγορεῖον", т. е. „это теорема пиѳагорейская".

Платонъ въ „Тимеѣ" говоритъ слѣдующее: „каждая прямолинейная фигура состоитъ изъ треугольниковъ, а каждый треугольникъ разбивается на два прямоугольные треугольника, равнобедренные или неравнобедренные. Изъ послѣднихъ *найпрекраснѣйшие* суть тѣ, которые, будучи удвоены, составляютъ равносторонній треугольникъ, или въ которыхъ квадратъ построенный на большемъ катетѣ, равенъ трижды взятому квадрату, построенному на меньшемъ; или же въ которомъ меньшій катетъ равенъ половинѣ гипотенузы. Два или четыре равнобедренные прямоугольные треугольника составляютъ квадратъ; два или шесть (найпрекраснѣйшихъ) неравнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ составляютъ равносторонній треугольникъ. А изъ этихъ двухъ фигуръ (равносторонній треугольникъ и квадратъ) происходятъ тѣла, которыя соотвѣтствуютъ четыремъ элементамъ дѣйствительнаго міра, именно: тетраедръ, октаедръ, икосаедръ и кубъ". Такъ какъ Платонъ всѣ свои математическія познанія заимствовалъ отъ пиѳагорейцевъ, то, очевидно, все сказанное имъ выше принадлежитъ Пиѳагору. Методъ этотъ вѣроятно Пиѳагоръ почерпнулъ у египтянъ, гдѣ разложеніе фигуръ должно было практиковаться при размежеваніи полей послѣ разлитій Нила.

Изъ теоремы, что плоскость можетъ быть раздѣлена на равносторонніе треугольники, на квадраты и правильные шестиугольники, слѣдуетъ, что Пиѳагоръ зналъ (а можетъ быть это было извѣстно и египтянамъ), что сумма угловъ на плоскости около одной точки равна четыремъ прямымъ, а по одну сторону прямой эта сумма равна двумъ прямымъ, откуда непосредственно вытекаетъ, что сумма внутреннихъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ. Какимъ образомъ египтяне, а за ними Ѳалесъ и іонійская школа доказывали эту теорему неизвѣстно, но какъ ее доказывали пиѳагорейцы Проклъ выписываетъ изъ „Исторіи Геометріи" Евдема. Это доказательство разнится отъ евклидовскаго (кн. I, пред. 32) только тѣмъ, что сумма угловъ по одну сторону прямой сводится на сумму смежныхъ угловъ, что заставляетъ предполагать, что пиѳагорейцы не знали или лучше сказать, они не имѣли теоремы, что сумма угловъ по одну сторону прямой *всегда* равна двумъ прямымъ угламъ. Методъ разложенія фигуръ даетъ намъ

право заключать, что пиѳагорейцамъ были извѣстны всѣ теоремы I-й книги „Началъ“ Евклида, отъ 32-й до 47-й включительно, и всѣ теоремы, составляющія всю II-ю книгу, такъ какъ всѣ эти теоремы относятся къ преобразованію фигуръ.

Предпослѣдняя теорема I-й книги „Началъ“ Евклида, т. е. 47-я носитъ названіе *Пиѳагоровой теоремы* *); это одна изъ самыхъ важныхъ теоремъ въ Геометріи. Хотя намъ извѣстно, что Египтяне, Китайцы и Индусы знали, что треугольникъ, коего стороны суть 3, 4 и 5, есть прямоугольный, и что $3^2+4^2=5^2$, но всѣ древніе писатели приписываютъ эту теорему Пиѳагору. Какъ доказалъ Пиѳагоръ эту теорему древніе писатели намъ не передали, только изъ комментарій Прокла видно, что пиѳагорейцы доказывали ее иначе, чѣмъ она доказана у Евклида.

Въ настоящее время мы имѣемъ около ста различныхъ доказательствъ пиѳагоровой теоремы, слѣдовательно между ними вѣроятно находится и Пиѳагорово. Если обратить вниманіе на то, что пиѳагорейцы много пользовались методомъ разложенія и преобразованія плоскихъ фигуръ, то можно предположить, что имъ была извѣстна 4-я теорема II-й книги „Началъ“ Евклида, которая выражается алгебраическимъ тождествомъ:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

изъ котораго непосредственно вытекаетъ Пиѳагорова теорема. Въ самомъ дѣлѣ, изъ предъидущаго тождества мы имѣемъ:

$$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$$

раздѣлимъ каждый изъ прямоугольниковъ ab діагональю на два равные прямоугольные треугольника и полученные четыре треугольника помѣстимъ прямыми углами въ углахъ квадрата $(a+b)^2$, то отъ этого квадрата останется квадратъ, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть a и b, слѣдовательно этотъ квадратъ равенъ a^2+b^2.

Была-ли доказана Пиѳагоромъ обратная теорема, т. е. 48 предложеніе

---

*) Проклъ, писатель заслуживающій довѣрія, говоритъ: „если мы станемъ слушать всевозможные старые разсказы, то изъ нихъ мы узнаемъ, что это предложеніе приписываютъ Пиѳагору“. Изъ этого видно, что самому Проклу происхожденіе этого предложенія было неизвѣстно. Первый писатель, приписывающій это предложеніе Пиѳагору, есть *Витрувій*, упоминающій объ этомъ предложеніи въ своей „Архитектурѣ“. Преданіе говоритъ, что Пиѳагоръ, въ благодарность богамъ за нахожденіе этого предложенія, принесъ имъ *гекатомбу*, т. е. жертву въ 100 быковъ. Но такой разсказъ заслуживаетъ мало довѣрія, такъ какъ извѣстно, что уставъ пиѳагорейцевъ строго запрещалъ имъ всякое пролитіе крови. Уже Цицеронъ сомнѣвался въ правдивости этого разсказа, а новопиѳагорейцы живыхъ быковъ замѣнили „быками, сдѣланными изъ муки“. Предложеніе это носило прежде названіе magister mateseos, потому что часто предлагалось на магистерскихъ экзаменахъ.

I книги „Началъ“ Евклида, неизвѣстно, но Проклъ говоритъ, что обобщенная теорема относительно подобныхъ фигуръ, построенныхъ на катетахъ и гипотенузѣ, принадлежитъ Евклиду (кн. VI, пред. 31).

Безъ сомнѣнія, Пиѳагорейцы воспользовались всѣми слѣдствіями, непосредственно вытекающими изъ Пиѳагоровой теоремы. Непосредственныя слѣдствія суть: если изъ вершины прямаго угла опустимъ перпендикуляръ на гипотенузу, то гипотенуза раздѣлится перпендикуляромъ на два отрѣзка, слѣдующихъ свойствъ: 1) площадь квадрата, построеннаго на катетѣ, равна площади прямоугольника, построеннаго на гипотенузѣ и отрѣзкѣ ея, прилежащемъ катету; 2) что площадь квадрата, построеннаго на перпендикулярѣ, равна площади прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ гипотенузы. Зная, что уголъ, вписанный въ полуокружность, есть прямой и предъидущія теоремы, пиѳагорейцы могли преобразовывать прямоугольникъ въ квадратъ и обратно, а слѣдовательно знали рѣшеніе задачи: между двумя данными прямыми построить средне-пропорціональную.

Проклъ въ своихъ комментаріяхъ говоритъ, что Пиѳагоръ первый рѣшилъ задачу: найти всѣ прямоугольные треугольники, коихъ-бы стороны имѣли раціональныя отношенія?

Мы выше сказали, что Египтянамъ, Китайцамъ, Индусамъ и Пиѳагору было извѣстно, что числа 3, 4, 5 составляютъ стороны прямоугольнаго треугольника, слѣдовательно естественно, что Пиѳагоръ искалъ всѣ цѣлыя числа, имѣющія то же свойство. Безъ сомнѣнія ему была извѣстна 8-я теорема II-й книги „Началъ“ Евклида или алгебраическое тождество:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

или

$$(a+b)^2=4ab+(a-b)^2$$

если въ этомъ тождествѣ поставимъ вмѣсто a и b, a^2 и b^2, то оно приметъ видъ:

$$(a^2+b^2)^2=(2ab)^2+(a^2-b^2)^2$$

давая всѣ возможныя значенія цѣлымъ числамъ a и b, мы найдемъ прямоугольные треугольники, коихъ катеты будутъ $2ab$ и a^2-b^2, а гипотенуза a^2+b^2. Можно положить $b=1$, тогда катеты будутъ $2a$ и a^2-1, а гипотенуза a^2+1 слѣдовательно, отсюда вытекаетъ, такое правило: взявъ четное число, это будетъ одинъ изъ катетовъ, потомъ взявъ его половину и возвысивъ ее въ квадратъ, если отъ этого квадрата отнимемъ единицу, получимъ другой катетъ, а если къ нему прибавимъ единицу, то получимъ гипотенузу. Это правило приписываютъ Платону, а Пиѳагору приписываютъ слѣдующее: онъ беретъ нечетное число $2n+1$ за одинъ катетъ, возвышаетъ это число въ квадратъ, отнимаетъ отъ него единицу и беретъ половину—

это будетъ другой катетъ $2n^2+2n$, къ этому послѣднему числу онъ прибавляетъ единицу и получаетъ гипотенузу $2n^2+2n+1$. Слѣдовательно:

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2$$

Это тождество легко получить изъ правила Платона, взявъ за $2a$ число $2(2n+1)$, т. е. положивъ $a=2n+1$. Эти два правила отличаются только тѣмъ, что Платонъ начинаетъ съ четнаго числа $2a$, а Пиѳагоръ съ нечетнаго $2n+1$.

Такъ какъ Платонъ почерпнулъ свои математическія познанія у пиѳагорейцевъ, то весьма вѣроятно предположить, что оба эти правила принадлежатъ Пиѳагору.

Непосредственнымъ слѣдствіемъ Пиѳагоровой теоремы, въ связи съ розысканіемъ свойствъ чиселъ, было открытіе *несоизмѣримыхъ* и *ирраціональныхъ* величинъ, т. е. такихъ, коихъ отношеніе не можетъ быть выражено никакимъ числомъ, слѣдовательно показано существованіе такихъ чиселъ, которыя не могутъ быть выражены ни единицей, ни ея частями. Такое открытіе древніе приписываютъ Пиѳагору.

Задача, которая привела къ открытію несоизмѣримыхъ чиселъ, была безъ сомнѣнія, слѣдующая: по данной числовой величинѣ стороны квадрата, найти сторону квадрата, коего площадь была-бы вдвое, втрое, вчетверо и т. д. разъ больше площади даннаго квадрата?

Если сторона даннаго квадрата есть a, а искомаго x, то условіе задачи требуетъ

$$x^2=2a^2,\ x^2=3a^2,\ x^2=4a^2,\ x^2=5a^2, \ldots\ldots$$

Искомое число x съ единицей, въ которой выражено число a, не имѣетъ возможнаго числоваго отношенія и потому называется *несоизмѣримымъ*. Какъ далеко была подвинута пиѳагорейцами теорія несоизмѣримыхъ величинъ намъ неизвѣстно, но X книга „Началъ" Евклида есть совершенство въ этомъ родѣ, по глубокомыслію и тонкости изслѣдованій.

Плутархъ приписываетъ Пиѳагору еще слѣдующую задачу: построить фигуру, которая-бы была равна одной данной фигурѣ и подобна другой данной? Это 25-я задача VI книги „Началъ" Евклида. Нѣкоторые писатели сомнѣваются въ томъ, что Пиѳагоръ самъ рѣшилъ эту задачу, а приписываютъ ее его ученикамъ, но мы увидимъ ниже, говоря о Гиппократѣ Хіосскомъ, что въ Пиѳагоровой школѣ было извѣстно, что подобныя фигуры относятся между собою, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ а равно было извѣстно и построеніе средне-пропорціональныхъ линій, а потому задача не представляла большихъ затрудненій для Пиѳагора.

Всѣ древніе писатели единогласно приписываютъ теорію правильныхъ многоугольниковъ и правильныхъ тѣлъ Пиѳагору, хотя тетраедръ, гексаедръ

и октаедръ были извѣстны Египтянамъ, такъ какъ эти тѣла встрѣчаются и играютъ важную роль въ ихъ архитектурныхъ произведеніяхъ. Что-же касается икосаедра и додекаедра, то можно сомнѣваться. Можно еще предполагать, что икосаедръ былъ извѣстенъ, такъ какъ они знали уже тетраедръ и октаедръ, которые составлены изъ правильныхъ треугольниковъ, соединяя по три и по четыре въ одномъ углѣ, слѣдовательно Египтяне могли пробовать можно-ли составить правильное тѣло, соединяя въ углѣ по пяти правильныхъ треугольниковъ, шесть же треугольниковъ въ углѣ составляютъ плоскость. Пиѳагорейцы тремя первыми правильными тѣлами представляли символически четыре элемента: огонь, землю, воздухъ и воду, которые по ихъ мнѣнію были основаніемъ всего матеріальнаго міра.

Можно предположить, что Египтянамъ было извѣстно построеніе правильныхъ треугольника, четыреугольника и шестиугольника, вписанныхъ въ кругъ, но ни въ какомъ случаѣ такое предположеніе не можетъ быть отнесено къ правильному пятиугольнику, такъ какъ для этого построенія необходимо знать не только Пиѳагорову теорему, но и *золотое дѣленіе* прямой. Золотымъ дѣленіемъ прямой древніе называли дѣленіе ея на такія двѣ части, чтобы площадь квадрата, построеннаго на большемъ отрѣзкѣ, была равна площади прямоугольника, построеннаго на цѣлой прямой и другомъ меньшемъ ея отрѣзкѣ, т. е. дѣленіе прямой въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (Нач. Евк. кн. II, пред. 11).

Правильный *звѣздный пятиугольникъ* былъ также извѣстенъ Пиѳагору. По словамъ Аристофана, этимъ пятиугольникомъ пользовались Пиѳагорейцы какъ знакомъ, чтобы узнать одинъ другаго.

Если Пиѳагору принадлежитъ построеніе правильнаго пятиугольника, то ему принадлежитъ и построеніе додекаедра, такъ какъ быть не можетъ, чтобы Пиѳагоръ, много занимавшійся правильнымъ пятиугольникомъ, не пробовалъ построить додекаедръ. Это построеніе, очевидно, было сдѣлано въ послѣдніе годы его жизни. Изъ словъ Ямвлиха *) видно, что пиѳагореецъ Гиппій, послѣ смерти Пиѳагора приписалъ это открытіе себѣ, за что и былъ наказанъ богами.

Монтукла, изъ одного мѣста Діогена Лаертскаго, которое онъ не указываетъ, заключилъ, что Пиѳагору принадлежитъ задача объ *изопериметрахъ*: что кругъ между всѣми кривыми, имѣющими одинъ периметръ, за-

*) *Ямвлихъ*, философъ второй александрійской школы, жилъ въ началѣ IV в. по Р. Х., онъ былъ неоплатоникъ и занимался философіей Пиѳагора. Онъ написалъ нѣсколько сочиненій, но изъ нихъ почти всѣ утеряны, дошла до насъ его „жизнь Пиѳагора“, а также другое сочиненіе, въ которомъ много выписокъ изъ сочиненій Архита и Филолая. Современникомъ Ямвлиха былъ *Порфирій*, написавшій нѣсколько сочиненій по ариѳметикѣ и астрономіи, но эти сочиненія утеряны. Порфирій умеръ въ Римѣ въ 304 г.

ключаетъ наибольшую площадь, а шаръ между всѣми поверхностями, имѣющими одинаковыя поверхности, заключаетъ наибольшій объемъ. Мѣсто, о которомъ упоминаетъ Монтукла есть слѣдующее: „καὶ τῶν σχημάτων τὸ κάλλιστον σφαῖραν εἶναι τῶν στερεῶν, τῶν δὲ ἐπιπέδων κύκλον.“, т. е. „между тѣлами шаръ есть самое совершенное, а между плоскими фигурами—кругъ“. Очевидно, что объ изопериметрахъ здѣсь нѣтъ и рѣчи.

Замѣтимъ еще, что *Зенодоръ**), занимавшійся изопериметрами нѣсколько столѣтій позже, съ большимъ трудомъ доказалъ эту теорему относительно круга. Слѣдовательно о томъ, что Пиѳагору принадлежитъ задача о изопериметрахъ, не можетъ быть и рѣчи.

Пиѳагоръ много занимался пропорціями и прогрессіями, какъ ариѳметическими, такъ и геометрическими, и вѣроятно подобіемъ фигуръ, такъ какъ ему приписываютъ рѣшеніе задачи: „по даннымъ двумъ фигурамъ построить третью, которая была бы равна одной изъ данныхъ и подобна другой“, но положительныхъ данныхъ относительно этой части Геометріи нѣтъ.

Бросимъ теперь бѣглый взглядъ на состояніе Геометріи отъ Ѳалеса до смерти Пиѳагора. За этотъ періодъ времени Геометрія была возведена, въ особенности Пиѳагорейцами, въ чисто теоретическую науку. Элементарная часть Планиметріи, въ особенности типическія свойства треугольниковъ, параллелограммовъ и правильныхъ многоугольниковъ, была вполнѣ развита. Метрическая часть, съ помощью теоремъ сравненія площадей фигуръ и введеніемъ пропорціональности, а слѣдовательно и подобія, была возведена на степень, которая давала возможность дальнѣйшему быстрому развитію Геометріи, какъ увидимъ ниже.

Что-же касается круга, то въ пиѳагорейской школѣ ни одна замѣчательная теорема не была упомянута, такъ что напримѣръ теорема относительно угла вписаннаго и соотвѣтствующаго центральнаго не была извѣстна Гиппократу Хіосскому. Положены были первыя основанія теоріи несоизмѣримыхъ величинъ. Наконецъ, по Стереометріи были изслѣдованы свойства угловъ и правильныхъ тѣлъ, которыя хотя были Египтянамъ извѣстны, но научно изслѣдованы только Пиѳагоромъ.

Отъ Пиѳагора до Платона изслѣдованія геометровъ были сосредоточены на слѣдующихъ трехъ задачахъ:

1) Данную дугу круга или данный уголъ раздѣлить на произвольное число равныхъ частей?

2) Теоремы относительно преобразованія, дѣленія и измѣренія плоскихъ фигуръ перенести на тѣла, въ особенности задача относительно

*) *Зенодоръ* жилъ въ I в. по Р. X.

кубовъ, соотвѣтствующая задачѣ относительно квадратовъ. Эта послѣдняя задача ограничилась частнымъ случаемъ: *удвоеніемъ куба.*

3) Разысканіе площади круга или его частей.

Всѣ изслѣдованія геометровъ этого періода относятся къ этимъ тремъ задачамъ. Изслѣдованія эти и результаты этихъ изслѣдованій мы теперь изложимъ въ послѣдовательномъ порядкѣ.

Дѣленіе пополамъ какого нибудь угла или дуги круга есть одна изъ первыхъ задачъ Планиметріи и безъ сомнѣнія была уже извѣстна египетскимъ геометрамъ. Напротивъ дѣленіе угла на три части представляетъ большія трудности, такъ что до смерти Пиѳагора эта задача ограничивалась дѣленіемъ только прямаго угла на три равныя части.

Гиппій Элейскій. Первый геометръ, занимавшійся этой задачей, выходящей изъ области элементарной Геометріи (см. Нач. Евк. стр. 715) былъ *Гиппій Элейскій*, современникъ Сократа, *отецъ софистовъ*, жившій около 420 г. до Р. Х. въ Аѳинахъ. Проклъ въ своихъ комментаріяхъ говоритъ, что Гиппій нашелъ трансцендентную кривую, съ помощью которой каждый уголъ можно раздѣлить не только на нѣсколько равныхъ частей, но и на нѣсколько частей, находящихся между собою въ данномъ отношеніи. Эту кривую Паппусъ называетъ τετραγωνίζουσα, у насъ она извѣстна подъ именемъ *квадратриксы. Никомедъ* изобрѣлъ для той же цѣли кривую, которую онъ назвалъ *конхоидой.* Одна изъ этихъ кривыхъ, какъ мы выше замѣтили, трансцендентная, а другая алгебраическая 4-й степени.

Эти два примѣра показываютъ какъ вдругъ началъ расширятся горизонтъ геометрическихъ изслѣдованій. Здѣсь въ первый разъ является то, что древніе геометры назвали *геометрическимъ мѣстомъ*. Хотя опредѣленіе геометрическаго мѣста древніе геометры приписываютъ Платону, но ни въ одномъ изъ его сочиненій онъ не упоминаетъ объ этомъ. *Геометрическое мѣсто* есть непрерывный рядъ точекъ, каждая изъ которыхъ рѣшаетъ предложенный вопросъ, или рядъ точекъ удовлетворяющихъ извѣстному условію, которое не удовлетворяется ни одной точкой внѣ этого мѣста. Напримѣръ, геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ данномъ разстояніи отъ одной точки, есть окружность круга; геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ, есть перпендикуляръ, возставленный изъ средины прямой, соединяющей данныя двѣ точки; геометрическое мѣсто точекъ вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ данную площадь и построенныхъ на данномъ основаніи, есть прямая параллельная основанію. Такую концепцію мы видимъ въ квадратриксѣ Гиппія и конхоидѣ Никомеда, слѣдовательно имъ принадлежитъ открытіе геометрическихъ мѣстъ.

Вторая задача, которою занимались геометры послѣ Пиѳагора, есть *удвоеніе куба* Делійская задача *) (см. Нач. Евкл. Приб. XII, стр. 714). Пиѳагорейцы показали, что „площадь квадрата, построеннаго на діагонали квадрата, вдвое больше даннаго квадрата“, за этимъ они стали искать сторону куба, который бы имѣлъ объемъ вдвое больше объема даннаго куба. Они надѣялись, рѣшивъ эту задачу, складывать и вычитать объемы кубовъ, подобно тому, какъ Пиѳагорова теорема даетъ возможность складывать и вычитать площади квадратовъ.

Сначала эту задачу старались рѣшить стереометрически, пока *Гиппократъ Хіосскій* не свелъ ее на планиметрическую и въ такомъ видѣ она была предметомъ изслѣдованій многихъ геометровъ. Вотъ какъ Проклъ говоритъ объ этомъ въ своихъ комментаріяхъ „напримѣръ, задачу объ удвоеніи куба свели на другую, изъ которой она непосредственно вытекаетъ, именно нахожденіе двухъ средне-пропорціональныхъ, а оттуда, какъ найти,

---

*) Относительно происхожденія задачи *удвоенія куба,* существуетъ нѣсколько различныхъ разсказовъ. Вотъ что говоритъ Ератосѳенъ, въ комментаріяхъ Симплиція, на сочиненіе Архимеда „о шарѣ и цилиндрѣ“. однажды на островѣ Делосѣ была чума, жители этого острова обратились къ Дельфійскому оракулу, который отвѣтилъ, что для умилостивленія боговъ слѣдуетъ удвоить жертвенникъ Аполлона, который былъ кубической формы, весь изъ золота. Жители Делоса поставили два такихъ жертвенника, поставивъ одинъ сверхъ другаго, но чума не прекращалась, они снова обратились къ оракулу, который отвѣтилъ, что они не исполнили его приказанія: „удвоить жертвенникъ, не измѣняя его формы“. Не будучи въ состояніи исполнить такое приказаніе оракула, Делійцы обратились къ Платону за разрѣшеніемъ этого вопроса, Платонъ отвѣтилъ имъ съ насмѣшкой „вѣроятно боги вами недовольны за то, что вы мало занимаетесь Геометріей“, однако самъ Платонъ не съумѣлъ дать удовлетворительнаго отвѣта. Отсюда задача получила названіе *делійской*.

По другому разсказу, царь Минось велѣлъ воздвигнуть памятникъ своему сыну Главку; архитекторы дали памятнику форму куба, коего ребро равнялось 100 локтямъ, но Минось нашелъ этотъ памятникъ слишкомъ малымъ и велѣлъ его удвоить; архитекторы обратились къ геометрамъ, которые не съумѣли разрѣшить этотъ вопросъ и сильно имъ заинтересовались. Вопросомъ этимъ потомъ занимались много до Гиппократа, который показалъ первый, что задача эта сводится на „разысканіе двухъ средне-пропорціональныхъ“ между стороною даннаго куба и удвоенной этой стороной, т. е. къ исключенію y изъ двухъ пропорцій $a:x=x:y=y:2a$, что даетъ $x^3=2a^3$. Невозможность рѣшенія этой задачи, при помощи циркуля и линейки, видна изъ того, что задача эта сводится на извлеченіе кубическаго корня изъ 2. Именно: если означить ребро даннаго куба черезъ—a, искомаго черезъ—x, то объемъ искомаго куба будетъ равенъ $x^3=2a^3$ или $x=a\sqrt[3]{2}$, это будетъ выраженіе для ребра искомаго куба; такой корень возможно извлечь только по приближенію.

Нѣкоторые говорятъ, что Платонъ не будучи въ состояніи дать рѣшеніе этой задачи, объяснилъ ее такимъ образомъ, на основаніи припоминаемаго имъ изрѣченія египетскаго жреца Хонуфиса, что боги желаютъ, чтобы Греки вмѣсто того, чтобы заниматься кровавыми распрями между собою (Пелопонеская война), занялись бы лучше науками, а въ особенности математикой, тогда исчезнетъ чума.

по даннымъ двумъ прямымъ, двѣ средне-геометрическія прямыя. Такой оборотъ задачѣ далъ Гиппократъ Хіосскій, сквадратившій луночку и сдѣлавшій много другихъ геометрическихъ открытій".

Пріемъ Гиппократа состоитъ въ слѣдующемъ, онъ составляетъ слѣдующую пропорцію:

$$a:x=x:y=y:b$$

откуда:

$$a:x=a:x$$

$$a:x=x:y$$

$$a:x=y:b$$

перемножая, найдемъ:

$$x^3:a^3=b:a$$

Давая прямой b, относительно a, различныя величины можно не только удвоить кубъ, но и найти кубъ какой угодно кратности.

Пытался-ли Гиппократъ рѣшить задачу въ этомъ видѣ намъ неизвѣстно, такъ какъ приведенное выше мѣсто, изъ комментарія Прокла, есть единственное относительно того, что сдѣлалъ Гиппократъ. Какъ въ то время, такъ и въ настоящее такое преобразованіе задачи очень важно, такъ какъ только въ такомъ видѣ она допускаетъ дѣйствительное геометрическое построеніе.

Архитъ, родившійся около 430 г. до Р. Х., какъ полагаютъ, былъ ученикомъ пиѳагорейца Филолая, друга Платона; онъ занимался также делійской задачей и рѣшилъ ее съ помощью кривой въ пространствѣ, съ двойной кривизной. Описаніе построенія этой кривой мы находимъ въ комментаріяхъ Евтокія, которое онъ приводитъ изъ „Исторіи Геометріи" Евдема.

„Пусть AB и C будутъ двѣ данныя прямыя, найти двѣ средне-пропорціональныхъ между ними? На большей AB, какъ на діаметрѣ, пусть будетъ описанъ кругъ $ADBE$ и отложена хорда $AD=C$, которая, будучи продолжена, встрѣчаетъ касательную къ кругу, въ точкѣ B, въ точкѣ P. Чрезъ точку D проведена $DFE \parallel PB$. Вообразимъ теперь прямой полуцилиндръ, имѣющій основаніемъ полукругъ ADB и полукругъ на AB, коего плоскость перпендикулярна къ плоскости основанія цилиндра. Пусть этотъ послѣдній полукругъ вращается около неподвижной точки A, въ этомъ движеніи онъ будетъ встрѣчать поверхность цилиндра въ точкахъ, которыя образуютъ кривую Пусть треугольникъ APB вращается около BP, въ этомъ движеніи онъ образуетъ конусъ, котораго пересѣченіе съ цилиндромъ образуетъ вторую кривую, пересѣченіе этихъ двухъ кривыхъ даетъ точку, которая и рѣшаетъ задачу".

Я не стану приводить дальше это мѣсто Евтокія, потому, что намъ не важно рѣшеніе задачи, а важенъ пріемъ, который указываетъ, что уже въ то время занимались кривыми, полученными пересѣченіемъ поверхностей. Судя по этому рѣшенію, можно пожалѣть, что другія геометрическія изслѣдованія Архита до насъ не дошли. Древніе приписываютъ Архиту первому приложеніе Геометріи къ механикѣ и что онъ первый положилъ начало раціональной Механикѣ; ему приписываютъ устройство голубя, который леталъ. Но замѣчательно, что онъ опредѣлилъ величину безконечно-большую такъ какъ мы ее теперь опредѣляемъ: „Если я предположу, спрашиваетъ себя Архитъ, что я нахожусь на предѣлѣ вселенной, то могу-ли я достать рукой или тростью внѣ вселенной? Сказать, что я не могу будетъ нелѣпо, но если я могу, то есть нѣчто внѣ вселенной—или тѣло, или мѣсто. И какъ-бы мы не разсуждали, тотъ же вопросъ представится всегда и если есть нѣчто, что можно достать тростью, то безконечность существуетъ. Если это тѣло, то наше предложеніе доказано. Но если это мѣсто, то въ немъ находиться тѣло, или можетъ находиться, слѣдовательно если мѣсто существуетъ, то его необходимо внести въ число вѣчнаго бытія и тогда безконечность будетъ или тѣло или мѣсто". Это разсужденіе переведенное на нашъ математическій языкъ значитъ: безконечно большая величина есть величина болѣе всякой данной величины, а безконечно малая—менѣе всякой данной величины.

Третья задача, которою, отъ Пиѳагора до Платона, занимались почти всѣ геометры, есть знаменитая задача, извѣстная подъ именемъ, *квадратуры круга*. Самая простѣйшая и всѣмъ извѣстная кривая линія есть кругъ. Безъ сомнѣнія на нее было обращено вниманіе геометровъ въ самый ранній періодъ развитія Геометріи и найдены нѣкоторыя ея свойства, такъ напримѣръ, уже Ѳалесу или Іонійской школѣ приписываютъ открытіе, что уголъ вписанный въ полукругъ есть прямой, но еще Гиппократъ Хіосскій не зналъ зависимости между вписаннымъ въ кругъ угломъ и между соотвѣтствующимъ ему центральнымъ угломъ. Но Гиппократу было уже извѣстно, какъ увидимъ изъ его *луночекъ*, что площади круговъ относятся между собою какъ квадраты діаметровъ или радіусовъ, а площади подобныхъ сегментовъ какъ квадраты ихъ хордъ. Если эти свойства круга были извѣстны, то было извѣстно, что отношеніе площади круга къ квадрату его діаметра или радіуса есть величина постоянная, а также было извѣстно, что и отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная. Далѣе, было извѣстно, что площадь круга равна площади прямоугольника, коего основаніе есть длина окружности, а высота половина радіуса. Слѣдовательно, чтобы сдѣлать предъидущее построеніе, необходимо было рѣшить слѣдующія двѣ задачи:

1) По данному радіусу круга построить длину окружности, т. е. найти сколько разъ радіусъ, принятый за единицу, содержится въ окружности?

2) По данному радіусу круга построить квадратъ, коего площадь равна площади круга, или найти сколько разъ квадратъ, построенный на радіусѣ, содержится въ площади круга?

Эти двѣ задачи такъ тѣсно связаны между собою, что рѣшеніе одной изъ нихъ влечетъ за собою рѣшеніе другой. Первая попытка греческихъ геометровъ была рѣшить эту задачу во второмъ смыслѣ, и поэтому она сдѣлалась извѣстною подъ именемъ *квадратуры круга*.

Первый изъ геометровъ, занимавшійся квадратурой круга, былъ *Анаксагоръ*; посаженный въ тюрьму за безбожіе, онъ написалъ тамъ цѣлое сочиненіе „о квадратурѣ круга“, которое до насъ не дошло, но, по отзыву Платона, было замѣчательное; вѣроятно въ немъ были указаны всѣ трудности, которыя представляетъ эта задача.

Въ этотъ періодъ, какъ узнаемъ, изъ комедіи Аристофана „Птицы“, въ которой онъ смѣется надъ искателями квадратуры круга, геометры занимались весьма усердно этой задачей.

Гиппократъ Хіосскій. Первый изъ геометровъ, сдѣлавшій замѣчательный шагъ къ рѣшенію этой задачи былъ *Гиппократъ Хіосскій* *), жившій около 440 г. до Р. Х.; онъ составляетъ переходъ отъ Пиѳагоровой школы къ Платоновой. По словамъ Аристотеля, онъ былъ хорошій геометръ, но человѣкъ не далекій. Гиппократъ былъ исключенъ пиѳагорейцами изъ своей среды, за то что онъ преподавалъ Геометрію за деньги, что воспрещалось правилами общества; это сообщаетъ Ямвлихъ. Гиппократъ написалъ также „Элементы Геометріи“, которые до насъ не дошли.

Гиппократъ первый показалъ, что площадь *луночки*, т. е. площадь ограниченная двумя дугами круговъ, равна площади прямолинейной фигуры; открытіе для того времени замѣчательное, тѣмъ болѣе, что послѣ многихъ усилій, сдѣланныхъ для построенія квадрата, коего бы площадь была равна площади круга, начинали думать, что вообще нельзя построить прямолинейной фигуры, коей бы площадь была равна площади фигуры, ограниченной кривыми линіями. Это онъ сдѣлалъ слѣдующимъ образомъ:

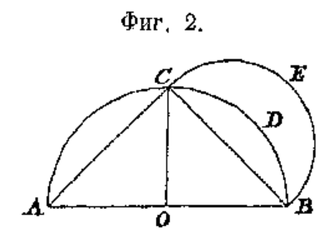
На прямой AB, какъ на діаметрѣ (фиг. 2), онъ строитъ полукругъ ACB, изъ средины O прямой AB, т. е. изъ центра круга, возставимъ перпендикуляръ OC къ діаметру AB и соединимъ точку C съ B, прямая CB будетъ сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ, а треугольникъ ACB будетъ

---

*) Гиппократа Хіосскаго не надо смѣшивать съ Гиппократомъ знаменитымъ врачемъ, родомъ съ острова Коса (одинъ изъ Спорадскихъ острововъ), онъ жилъ около 460 г. до Р. Х.

половина этого квадрата; на прямой CB, какъ на діаметрѣ, опишемъ еще полукругъ CEB.

Фиг. 2.



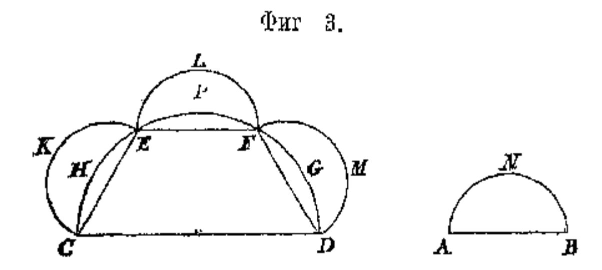
Такъ какъ $\square AB = \square AC + \square BC = 2\square AC$ (кн. I, пред. 47), а площади круговъ относятся между собою какъ квадраты изъ ихъ діаметровъ (см. „Начала Евклида", примѣч. 17, пред. d), то изъ этого слѣдуетъ, что площадь полукруга ACB, равна удвоенной площади полукруга CEB. Но секторъ OCB есть четверть окружности или половина половины, слѣдовательно секторъ OCB равенъ площади полукруга CEB. Отнимая отъ этихъ равныхъ величинъ общій имъ сегментъ CDB, найдемъ, что треугольникъ COB равенъ луночкѣ $CDBE$. Наконецъ можно построить квадратъ, коего площадь будетъ равна площади треугольника COB, а слѣдовательно, будетъ равна и площади луночки $CDBE$.

Симплицій далѣе приводитъ выписку изъ „Исторіи Геометріи" Евдема, какимъ образомъ Гиппократъ построилъ прямолинейную площадь, равную площади круга, но греческій текстъ въ этой выпискѣ неясенъ, и по всему видно измѣненъ, но въ настоящее время возстановленъ Бретшнейдеромъ въ сочиненіи „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides".

Вотъ въ чемъ дѣло. Гиппократъ, найдя квадратуру луночки, думалъ найти квадратуру круга слѣдующимъ образомъ:

На прямой AB, какъ на діаметрѣ (фиг. 3), построимъ полукругъ;

Фиг 3.



возьмемъ $CD = 2AB$ и, какъ на діаметрѣ, построимъ полукругъ на CD, въ полукругъ этотъ впишемъ шестиугольникъ, коего стороны CE, EF, FD будутъ, очевидно, равны прямой AB, на сторонахъ CE, EF, FD постро-

имъ полукруги *CKE*, *ELF*, *FMD*, которые будутъ равны полукругу построенному на *AB*.

Такъ какъ полукруги *CKE*, *ELF*, *FMD*, *ANB* всѣ равны, то сумма ихъ равна четырежды взятому полукругу *ANB*. Но $CD=2AB$, а площади круговъ относятся какъ квадраты діаметровъ, слѣдовательно полукругъ $CEFD:ANB=4:1$, т. е. полукругъ $CEFD=4ANB$, или полукругъ *CEFD* равенъ суммѣ трехъ полукруговъ *CKE*, *ELF*, *FMD* и полукругу *ANB*, если отымемъ три сегмента *CHE*, *EPF* и *FGD* общіе, какъ полукругу *CEFD*, такъ и полукругамъ *CKE*, *ELF* и *FMD*, то найдемъ, что площадь трапеціи *CEFD* равна площадямъ трехъ луночекъ съ площадью полукруга *ANB*, слѣдовательно площадь полукруга *ANB* равна площади трапеціи *CEFD* безъ трехъ луночекъ *CKEH*, *ELFP*, *FMDG*; но мы можемъ построить квадратъ, коего площадь равна суммѣ площадей трехъ луночекъ, слѣдовательно, площадь круга, построеннаго на *AB*, какъ на діаметрѣ, равна удвоенной разности двухъ прямолинейныхъ площадей, именно трапеціи *CEFD* и площади квадрата равнаго суммѣ площадей трехъ выше упомянутыхъ луночекъ. Но такъ какъ это послѣдняя прямолинейная площадь можетъ быть обращена въ квадратъ, то площадь этого квадрата и будетъ равна площади круга *ANB*.

Далѣе Евдемъ замѣчаетъ что хотя это остроумно, но невѣрно и показываетъ почему, именно эти луночки построенны не на катетахъ прямоугольнаго треугольника, а на сторонахъ трапеціи, слѣдовательно къ нимъ нельзя приложить свойство, доказанное Гиппократомъ.

Лакруа (Lacroix, въ своемъ изданіи: „Histoire des récherches sur la quadrature du cercle, par Montucla“, говоритъ, что не смотря на свидѣтельство историковъ, онъ не вѣритъ, чтобы такой геометръ какъ Гиппократъ впалъ въ такую грубую ошибку.

Изъ изслѣдованій Гиппократа, которыя мы приведемъ ниже, нельзя думать, что Гиппократъ впалъ въ такую грубую ошибку относительно приведенной выше квадратуры круга, слѣдовательно онъ не заслуживаетъ того упрека, который сдѣлалъ ему Аристотель, что онъ по ошибкѣ возможность квадратуры луночки, построенной на сторонѣ квадрата, совершенно необдуманно примѣнилъ къ квадратурѣ луночки, построенной на сторонѣ шестиугольника. Весьма вѣроятно предположеніе Бретшнейдера, который полагаетъ, что Гиппократъ выразился слѣдующимъ образомъ: „если квадратура луночки, построенной на сторонѣ шестиугольника возможна, то и квадратура круга также возможна“. Аристотель, поверхностно знакомый съ математикой, понялъ мнѣніе Гиппократа въ утвердительномъ смыслѣ.

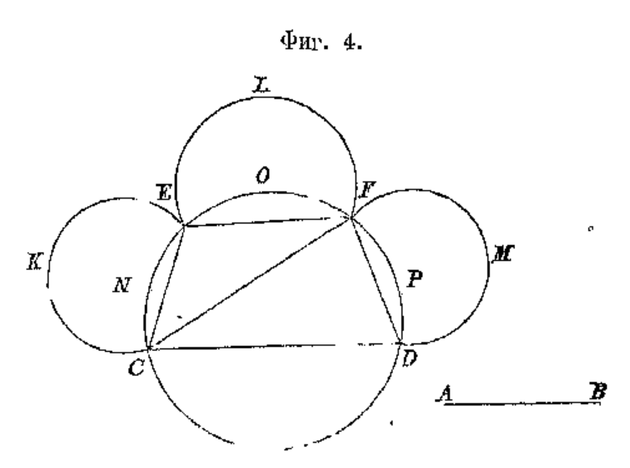
Изслѣдованія эти передалъ намъ Симпликій изъ „Исторіи Геометріи“ Евдема, но въ такой искаженной формѣ, вѣроятно переписчиками, что

Бретшнейдеру стоило большаго труда возстановить этотъ отрывокъ и вѣроятно по этой причинѣ онъ до сихъ поръ оставался неизвѣстнымъ геометрамъ. Изъ переданнаго Симпликіемъ можно заключить, что Евдемъ передалъ въ своей „Исторіи Геометріи", въ очень краткой формѣ, эти изслѣдованія Гиппократа, такъ какъ Симпликій вездѣ ссылается на „Начала" Евклида, слѣдовательно онъ пояснялъ сказанное Евдемомъ. Несмотря на это, вторая часть изслѣдованія такъ темна и неполна, что только можно догадаться въ чемъ дѣло.

Замѣтимъ сначала, что Гиппократъ нашелъ площадь луночки, въ коей внѣшняя сторона есть полуокружность, а за тѣмъ онъ показываетъ, какъ найти площадь луночки, во первыхъ такой, въ которой внѣшняя сторона больше полуокружности, и во вторыхъ такой, въ которой внѣшняя сторона меньше полуокружности. Я передамъ эти изслѣдованія вкратцѣ.

1) Гиппократъ беретъ прямую AB и строитъ другую прямую CD такъ, чтобы $\square CD = 3\square AB$. На прямой CD строитъ трапецію, коей три остальныя стороны были-бы равны каждая прямой AB. Пусть такая трапеція будетъ $CEFD$ (фиг. 4).

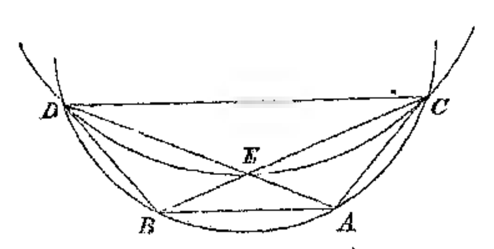
Фиг. 4.



Очевидно, что около такой трапеціи можно описать кругъ и показать, что сегментъ $CEFD$ больше полуокружности, т. е. что уголъ CFD есть острый. Затѣмъ на сторонахъ CE, EF, FD онъ описываетъ сегменты, подобные сегменту $CEFD$. Извѣстно, что площади подобныхъ сегментовъ относятся между собою какъ квадраты ихъ основаній, слѣдовательно сегментъ $CEFD$ равенъ тремъ сегментамъ $CKE + ELF + FMD$, если теперь вычтемъ три сегмента CNE, EOF, FPD, то получимъ, что площадь трапеціи $CEFD$ равна тремъ площадямъ луночки CKE. Откуда площадь луночки $CKEN$ равна площади прямолинейной фигуры, т. е. одной трети трапеціи $CEFD$.

2) Гиппократъ беретъ прямую AB и на ней строитъ трапецію $ABCD$ (фиг. 5), въ которой бы стороны DB, AB, AC были равны и чтобы большая часть CE, діагонали BC, относилась къ сторонѣ AB, какъ $\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Построивъ такую трапецію, онъ описываетъ около нея кругъ и доказываетъ, что сегментъ $DBAC$ меньше полукруга, затѣмъ описываетъ кругъ около треугольника DEC и показываетъ, что сумма двухъ сегментовъ на CE и ED равна суммѣ трехъ сегментовъ на DB, BA и AC. Показавъ это, онъ беретъ луночку $DBACE$ и отнявъ отъ нея сегменты, построенные на DB, BA и

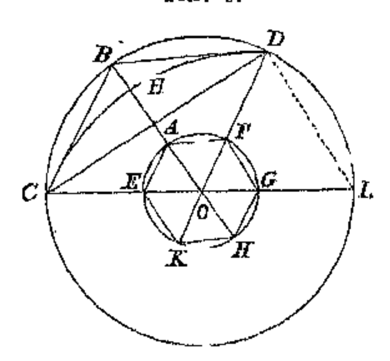
Фиг. 5.



AC, прибавляетъ равные имъ сегменты, построенные на CE и ED, и такимъ образомъ получаетъ, что площадь луночки $DBACE$ равна площади пятиугольника $DBACE$.

3) Наконецъ Гиппократъ строитъ прямолинейную площадь, которая равна площади даннаго круга и площади луночки. Для этого около даннаго круга, коего радіусъ есть OA, онъ описываетъ концентрическій кругъ, коего радіусъ OB находится въ такой зависимости, что $\square OB = 6 \square OA$; затѣмъ вписываетъ въ данный кругъ шестиугольникъ и продолжаетъ стороны OE, OA, OF до встрѣчи съ внѣшнимъ кругомъ, въ точкахъ C, B, D, проводитъ (фиг. 6) прямыя CB, BD, CD; CB и BD будутъ стороны шестиугольника,

Фиг. 6.



а CD будетъ сторона треугольника. На CD описываетъ сегментъ $CHDC$ подоб-

ный сегментамъ, построеннымъ на CB и BD. Изъ построенія легко видѣть, что сег. CB=6 сег. AE, а сег. CD = 3 сег. CB. Если отъ сегмента CBD отнимемъ сегментъ, построенный на CD, то получимъ луночку $CBDH$, а это все равно, что отъ сегмента CBD отнять сег. CB+сег. BD, и еще такой же, что даетъ:

$$\triangle CBD - \text{сег. } CB = \triangle CBD - 6 \text{ сег. } AE.$$

Слѣдовательно:

$$\text{луноч. } CBDH = \triangle CBD - 6 \text{ сег. } AE$$

или

$$\text{луночка } CBDH + 6 \text{ сег. } AE = \triangle CBD$$

придадимъ по шестиугольнику $AFGHKE$, то получимъ:

$$\text{луноч. } CBDH + \text{площ. кр. } AFG = \triangle CBD + \text{шест. } AFGHKE.$$

Я привелъ эти послѣднія изслѣдованія Гиппократа, во первыхъ потому, чтобы показать, что возведенное на него обвиненіе относительно квадратуры круга не можетъ имѣть мѣста, а во вторыхъ они освѣщаютъ состояніе Геометріи около 440 г. до Р. Х., т. е. въ срединѣ промежутка времени между смертью Пиѳагора и открытіемъ Академіи Платономъ.

Изслѣдованія Гиппократа показываютъ въ немъ необыкновенный геометрическій умъ при тогдашнемъ состояніи Геометріи, и вмѣстѣ съ тѣмъ показываютъ, что упрекъ сдѣланный ему Аристотелемъ несправедливъ. Гиппократъ только показалъ, какъ квадратура круга могла-бы быть найдена, если бы квадратура луночекъ, построенныхъ на сторонахъ шестиугольника, была бы возможна.

Евдемъ говоритъ, что такимъ образомъ Гиппократъ могъ построить квадратуру всякой луночки, но Симпликій говоритъ, что Гиппократъ этого не думалъ, такъ какъ онъ показываетъ еще, какъ найти квадратуру цѣлаго круга и луночки. Евдемъ говоритъ, что Гиппократомъ для доказательства своей квадратуры были доказаны, въ его сочиненіи, слѣдующія вспомогательныя теоремы:

1) Вписанный въ полукругъ уголъ есть прямой; вписанный въ сегментъ большій полуокружности—острый, а вписанный въ сегментъ меньшій полуокружности—тупой.

2) Площади круговъ относятся между собою какъ площади квадратовъ, построенныхъ на діаметрахъ.

3) Площади подобныхъ сегментовъ относятся какъ площади квадратовъ, построенныхъ на ихъ хордахъ.

Первая изъ этихъ теоремъ предполагаетъ знаніе зависимости между вписаннымъ и соотвѣтствующимъ ему центральнымъ углами, но изъ того, что передано о Гиппократѣ не видно, чтобы онъ зналъ эту зависимость,

Мы видѣли, что уже Египтянамъ было извѣстно, что уголъ, вписанный въ полукругъ, есть прямой, а какъ они доказали эту истину изъ простѣйшихъ свойствъ треугольниковъ прямоугольнаго и равнобедреннаго, это изложено Евклидомъ въ 3-й книгѣ „Началъ", въ 31-мъ предложеніи. Какъ только это было доказано, то легко уже видѣть, что уголъ вписанный въ сегментъ большій полуокружности есть острый, а въ меньшій тупой. На этомъ-то собственно и основывается Гиппократъ въ своихъ изслѣдованіяхъ, и хотя отъ этихъ истинъ небольшой переходъ къ заключенію, что углы, вписанные въ одинъ сегментъ, равны, однако не видно, чтобы Гиппократъ зналъ это.

Хотя Евдемъ говоритъ, что означенныя истины были доказаны Гиппократомъ, но можно думать, что онъ или только отчасти доказалъ ихъ, или онѣ были доказаны прежде, а онъ внесъ ихъ въ свое сочиненіе для полноты. Чтоже касается теоремы: что площади круговъ относятся какъ квадраты діаметровъ ихъ, а подобные сегменты какъ квадраты ихъ хордъ, то онѣ безспорно принадлежатъ Гиппократу; теорему эту онъ распространилъ и на правильные многоугольники. Евдемъ замѣчаетъ, что Гиппократъ подобными сегментами называетъ такіе, которые составляютъ одинаковую часть ихъ круговъ и прибавляетъ, что подобные сегменты заключаютъ равные углы. Нѣтъ сомнѣнія, что это опредѣленіе принадлежитъ Гиппократу, но опредѣленіе, что подобные сегменты заключаютъ равные углы, могло принадлежать Гиппократу и могло быть прибавлено Евдемомъ для поясненія. У Евклида подобные сегменты опредѣлены, какъ такіе, которые заключаютъ равные углы.

Изъ изслѣдованій квадратуры луночекъ Гиппократа слѣдуетъ, что онъ необходимо долженъ былъ знать рѣшеніе задачи: „на данной прямой, какъ на хордѣ, описать сегментъ подобный данному сегменту"? Для этого требовалось только построить на хордѣ, какъ на основаніи, равнобедренный треугольникъ, который былъ-бы подобенъ вписанному въ данный сегментъ. Въ изслѣдованіяхъ Гиппократа о луночкахъ мы находимъ группу теоремъ и задачъ, которыя составляли въ то время Элементы Геометріи, а его собственныя открытія показываютъ, что онъ былъ одинъ изъ замѣчательнѣйшихъ геометровъ своего времени. Замѣчательно также, что въ его изслѣдованіяхъ мы находимъ приложеніе Пиѳагоровой теоремы къ остроугольному и тупоугольному треугольникамъ, но оно встрѣчалось уже и до него: я говорю о теоремахъ 12-й и 13-й второй книги „Началъ" Евклида, которыя дѣлаютъ возможнымъ опредѣленіе числовой зависимости между углами и сторонами треугольника.

Изъ всего предъидущаго можно видѣть въ какомъ состояніи была Геометрія около 450 году до Р. Х. Планиметрія въ своихъ элементарныхъ частяхъ была нѣкоторымъ образомъ закончена; для полноты недоставало окончательнаго развитія нѣкоторыхъ частей, каково, напримѣръ, подобіе

фигуръ, основанное на свойствахъ пропорцій, которыя были строго доказаны только для раціональныхъ отношеній и просто распространялись на величины ирраціональныя. Вообще всѣ числовыя теоремы Планиметріи были найдены и могли служить къ дальнѣйшему развитію и открытію теоремъ. Замѣтимъ еще, что форма изложенія не совсѣмъ удобная, часто неясная, очень растянута, а поэтому утомительна. Что же касается Стереометріи, то въ этотъ періодъ времени она не много подвинулась. Одно только замѣчательно, что стереометрическая задача удвоеніе куба была сведена Гиппократомъ на планиметрическую.

Антифонъ, по словамъ Евдема, приводимымъ Симпликіемъ, разсматривалъ кругъ какъ многоугольникъ, состоящій изъ безчисленнаго числа сторонъ. Сначала онъ вписывалъ въ кругъ квадратъ, затѣмъ восьмиугольникъ и т. д., постоянно удваивая число сторонъ, причемъ замѣчаетъ, что такое дѣйствіе надо продолжать до тѣхъ поръ пока площадь многоугольника не исчерпаетъ всю площадь круга; наконецъ онъ дѣлаетъ слѣдующее заключеніе: что „такъ какъ каждому вписанному многоугольнику можно построить равный ему квадратъ, то слѣдовательно можно построить квадратъ, коего площадь равна площади круга". Это вѣрно, но какъ построить?

Пріемъ Антифона нашелъ возраженіе со стороны Евдема, который показалъ, что сторона описаннаго многоугольника касается круга въ одной точкѣ, а вписаннаго въ двухъ, и что „невозможно измѣрить круговую дугу, прикладывая къ ней прямую линію". По словамъ другаго комментатора Аристотеля, именно Темистія*), Антифонъ прилагалъ свои разсужденія не къ квадрату, а равностороннему треугольнику, вписанному въ кругъ. Но комментаторъ не говоритъ, разсматривалъ-ли Антифонъ площадь круга какъ равную площади треугольника, коего основаніе окружность, а высота радіусъ этого круга. Это собственно говоря не есть уже квадратура круга, но преобразованіе круга въ прямолинейную фигуру.

Въ разсужденіи Антифона можно видѣть первый зародышъ *метода предѣловъ*, который, спустя полтора вѣка, ясно былъ формулированъ Архимедомъ и далъ такіе блестящіе результаты. Антифонъ былъ современникъ Сократа.

Брисонъ (Βρύσωνος) утверждалъ, что площадь круга есть средне пропорціональная между площадями вписаннаго и описаннаго квадратовъ, но это очевидная нелѣпость, такъ какъ между площадями вписаннаго и описаннаго квадратовъ, средне-пропорціональная есть площадь вписаннаго восьмиугольника и вообще между площадями правильныхъ вписаннаго и опи-

*) *Темистій* византійскій писатель IV в. Онъ написалъ много сочиненій; болѣе извѣстны его комментаріи къ сочиненіямъ Аристотеля.

саннаго многоугольниковъ средне-пропорціональная есть площадь вписаннаго многоугольника съ удвоеннымъ числомъ сторонъ.

Время когда жилъ Брисонъ точно неизвѣстно, полагаютъ въ срединѣ V вѣка до Р. Х.; вѣроятно онъ былъ пиѳагореецъ.

Платоновская школа.

Платонъ, основатель знаменитой *Академіи* въ Аѳинахъ, былъ ученикъ Сократа, соученикъ Алкивіада и современникъ Перикла, онъ родился въ Аѳинахъ въ 429 г. до Р. Х. и умеръ въ 348 г. *). Одаренный отъ природы блестящими способностями, онъ, подъ руководствомъ своего учителя Сократа, дѣлалъ быстрые успѣхи въ изученіи философіи, но вмѣстѣ съ тѣмъ, подъ вліяніемъ этическаго направленія сократовскаго ученія, онъ получилъ стремленіе ко всему идеальному, по возможности совершенному, что не мало способствовало тому высокому положенію, которое онъ занялъ среди своихъ современниковъ, и оказало такое сильное вліяніе на дальнѣйшее развитіе философіи вообще.

По мѣрѣ того какъ Геометрія слагалась въ науку, когда основательное изученіе ея становилось необходимымъ, Геометрія дѣлалась предметомъ нападокъ со стороны тѣхъ, которые считали своимъ назначеніемъ о всемъ высказывать свое мнѣніе, даже о тѣхъ предметахъ, о которыхъ они не имѣли понятія. Узкій взглядъ на точныя науки, который имѣютъ, къ сожалѣнію, многіе изъ такъ называемыхъ гуманистовъ настоящаго времени, вы-

---

*) Въ молодости своей Платонъ занимался поэзіей; безъ сомнѣнія краснорѣчіе Перикла имѣло большое вліяніе на Платона. На 20 году Платонъ познакомился съ Сократомъ и сталъ заниматься философіей, сначала онъ изучалъ ученія іонійской школы и элеатовъ, но ни ученія софистовъ, ни направленіе іонійской школы не могли его удовлетворить. Послѣ смерти своего учителя, Платонъ отправился изъ Аѳинъ въ Мегару, къ Евклиду, основавшему *мегарскую школу;* въ этой школѣ онъ оставался недолго, а отправился въ Италію, гдѣ воспользовался съ успѣхомъ ученіями пиѳагорейцевъ Архита и Тимея. Изъ Италіи Платонъ отправился въ Африку, гдѣ въ Киренѣ слушалъ философовъ *Ѳеодора* и *Протагора*, послѣ этого онъ отправился въ Египетъ, а оттуда, по словамъ нѣкоторыхъ отцевъ церкви, въ Персію, гдѣ изучалъ науки у маговъ. Послѣ десяти лѣтъ странствованій Платонъ возвратился въ Аѳины, около 390 г. Но въ Аѳинахъ Платонъ оставался недолго, онъ снова отправился въ южную Италію, а оттуда въ Сицилію, гдѣ его ученикъ Діонъ представилъ его сиракузскому тирану Діонисію Старшему; сначала Діонисій принялъ его хорошо, но потомъ онъ едва не былъ казненъ, по повелѣнію Діонисія, за то что онъ позволилъ себѣ сдѣлать нѣсколько замѣчаній, по поводу образа жизни послѣдняго. Только благодаря стараніямъ Діона онъ избѣгнулъ смерти, но былъ проданъ въ рабство, впослѣдствіи его выкупилъ Діонъ. Въ 388 г. Платонъ основалъ „Академію" въ Аѳинахъ; въ которой онъ преподавалъ въ продолженіи 20 лѣтъ. Послѣ того, онъ снова отправился въ Сицилію, гдѣ едва не сдѣлался жертвою Діонисія Младшаго; изъ Сициліи Платонъ возвратился въ Аѳины, гдѣ умеръ восьмидесяти одного года отъ роду.

казывался уже во время Платона. Не только софисты и демагоги, но даже самъ Сократъ, относились неблагосклонно къ изученію точныхъ наукъ. Математику, астрономію и точныя науки вообще, по мнѣнію Сократа, слѣдуетъ изучать только на столько, на сколько онѣ необходимы въ практической жизни, всякое же болѣе основательное ознакомленіе съ этими науками, Сократъ считалъ не только безполезнымъ, но даже вреднымъ. Одною изъ самыхъ важныхъ заслугъ Платона останется всегда то, что онъ своимъ примѣромъ и ученіемъ совершенно почти вытѣснилъ господствовавшее мнѣніе о безполезности изученія математики и возвелъ въ правило, что изученіе математики необходимо для всякаго образованнаго человѣка, и что для каждаго философа необходимо прежде всего быть основательно знакомымъ съ математическими науками *). Платонъ говоритъ: „изученіе математики отвлекаетъ умъ человѣка отъ всего матеріальнаго и дѣлаетъ его способнымъ понимать идеальное". Подобное воззрѣніе существовало и до Платона, мы знаемъ, что въ пиѳагоровой школѣ проявилось такое же направленіе; но главная заслуга Платона та, что онъ высказанный имъ взглядъ осуществилъ на дѣлѣ и тѣмъ положилъ начало правильному изученію математики, сдѣлавъ ее однимъ изъ основныхъ предметовъ высшаго образованія, не только для своего, но и для всего послѣдующаго времени. Только благодаря авторитету Платона всегда, даже во времена самаго узкаго гуманистическаго направленія, математикѣ было отведено, хотя незначительное мѣсто, въ школьномъ преподаваніи. Мнѣніе Платона „о педагогическомъ значеніи математики", сохранилось и до настоящаго времени въ часто повторяемой, избитой фразѣ, „ея несомнѣнной пользѣ". Платонъ не написалъ ни одного сочиненія чисто математическаго содержанія, но воззрѣнія его на математику и его астрономическія взгляды разсѣяны главнымъ образомъ въ „Тимеѣ", „Государствѣ" и „Епиномидѣ". Ученіе и сношенія съ пиѳагорейцами имѣли большое вліяніе на умственное развитіе Платона, но онъ имѣлъ слишкомъ правильный и здравый умъ, чтобы придать значеніе символистическимъ и мистическимъ воззрѣніямъ пиѳагорейцевъ; за то онъ вполнѣ ясно понялъ и оцѣнилъ высокое значеніе точныхъ наукъ, впервые высказанное Пиѳагоромъ, именно наукъ математическихъ, какъ введеніе ко всякому отвлеченному мышленію и какъ основанія спекулятивныхъ познаній.

Съ Платона и основанной имъ школы, начинается новый періодъ развитія математики, въ которыя она превзошла Пиѳагорову школу, на сколько эта послѣдняя превзошла Іоническую. Элементы Планиметріи пополняются и расширяются по всѣмъ направленіямъ, Стереометрія только частію;

---

*) Къ сожалѣнію и въ настоящее время основательное знакомство философовъ съ математикой явленіе весьма рѣдкое.

является высшая или *трансцендентная* Геометрія—это теорія *коническихъ сѣченій* и другихъ кривыхъ линій. Едва была открыта Платономъ Академія въ 388 г. до Р. Х., какъ она дѣлается общимъ центромъ куда стекались философы и геометры, старые и молодые, одни учиться, другіе сообщить результаты собственныхъ изслѣдованій. Изъ старыхъ геометровъ членами Академіи были: *Архитъ* изъ Тарента, *Леодамъ* изъ Тасоса и *Теететъ* изъ Аѳинъ; изъ молодыхъ сверстниковъ Платона, которые вмѣстѣ съ нимъ, въ короткое время, общими усиліями подвинули впередъ Геометрію, въ ней были: *Неоклидъ, Леонъ, Евдоксъ, Амиклъ* изъ Гераклеи и братья *Менайхмъ* и *Дейностратъ, Теодій* изъ Магнезіи, *Кизикенъ* изъ Аѳинъ, *Гармоній* изъ Колофона, *Филиппъ* изъ Менды и *Филиппъ* изъ Опуса, *Аристай, Автоликъ, Онеозипъ, Ксенократъ, Аристотель* и многіе другіе. Исключая Автолика, отъ котораго дошли до насъ два небольшія сочиненія *), всѣхъ вышеупомянутыхъ геометровъ мы знаемъ только изъ комментарій Прокла и Евтокія, все же написанное ими до насъ не дошло.

По извѣстіямъ древнихъ писателей самъ Платонъ принадлежалъ къ числу замѣчательныхъ геометровъ, и хотя по Геометріи самъ ничего не писалъ, но въ своихъ сочиненіяхъ часто говорилъ о математикѣ **); въ сочиненіи „Государство", онъ говоритъ, что необходимыми предметами изученія должны быть: Ариѳметика, Логистика, Геометрія, Стереометрія, Астрономія и Гармоника. Вотъ что древніе приписываютъ Платону.

1) Способъ находить стороны прямоугольнаго треугольника въ раціональныхъ числахъ: объ этомъ сообщаетъ Проклъ въ своихъ комментаріяхъ къ „Началамъ" Евклида. Какимъ образомъ онъ нашелъ этотъ способъ Проклъ не передаетъ, но можно предполагать, что онъ это сдѣлалъ такъ какъ мы показали выше, говоря о способѣ Пиѳагора.

2) Устроилъ инструментъ, съ помощью котораго механически рѣшается вопросъ о нахожденіи двухъ средне-пропорціональныхъ прямыхъ между двумя данными. Описаніе этого инструмента мы находимъ въ комментаріяхъ Евтокія на сочиненіе Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ". Плутархъ упрекалъ

*) *Автоликъ* написалъ два сочиненія по Астрономіи, именно „Движущаяся сфера" (περὶ κινουμένης σφαίρας) и „Восхожденіе и захожденіе свѣтилъ". Первое изъ этихъ сочиненій есть самое древнее изъ дошедшихъ до насъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ. Оно заключаетъ всего только двѣнадцать предложеній, доказанныхъ геометрически, весьма просто. Мавролико первый перевелъ это сочиненіе на латинскій языкъ съ арабскаго. Впослѣдствіи это сочиненіе было переведено съ греческой рукописи, неаполитанцемъ Авріа (Auria), рукопись эту онъ сравнивалъ съ пятью другими рукописями, принадлежащими Ватиканской библіотекѣ.

**) Плутархъ говоритъ, въ одной изъ главъ своего сочиненія „Пиръ", что Платонъ часто говорилъ. „Богъ (творецъ) занимается постоянно Геометріей (τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν)",

Платона, въ жизнеописаніи Марцелла, въ томъ, что онъ въ чисто умозрительную науку, какова Геометрія, ввелъ механическіе пріемы. Такой упрекъ неосновагеленъ, такъ какъ Платонъ изобрѣлъ инструментъ и употребляетъ его въ такомъ же смыслѣ, въ какомъ, при рѣшени задачъ съ помощью круга, употребляется самый простой инструментъ — циркуль. Устройство подобныхъ инструментовъ, для непрерывнаго черченія кривыхъ, приписываютъ древніе Архиту и Менайхму.

3) Платонъ пополнилъ теорію ирраціональныхъ величинъ, которая получила начало въ Пиѳагорейской школѣ, но не была достаточно развита; была извѣстна только несоизмѣримость стороны квадрата съ его діагональю и нѣкоторыхъ кратныхъ квадратовъ между собою. Теорія же ирраціональныхъ отношеній въ пропорціяхъ и ихъ приложеніе къ подобію фигуръ въ пиѳагорейской школѣ не была затронута. Въ школѣ Платона частью имъ самимъ, а частью его учениками, въ особенности Теететомъ, она была возведена на ту степень полноты, въ какой мы ее находимъ въ X книгѣ „Началъ" Евклида.

4) Наконецъ Платону обязана дальнѣйшимъ своимъ развитіемъ Стереометрія, которая до него далеко отстала отъ Планиметріи. Въ своемъ сочиненіи „о государствѣ" онъ говоритъ: что „Стереометрія ждетъ своего генія", и въ самомъ дѣлѣ, изъ Стереометріи до Платона знали только самыя необходимыя теоремы относительно положенія прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ, о правильныхъ тѣлахъ, о шарѣ, но о призмахъ, о цилиндрахъ, пирамидахъ и конусахъ едва знали по имени. Платонъ обратилъ особенное вниманіе на эти тѣла и изслѣдованія его ученика Менайхма привели къ открытію *коническихъ сѣченій*, т. е. къ открытію кривыхъ, полученныхъ пересѣченіемъ конуса плоскостью. Въ теченіи ста лѣтъ послѣ Платона теорія этихъ кривыхъ такъ высоко была развита, что въ новѣйшее время, съ своимъ могущественнымъ анализомъ, геометры къ этой теоріи ничего не прибавили.

5) Самое важное, что Платонъ сдѣлалъ для Геометріи, это то, что онъ облекъ ее въ строго-логическую форму. Какъ кажется, до Платона, мало заботились о строгомъ и ясномъ опредѣленіи точки, линіи, поверхности, прямой, плоскости, угловъ и т. д., нигдѣ нѣтъ и слѣда разысканій относительно началъ Геометріи, все это какъ бы подразумѣвалось, вездѣ видно стараніе геометровъ возводить зданіе, не заботясь о его фундаментѣ. Въ Академіи, куда стекались философы и геометры, критически были разобраны и распредѣлены въ логической послѣдовательности, какъ основныя начала, такъ и теоремы, вѣроятно почти въ такомъ видѣ и порядкѣ, въ какомъ они дошли до насъ въ „Началахъ" Евклида. Тамъ же вѣроятно были формулированы методы доказательствъ: *синтезъ*, *анализъ* и *приведеніе къ нелѣпости*

или *апагогическій* методъ*). Проклъ въ своихъ комментаріяхъ говоритъ: „что Платонъ ввелъ методы доказательствъ, изъ которыхъ аналитическій самый лучшій изъ всѣхъ, онъ его сообщилъ ученику своему Леодаму, который поэтому сдѣлалъ въ Геометріи много открытій". Изъ этого мѣста Прокла можно только заключить, что Платонъ ввелъ методы, которые существовали необходимо, съ самаго зародыша Геометріи, но такъ сказать неявно.

Сократъ первый въ основы каждой науки полагалъ *происхожденіе понятій;* до него существовалъ догматическій способъ изслѣдованій. Весьма вѣроятно, что Платонъ слѣдуя примѣру своего учителя, обратилъ особенное вниманіе на изслѣдованіе первоначальныхъ основъ математики, и положилъ твердое начало *опредѣленіямъ*.

Въ сочиненіяхъ Аристотеля часто приводятся математическія опредѣленія; безъ сомнѣнія, можно сказать, что они получили свое начало въ Платоновской школѣ. Аристотель, въ своей „Метафизикѣ" **) говоритъ, что „Платонъ понятіе о точкѣ разсматривалъ какъ геометрическое представленіе (δόγμα) и тѣмъ далъ начало понятіямъ о началѣ прямой и недѣлимой линіи". Далѣе онъ говоритъ, что „точку, прямую и поверхность разсматривали какъ границы линіи, поверхности и тѣла". Кромѣ того, онъ даетъ, существовавшія въ то время неточныя опредѣленія: „линія есть длина, не имѣющая ширины"; „прямое есть то, въ которомъ средина покрываетъ границы"; „поверхность имѣетъ ширину и длину"; „тѣло есть то, что имѣетъ три измѣренія". Понятія эти получили начало въ Платоновской школѣ, впослѣдствіи ими воспользовался Евклидъ въ своихъ „Началахъ". Вѣроятно и аксіомы получили свое начало въ школѣ Платона, впослѣдствіи они легли въ основаніи „Началъ" Евклида. Что аксіомы получили свое происхожденіе въ школѣ Платона, это тѣмъ вѣроятнѣе, что въ этой школѣ существовало математическое направленіе, въ связи съ философскими воззрѣніями на предметы.

Философскому направленію въ математическихъ изслѣдованіяхъ, кромѣ

*) Самое древнее опредѣленіе *анализа* и *синтеза* мы находимъ въ началѣ XIII-й книги „Началъ" Евклида. Смот. „Начала Евклида" стр. 538. Всѣ три метода доказательства подробно разобраны въ Примѣч. 1 къ XIII-й книгѣ „Началъ Евклида". Смот. стр. 539—544.

**) Подъ именемъ *Метафизики* извѣстна часть философіи, занимающаяся предметами сверхчувственными. Слово метафизика было неизвѣстно Грекамъ; первоначально Андроникъ Родосскій собралъ въ одно цѣлое, тѣ четырнадцать книгъ изъ сочиненій Аристотеля, которыя теперь носятъ названіе „Метафизики" Аристотеля, сочиненія эти онъ помѣстилъ послѣ сочиненій физическаго содержанія и озаглавилъ ихъ τὰ μετὰ φυσικά, указывая этимъ, что ихъ слѣдуетъ читать послѣ физическихъ сочиненій, впослѣдствіи предлогу μετά придали иное значеніе, именно его употребили въ смыслѣ: надъ, сверхъ, выше. Отсюда и произошло названіе метафизика.

Платона, слѣдовали также Пиѳагоръ, Декартъ, Лейбницъ и Ньютонъ; философскія воззрѣнія въ математикѣ приносили всегда блестящіе результаты: Пиѳагоръ—первый поставилъ математику на ряду наукъ; Платонъ ввелъ аналитическій методъ и тѣмъ далъ математикѣ болѣе широкое развитіе—она вышла за предѣлы элементовъ; Декартъ создалъ Аналитическую Геометрію, а Лейбницъ и Ньютонъ—дифференціальное исчисленіе; эти четыре отдѣла суть четыре большія ступени въ развитіи математическихъ наукъ.

Можно прибавить къ этому то, что разсказываютъ будто Платонъ написалъ на дверяхъ своего дома или Академіи: „не знающія Геометріи не входятъ подъ эту крышу". Разсказъ этотъ отчетливо характеризуетъ направленіе школы Платона и уясняетъ тѣ громадные успѣхи, которые Геометрія сдѣлала въ періодъ Платона

Современники, посѣщавшіе Академію Платона, были:

Леодамъ. О немъ извѣстно, что аналитическій способъ доказательства былъ ему сообщенъ Платономъ, вслѣдствіе чего онъ сдѣлалъ много открытій въ Геометріи.

Теететъ; ему приписываютъ доказательство 9-й и 10-й теоремы X книги „Началъ" Евклида, изъ чего можно заключить, что онъ перенесъ свойства отношеній и пропорцій на ираціональныя величины. Кромѣ того по словамъ Суиды *), онъ первый написалъ сочиненіе о пяти правильныхъ тѣлахъ. Вѣроятно XIII книга „Началъ" Евклида основана на изслѣдованіяхъ Теетета, которому и принадлежитъ ираціональное выраженіе отношенія реберъ правильныхъ многогранниковъ къ радіусу описаннаго около нихъ шара.

Архитъ. О немъ мы сказали выше.

Ученики Платона. Проклъ перечисляетъ многихъ геометровъ, которые были учениками Платона и, такъ сказать, сподвижниками его въ развитіи Геометріи. Ни одинъ изъ нихъ, впрочемъ, не написалъ замѣчательнаго сочиненія. Проклъ довольствуется только тѣмъ, что къ каждому имени прибавляетъ небольшую замѣтку. Изъ учениковъ Платона самые замѣчательные были братья *Дейностратъ* и *Менайхмъ*.

Дейностратъ. Онъ замѣчателенъ тѣмъ, что первый теоретически рѣшилъ задачу квадратуры круга, съ помощью трансцендентной кривой, изобрѣтенной Гиппіемъ; нѣкоторые называютъ ее *квадратриксой Дейнострата*. Паппусъ намъ передалъ построеніе Дейностратомъ квадратуры круга; построеніе это я не привожу здѣсь, замѣчу только, что если дѣйствительно приведенное Паппусомъ доказательство принадлежитъ Дейнострату, то мы можемъ заключить, что способъ доказательства приведенія къ нелѣпости существо-

*) *Суида*, греческій лексикографъ, жилъ въ X в. по Р. Х.

валъ до Евклида, какъ мы уже выше замѣтили. Кромѣ того, изъ доказательства Дейпострата видно, что еще до Архимеда было принято, что сумма касательныхъ въ концахъ дуги круга больше самой дуги. Имя Дейнострата только и связано съ этой квадратурой.

Менайхмъ болѣе извѣстенъ чѣмъ Дейнострагъ *). Ему древніе приписываютъ одно изъ самыхъ важныхъ геометрическихъ открытій—открытіе *коническихъ сѣченій*, т. е. кривыхъ, происходящихъ отъ пересѣченія конуса плоскостью. Евтокій въ своихъ комментаріяхъ къ сочиненію Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ" приводитъ выписку изъ письма Эратосѳена къ Птоломею II, въ которомъ онъ называетъ коническія сѣченія *тріадой Менайхма*. Проклъ въ своихъ комментаріяхъ также приводитъ слова Геминуса, подтверждающія тоже. Нѣкоторые изъ новыхъ историковъ, какъ напримѣръ: Боссю, Шаль и др. приписываютъ это открытіе Платону, но такое мнѣніе не имѣетъ основанія.

Другаго рода сомнѣніе является вслѣдствіе одной замѣтки Евтокія въ комментаріяхъ его къ „Коническимъ сѣченіямъ" Аполлонія. Онъ говоритъ: „Антемій, другъ геометра Аполлонія, родившагося въ Пергамѣ въ Памфиліи, въ царствованіе Птоломея Евергета, какъ говоритъ Гераклій въ жизнеописаніи Архимеда, также упоминаетъ, что теоремы коническихъ сѣченій были найдены сперва Архимедомъ, но такъ какъ Архимедъ ничего объ этомъ не писалъ, то Аполлоній выдалъ ихъ за свои собственныя открытія, что по моему мнѣнію несправедливо. И въ самомъ дѣлѣ, Архимедъ во многихъ мѣстахъ ссылается на старые элементы „коническихъ сѣченій", а Аполлоній, говоритъ, что онъ многое, сдѣланное другими обобщилъ". Это мѣсто изъ комментарія Евтокія показываетъ, что уже въ то время существовали различныя мнѣнія относительно открытія коническихъ сѣченій.

Евтокій передаетъ, что во время Менайхма знали только прямой конусъ, который получали вращеніемъ прямоугольнаго треугольника около одного изъ катетовъ, что́ удержано и Евклидомъ. Изъ этого слѣдуетъ, что сѣченія плоскостями, проходящими по оси конуса, будутъ тождественные равнобедренные треугольники. Конусъ называется острый, прямой или тупой, смотря по углу въ вершинѣ выше упомянутыхъ треугольниковъ. Менайхмъ пересѣкаетъ конусъ плоскостью, перпендикулярною къ образующей конуса и такимъ образомъ получаетъ три кривыя, которыя въ настоящее время носятъ названіе: *эллипса*, *параболы* и *гиперболы*. Пересѣченіе треу-

---

*) На вопросъ Александра Македонскаго, нѣтъ-ли болѣе легкихъ путей въ Геометріи? Менайхмъ отвѣчалъ: „царь на военномъ поприщѣ есть пути для обыкновенныхъ смертныхъ и для царей, но въ Геометріи есть только одинъ путь для всѣхъ". Этотъ разсказъ есть вѣроятно варіантъ такого же отвѣта Евклида фараону Птоломею.

голника, коего плоскость, проходя по оси конуса, перпендикулярна къ плоскости кривой, даетъ ось кривой.

Теперь рождается вопросъ, у Евтокія ничего не сказано, какое свойство каждой изъ трехъ кривыхъ было взято Менайхмомъ для изслѣдованія этихъ кривыхъ? Такъ какъ относительно этого намъ древніе писатели ничего не передали, то намъ остается только догадываться. Нѣкоторые полагаютъ, что въ основаніи изслѣдованій этихъ кривыхъ было взято свойство, соотвѣтствующее свойству круга, что перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки окружности на какой нибудь діаметръ, есть линія средне-пропорціональная между отрѣзками діаметра.

Едва *коническія сѣченія* были открыты, едва были изслѣдованы ихъ главнѣйшія свойства, какъ Менайхмъ уже прилагаетъ ихъ свойства къ рѣшенію задачи: „нахожденія двухъ средне-пропорціональныхъ между двумя прямыми". У Евтокія мы находимъ два способа рѣшенія этой задачи, приписываемые Менайхму. Я не буду приводить здѣсь эти способы, такъ какъ они не заключаютъ ничего особеннаго, а только скажу, что по одному изъ нихъ задача рѣшена съ помощью параболы и гиперболы, а въ другомъ съ помощью двухъ параболъ. Замѣтимъ, что одно изъ коническихъ сѣченій, въ рѣшеніи этой задачи, можетъ быть замѣщено кругомъ и рѣшеніе отъ того будетъ проще. Замѣчательно, что въ первомъ рѣшеніи гипербола отнесена къ ассимптотамъ, изъ чего можно заключить, что вслѣдъ за открытіемъ коническихъ сѣченій сдѣлались извѣстными и ассимптоты гиперболы.

Менайхму приписываютъ еще изобрѣтеніе инструмента для черченія коническихъ сѣченій. Это основываютъ на словахъ Эратосѳена въ письмѣ къ Птоломею, но объ этомъ инструментѣ больше никто не говоритъ, а поэтому можно и сомнѣваться въ томъ. Вотъ все, что намъ извѣстно о Менайхмѣ.

Евдоксъ. Изъ сочиненій Діогена Лаертскаго мы знаемъ, что Евдоксъ родился около 410 л. до Р. Х. въ Книдѣ, учился Геометріи у Архита и отправился съ письмами Агезелая къ египетскому фараону Нектабазису; послѣдній во время пребыванія его при дворѣ познакомилъ его съ геліополисскими жрецами, у которыхъ онъ пробылъ, по словамъ Страбона, тринадцать лѣтъ. Изъ Египта Евдоксъ возвратился въ Кизикъ, а оттуда въ Аѳины, гдѣ сдѣлался членомъ Академіи и былъ любимымъ ученикомъ Платона *). Въ 375 г. Евдоксъ основалъ школу въ Кизикѣ **).

*) По словамъ Плутарха, Платонъ указывалъ на Евдокса и Геликона изъ Кизика, какъ на единственныхъ ему извѣстныхъ геометровъ, способныхъ преодолѣть трудности, встрѣчаемыя при рѣшеніи задачи удвоенія куба.

**) Самые извѣстные изъ учениковъ Евдокса были *Геликонъ* и *Аѳеней*, оба изъ Кизика, а также Менайхмъ.

Евдоксъ умеръ 53-хъ лѣтъ въ родномъ городѣ. Мы не коснемся сочиненій Евдокса по Астрономіи, а укажемъ только на то, что ему приписываютъ древніе по Геометріи. Архимедъ, въ своемъ сочиненіи „О шарѣ и цилиндрѣ", говоритъ, „что Евдоксъ нашелъ, что каждая пирамида составляетъ треть призмы, имѣющей съ нею одно основаніе и одну высоту, что конусъ составляетъ треть цилиндра, имѣющаго то же основаніе и ту же высоту". Вѣроятно ему также принадлежитъ теорема, что объемы шаровъ относятся какъ кубы ихъ діаметровъ. Подобная теорема для круга была уже доказана Гиппократомъ, но какъ—намъ неизвѣстно Архимедъ же, въ вышеупомянутомъ сочиненіи, приписываетъ ее Евдоксу. Евтокій въ комментаріяхъ къ сочиненію Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ", говоритъ, что Евдоксъ также рѣшилъ задачу „о двухъ средне-пропорціональныхъ между двумя данными", съ помощью изобрѣтенной имъ кривой. По словамъ Плутарха, „Евклидъ при составленіи своихъ „Началъ" воспользовался многимъ изъ сочиненій Евдокса, а нѣкоторые даже полагаютъ что V книга „Началъ", содержащая ученіе о пропорціональности, почти цѣликомъ заимствована изъ сочиненій Евдокса". Евдоксъ также много занимался изученіемъ различныхъ кривыхъ, въ особенности тѣхъ, которыя происходятъ отъ пересѣченія тѣлъ. Изученіе кривыхъ и приложеніе ихъ къ рѣшенію задачи удвоенія куба дало поводъ Эратосѳену назвать Евдокса *божественнымъ*. Евдоксъ главнымъ образомъ разсматривалъ кривыя органическаго происхожденія, т. е. такія, которыя происходятъ механически По словамъ Прокла Евдоксъ первый приложилъ аналитическій методъ къ изслѣдованію свойствъ кривыхъ. Проклъ и другіе писатели въ своихъ комментаріяхъ упоминаютъ о „Геометрическихъ сочиненіяхъ" (Γεωμετρούμενα) Евдокса, но они до насъ не дошли.

Евдоксъ былъ послѣдній замѣчательный геометръ Платоновскаго періода.

Изъ всего выше сказаннаго мы видимъ, на сколько древніе геометры считали важнымъ рѣшеніе задачъ: трисекція угла, удвоеніе куба, квадратура круга; всякій разъ, когда являлось новое открытіе въ Геометріи, сейчасъ же старались приложить его къ рѣшенію этихъ задачъ, а стараніе рѣшить эти задачи, въ свою очередь, вело къ открытіямъ въ Геометріи. Нѣчто подобное происходило въ XVI столѣтіи, когда на очереди стояла задача „о проведеніи касательныхъ къ кривымъ",—задача эта была причиною открытія Дифференціальнаго исчисленія.

Одно изъ самыхъ важныхъ геометрическихъ представленій, которое было сдѣлано геометрами въ Платоновскій періодъ, и вѣроятно еще до Платона, какъ мы уже выше замѣтили, есть представленіе о *геометрическомъ мѣстѣ*. Что-же такое геометрическое мѣсто? геометрическое мѣсто есть непрерывный рядъ точекъ, каждая изъ которыхъ рѣшаетъ извѣстную

задачу, или каждая изъ коихъ удовлетворяетъ извѣстному условію, которое ни одной точкой, внѣ этого мѣста, неудовлетворяется. Задача поэтому имѣетъ безчисленное множество рѣшеній—и есть неопредѣленная. Въ теоріи геометрическихъ мѣстъ, древніе геометры нашли сильный рычагъ для изслѣдованія и рѣшенія задачъ, а наука получила широкое обобщеніе геометрическихъ представленій. Различныя кривыя или, какъ ихъ иначе называли, *„бѣгущія мѣста"* (τόποι διεξοδικοί), древніе раздѣлили на классы и назвали: *плоскими мѣстами* (τόποι ἐπίπεδοι)—прямую и кругъ, потому что они образуются на плоскости; *тѣлесными мѣстами* (τόποι στερεοί)—коническія сѣченія, потому что они образуются на конусѣ, наконецъ *линейными мѣстами* (τόποι γραμμικοί)—всѣ кривыя высшихъ порядковъ: конхоиду, циссоиду, спираль, квадратриксу и др.

Мѣстной теоремой они назвали предложеніе которымъ выражается общее свойство всѣмъ точкамъ прямой или кривой линіи, вполнѣ опредѣленной; напримѣръ. если на діаметрѣ AB круга взяты двѣ точки C и D такъ, что $CA:CB=DA:BD$, то разстоянія каждой точки m на окружности круга отъ точекъ C и D находятся въ отношеніи $CA:DA$.

Мѣстной задачей или вопросомъ *мѣста*, они назвали задачу, въ которой требуется найти свойство, величину и положеніе *мѣста*, т. е. кривую, общее мѣсто безконечнаго числа точекъ, подлежащихъ одному общему закону; напримѣръ: даны двѣ точки и отношеніе λ, какое будетъ мѣсто точекъ, коихъ разстоянія отъ двухъ данныхъ точекъ, находятся между собою въ данномъ отношеніи λ?

Какъ видимъ, въ представленіи *о мѣстахъ* является у древнихъ въ первый разъ понятіе о величинѣ *перемѣнной*, которое намъ такъ близко знакомо и играетъ такую важную роль въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Древніе геометры не могли воспользоваться этимъ понятіемъ, въ такой мѣрѣ, въ какой имъ воспользовались геометры нашего времени, вслѣдствіе отсутствія символическаго представленія зависимости между геометрическими величинами. Что древніе геометры поняли важность такого геометрическаго представленія, это доказывается двумя сочиненіями Евклида: *„Данныя"* (Δεδομένα) и *„Поризмы"* (Πορίσμα). Послѣднее утеряно и по отрывкамъ находящимся въ сочиненіяхъ: Паппуса, Діофанта и нѣкоторыхъ арабскихъ писателей, было возстановлено Шалемъ въ 1860 году. Если внимательно разсмотрѣть каждую теорему и каждую задачу, то каждая изъ нихъ заключаетъ въ себѣ понятіе *о мѣстѣ*. Въ доказательствѣ теоремы, въ рѣшеніи задачи всегда участвуютъ *мѣста*, которыя связаны съ теоремой или задачей. Самое *мѣсто* есть или теорема или задача, смотря по формѣ, въ которой оно выражено. Напримѣръ: вершины треугольниковъ, построенныхъ на одномъ основаніи и имѣющихъ равные углы, противолежащіе основа-

нію, лежать на окружности круга —это теорема. Найти мѣсто вершинъ треугольниковъ, построенныхъ на одномъ основаніи и имѣющихъ равные углы противолежащіе основанію? это задача. Слѣдовательно начало понятія *о мѣстѣ* кроется и въ теоремѣ, и въ задачѣ. Усилія, направленныя къ рѣшенію задачъ: трисекція угла, удвоеніе куба и квадратура круга, привели къ представленію о геометрическомъ *мѣстѣ*, которое въ свою очередь было приложено къ рѣшенію тѣхъ же задачъ. Одно удивительно, какъ понятіе о геометрическомъ мѣстѣ не было приложено къ изслѣдованію коническихъ сѣченій. Но это произошло оттого, что тѣ свойства, которыя могли привесть къ разсматриванію коническихъ сѣченій, какъ геометрическихъ мѣстъ, именно свойства фокусовъ, даже въ такомъ сочиненіи какъ „Коническія сѣченія“ Аполлонія, были мимоходомъ затронуты въ эллипсѣ и въ гиперболѣ, а въ параболѣ о нихъ ни сказано ни слова.

Для практическаго примѣненія методовъ, предложенныхъ Платономъ, Архитомъ и Евдоксомъ для рѣшенія задачи удвоенія куба, необходимо было выдумать инструменты для механическаго черченія кривыхъ, при помощи которыхъ эта задача рѣшается. Плутархъ сообщаетъ, что Платонъ порицалъ устройство подобныхъ инструментовъ и возражалъ противъ механическихъ построеній, хотя самъ выдумалъ подобный инструментъ, онъ говоритъ, „потому что такими способами преимущество Геометріи утрачивается и портится, какъ скоро мы ее снова начинаемъ прилагать къ чувственнымъ представленіямъ, вмѣсто того чтобы ее поднять на должную высоту и заниматься вѣчными и безтѣлесными образами“. Несочувственно относящійся къ практическимъ примѣненіямъ, Платонъ далѣе продолжаетъ и упрекаетъ математиковъ въ томъ, „что они говорятъ смѣшно и скудно; ибо изъ этого слѣдуетъ, будто-бы всѣ ихъ разсужденія ведутъ къ какой-то цѣли, будто они нѣчто совершаютъ на самомъ дѣлѣ, когда они употребляютъ выраженія: „сдѣлать четыреугольнымъ“, „начертать“, „приложить одно къ другому“ и другія подобныя выраженія; дѣло же все заключается только въ пріобрѣтеніи познаній“.

Исходя изъ подобнаго взгляда, видно, что Платонъ руководствовался вполнѣ правильнымъ сознаніемъ, когда онъ отвергалъ механическія построенія. Задачи, которыя можно рѣшить съ помощью одного циркуля и линейки, составляютъ вполнѣ опредѣленный и ограниченный классъ; для каждой задачи необходимо и весьма важно установить, можетъ-ли она быть рѣшена при помощи этихъ инструментовъ; подобно тому какъ существуетъ вопросъ въ Алгебрѣ, можетъ-ли быть рѣшено уравненіе при помощи квадратныхъ корней, или нѣтъ. Если-бы было допущено введеніе произвольнаго числа инструментовъ для рѣшенія задачъ, то не были-бы предприняты многія изслѣдованія въ этомъ направленіи. Мы должны быть благодарны Платону

за ограниченіе употребленія геометрическихъ инструментовъ только двумя—простѣйшими. Другіе инструменты, о которыхъ часто съ большой увѣренностью сообщали ихъ изобрѣтатели, нынѣ совершенно забыты, такъ какъ они не имѣли никакого болѣе научнаго значенія.

Аристай—послѣдній изъ геометровъ, котораго можно причислить къ Платоновскому періоду Паппусъ называетъ его *старшимъ*, въ отличіе отъ другаго ученаго того же имени. Изъ первой книги Гипсикла „О пяти правильныхъ тѣлахъ" мы узнаемъ, что Аристай написалъ сочиненіе о сравненіи этихъ тѣлъ (см. „Начала Евклида" кн. XIV, пред. 2); сочиненіе это утеряно, но какъ оно было послѣднее передъ Евклидомъ, то можно полагать, что содержаніе его частію заключается въ XIII книгѣ „Началъ" Евклида. Тѣмъ болѣе это вѣроятно, что Евклидъ переработалъ другое сочиненіе того же автора, именно: „Коническія сѣченія", упоминаемое Паппусомъ и также утерянное. Паппусъ сообщаетъ, что оно было написано въ высшей степени ясно и понятно, такъ что Евклидъ въ своихъ „Коническихъ сѣченіяхъ", только переработалъ и улучшилъ теорію этихъ кривыхъ, оставивъ нетронутымъ общій ходъ изслѣдованій Аристая. Замѣчательно, что въ этомъ сочиненіи Аристай получаетъ уже *всѣ* коническія сѣченія посредствомъ пересѣченія *одного* конуса плоскостью въ различныхъ направленіяхъ. Наконецъ, Аристаю принадлежитъ еще третье сочиненіе, въ пяти книгахъ; объ этомъ сочиненіи Шаль въ своей Исторіи Геометріи говоритъ слѣдующее. „вторая книга Мидоржа *) „Коническихъ сѣченій" содержитъ построеніе коническихъ сѣченій по точкамъ, чего не находится у Аполлонія, но находится въ сочиненіи Аристая „*О тѣлесныхъ мѣстахъ*", хотя и Аристай написалъ сочиненіе, подобное Аполлонію, отличное отъ „Тѣлесныхъ мѣстъ". Что содержитъ сочиненіе Аристая „О тѣлесныхъ мѣстахъ" намъ совершенно неизвѣстно. Сочиненіе Аристая „О тѣлесныхъ мѣстахъ" было возстановлено въ 1701 году геометромъ *Вивіани* (Viviani), на основаніи нѣкоторыхъ указаній Паппуса, въ VII книгѣ его „Collectiones mathematicae".

Какой громадный успѣхъ сдѣлала Геометрія въ Платоновскій періодъ, въ теченіи 80 лѣтъ, видно изъ того, что Планиметрія, во всѣхъ своихъ отдѣлахъ была закончена, Стереометрія также, *коническія сѣченія* изслѣдованы, представленіе *о геометрическомъ мѣстѣ* развито и приложено къ изслѣдованію и рѣшенію задачъ. При такомъ развитіи Геометріи „Элементы" написанные Гиппократомъ не могли удовлетворять научной потребности, явилась необходимость въ Элементахъ, которые бы соотвѣтствовали тогдашнему состоянію Геометріи.

---

*) *Мидоржъ* (Mydorge) французскій геометръ XVII столѣтія, онъ написалъ въ 1631 г. сочиненіе „Коническія сѣченія" въ двухъ книгахъ.

Леонъ, одинъ изъ старѣйшихъ учениковъ Платона старался пополнить этотъ недостатокъ. Онъ ввелъ въ Элементы, за синтетическимъ доказательствомъ, *діоризмы* (опредѣленія), съ помощью которыхъ опредѣляются случаи, при которыхъ задача можетъ быть рѣшена и при которыхъ не можетъ быть рѣшена; а если задача возможна, то сколько есть рѣшеній различныхъ между собою. При такомъ состояніи Геометріи, какъ бы ни были хороши элементы, они не могли удовлетворять долго научной потребности, поэтому были написаны еще элементы *Ксенократомъ* и *Тевдіемъ;* объ элементахъ, написанныхъ этимъ послѣднимъ, Проклъ говоритъ, что они были „очень хороши и, что имъ были обобщены многіе частные случаи".

Аристотель родился въ 384 г. до Р. Х. въ г. Стагирѣ, въ Македоніи; въ теченіи двадцати лѣтъ онъ былъ ученикомъ Платона. По смерти Платона по приглашенію Филиппа Македонскаго, онъ сдѣлался воспитателемъ сына его, Александра, на характеръ и развитіе котораго онъ оказалъ весьма большое вліяніе. Когда Александръ отправился въ персидскій походъ, Аристотель возвратился въ Аѳины и основалъ тамъ Лицей, -знаменитую *перипатетическую школу* Ученіе, которое онъ проповѣдывалъ и неудовольствіе на него бывшаго ученика, заставили Аристотеля въ старости искать убѣжища на островѣ Евбеѣ, гдѣ онъ умеръ въ 321 году до Р. Х.

Предметомъ философіи Аристотеля была природа вообще, а главными основаніями при изученіи ея—собираніе наблюденій и опытъ, логическія слѣдствія изъ которыхъ должны были привести къ началамъ всего существующаго. Этотъ путь былъ бы дѣйствительно единственный возможный и правильный, для познанія законовъ и явленій природы, если бы только хитросплетенныя діалектическія уловки Аристотелевской метафизики не приводили его къ самымъ страннымъ теоріямъ. Аристотель желалъ строгую логику чистой математики внести въ естественныя науки, но сдѣлалъ большую ошибку стремясь подчинить формѣ—матерію. Заключенія его смѣлыя, часто геніальныя, а иногда очень странныя, весьма рѣдко были точно поняты и нерѣдко служили предметомъ для многихъ толкованій его послѣдователей. Благодаря такой особенности, ученіе самаго великаго изъ эмпириковъ древняго міра мало послужило къ послѣдующему развитію естественныхъ наукъ, а легло въ основаніи средневѣковой схоластической теологіи, господствовавшей въ теченіи цѣлыхъ столѣтій. Но великою заслугою Аристотеля всегда останется то, что онъ одинъ изъ первыхъ внесъ, въ хаосъ, существовавшій въ естественныхъ наукахъ, единство и порядокъ, благодаря своему ясному и глубокомысленному взгляду на предметы, и этимъ не мало способствовалъ возникновенію точнаго и опредѣленнаго направленія въ каждомъ предметѣ въ отдѣльности.

Собственно чистой математикой не занимались въ Аристотелевской школѣ; она служила только вспомогательнымъ средствомъ, а потому и Геометрія своимъ дальнѣйшимъ развитіемъ ни чѣмъ не обязана послѣдователямъ этого ученія. Самъ Аристотель былъ хорошо знакомъ съ математикой, доказательствомъ чему служатъ многочисленныя мѣста изъ его сочиненій, гдѣ онъ сказанное подтверждаетъ математическими положеніями или разборомъ этихъ послѣднихъ. Въ особенности онъ много занимался первоначальными—основными геометрическими опредѣленіями, примѣняя къ нимъ свой діалектическій талантъ. Строгой логикѣ Аристотеля мы обязаны болѣе ясному способу доказательствъ, что къ сожалѣнію недостаточно оцѣнено.

Аристотель первый опредѣлилъ математику слѣдующими словами въ своей „Метафизикѣ:" „чѣмъ занимаются математики, какъ не порядкомъ и отношеніемъ?". Подобный взглядъ на математическія науки былъ впослѣдствіи высказанъ и Декартомъ, который говоритъ, что: „цѣль математическихъ наукъ разысканіе порядка и мѣры" Такое раздѣленіе математическихъ наукъ относится въ частности и къ Геометріи, которая раздѣляется на два отдѣла, имѣющіе каждый свой особенный характеръ, это: *Геометрія мѣры* и *Геометрія формъ и положеній*, или иными словами Геометрія Архимеда и Геометрія Аполлонія.

Безъ сомнѣнія пріемъ, предложенный Антифономъ для разрѣшенія задачи квадратуры круга, былъ предметомъ многихъ споровъ между учеными аѳинскихъ школъ, такъ какъ въ это же время (около 450 г. до Р. Х.) въ Аѳинахъ жилъ извѣстный елеатъ *) *Зенонъ*—„основатель Діалектики". Въ это время были подняты вопросы о дѣлимости и непрерывности величинъ, которыми стали заниматься съ научной точки зрѣнія, благодаря *парадоксамъ* **) Зенона „о движеніи" и „о множествѣ". Парадоксы Зенона имѣли большое вліяніе на развитіе греческой Геометріи. Мы приведемъ нѣкоторые изъ нихъ. Для опроверженія возможности движенія Зенонъ разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ: „прежде чѣмъ движущееся тѣло достигнетъ цѣли къ которой оно стремится, оно должно пройти половину пути, а прежде чѣмъ достигнуть половину пути, оно должно достигнуть половину этой половины, и т. д. до безконечности. И такъ всякое тѣло чтобы

*) Ученые школы Елеатовъ стремились отдѣлить наблюденіе отъ заключенія. Послѣдователи этой школы почти не занимались ни математикой, ни астрономіей, а потому школа эта не произвела ни одного геометра. Основателемъ этой школы считаютъ *Ксенофана*, родившагося въ Колофонѣ въ 470 г. до Р. Х., но онъ скорѣе можетъ быть причисленъ къ Іонійской и даже Пиѳагорейской школамъ. Названіе свое школа эта получила отъ города *Елеи*, находящемуся въ Южной Италіи, гдѣ жилъ Ксенофанъ. Настоящій же представитель этой школы есть *Зенонъ*, родившійся въ 450 году до Р. Х., ученикъ и другъ Парменида.

**) Парадоксы Зенона въ греческихъ школахъ были извѣстны подъ именемъ *троп*ъ.

перейти изъ одной точки въ другую, должно пройти безконечное число мѣстъ; но безконечное пройти въ конечное время невозможно, а слѣдовательно движеніе невозможно". На подобномъ же началѣ основано доказательство извѣстнаго парадокса, что „быстроногій Ахиллесъ ни можетъ догнать медлительной черепахи", потому что онъ чтобы ее догнать долженъ сначала пройти чрезъ безконечное число точекъ, которыя его отдѣляютъ отъ нея*) Но уже Аристотель замѣтилъ, что оба эти доказательства выходятъ изъ одного положенія: „если движеніе существуетъ, то движущееся тѣло должно въ конечное время пройти безконечное число точекъ, что не возможно, а потому движеніе несуществуетъ". Подобнымъ разсужденіемъ можно опровергать возможность послѣдовательнаго дѣленія пополамъ данной длины, т. е. раздѣленія до безконечности. Положительное начало, на которомъ Зенонъ строилъ свои разсужденія, таково. „невозможно чтобы въ конечномъ заключалось безконечно много**)".

Логическія и остроумныя умозаключенія Зенона можно было опровергнуть при иномъ взглядѣ на пространство***). При этомъ взглядѣ возможно было опровергнуть невозможность движенія, отказавшись отъ понятій о безконечномъ дѣленіи и объ абсолютной непрерывности пространства, и введя новыя понятія о величинахъ, состоящихъ изъ тѣхъ же недѣлимыхъ элементовъ, взятыхъ въ конечномъ числѣ. До того времени придерживались перваго доказательства Зенона, что удостовѣряетъ Аристотель, напи-

---

*) Этотъ парадоксъ былъ еще предложенъ Зенономъ въ слѣдующей формѣ: онъ полагаетъ, что Ахиллесъ быстрѣе черепахи въ десять разъ и находится позади ея на разстояніи единицы. Когда Ахиллесъ пройдетъ эту единицу то черепаха подвинется впередъ на $\frac{1}{10}$; когда Ахиллесъ пройдетъ эту $\frac{1}{10}$, то черепаха подвинется впередъ на $\frac{1}{100}$, и т. д. до безконечности. Слѣдовательно Ахиллесъ не догонитъ черепахи. Этотъ парадоксъ не могъ быть опровергнутъ математически до тѣхъ поръ пока Архимедъ не доказалъ, что геометрическая прогрессія $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$ есть величина конечная, равная $\frac{10}{9}$.

**) Приведу еще одинъ изъ парадоксовъ Зенона. „летящая стрѣла лежитъ спокойно", потому что въ каждой точкѣ своего пути стрѣла занимаетъ опредѣленное положеніе, которое тождественно самому себѣ, т. е. въ каждой точкѣ стрѣла спокойна, ибо покойное состояніе тѣла означаетъ, что это состояніе тождественно само съ собою Сумма же тождественныхъ состояній или положеній, въ которыхъ нѣтъ никакой перемѣны, не можетъ дать движенія; изъ этого слѣдуетъ, что движеніе противорѣчитъ самому себѣ; оно не реально и есть чувственная иллюзія.

***) Зенонъ возражалъ противъ реальности пространства, возраженіе его слѣдующее „все существующее, находится въ пространствѣ, если же пространство само есть сущее, то оно также необходимо должно находиться въ пространствѣ (другомъ); если это пространство также существуетъ, то оно должно находиться въ третьемъ пространствѣ и т. д. до безконечности". Изъ подобнаго разсужденія онъ дѣлаетъ заключеніе, что пространство не есть реальность, а иллюзія

савшій, столѣтіе спустя, сочиненіе „о недѣлимыхъ линіяхъ", для доказательства математической и логической невозможности ихъ существованія. Точно также и Антифонъ, по словамъ Евдема, „оставилъ въ сторонѣ начало дѣлимости до безконечности", полагая, что, продоживъ достаточно далеко подобное построеніе многоугольниковъ, мы наконецъ дойдемъ до такого, который не разнится отъ круга, такъ какъ прямыя и кривыя линіи состоятъ изъ однихъ и тѣхъ же недѣлимыхъ элементовъ.

Другіе же утверждали, основываясь на непосредственномъ взглядѣ, по которому какъ бы ни была мала линія, но она можетъ быть раздѣлена на какія угодно части и утверждали, что во всякой такой части заключается понятіе о прямой и кривой.

Дальнѣйшія философскія изслѣдованія стремились къ той же цѣли. Платонъ допускалъ въ представленіяхъ и во всемъ доступномъ нашему уму понятіе о безконечности и существованіе бо́льшаго и меньшаго. Но только глубокая діалектика Аристотеля была въ состояніи бросить свѣтъ на эту запутанность въ понятіяхъ *). Онъ проводилъ мысль, что невозможно, чтобы непрерывное состояло изъ недѣлимыхъ частей, какъ онъ утверждалъ, основываясь на самомъ понятіи о непрерывномъ. Онъ говоритъ: „непрерывнымъ (συνεχὲς) называется то, если граница каждой изъ близлежащихъ частей, съ которыми оно соприкасается есть общая и одинаковая, и какъ самое слово указываетъ представляетъ нѣчто неразрывное". Противъ перваго парадокса Зенона, онъ вполнѣ справедливо замѣчаетъ: „въ нашемъ умѣ, мы не можемъ безконечно многое сосчитать въ конечное время, движеніе же происходитъ не численно; а считать есть дѣйствіе раздѣльное, которое при каждомъ числѣ прерывается и какъ-бы дѣлаетъ отдыхъ, но движеніе не останавливается при каждой точкѣ своего пути". Далѣе онъ продолжаетъ: „несомнѣнно точка пробѣгаетъ въ конечное время безконечно много частей прямой; но это же время содержитъ въ себѣ безконечно много частей времени; ибо время можетъ быть дѣлимо до безконечности, какъ и пространство; но какъ только въ безконечно многое число частей времени пробѣгается безконечно-много частей пространства, то всякій парадоксъ перестаетъ существовать".

Также относительно понятія „о безконечномъ" (ἄπειρον) Аристотель первый положилъ первыя, болѣе глубокія изслѣдованія. Онъ полагаетъ, что „безконечное существуетъ только въ потенціальной возможности (δυνάμει),

---

*) Аристотель совѣтывалъ, въ противоположность Платону, своимъ послѣдователямъ не заниматься изученіемъ математики. Галилей подобное воззрѣніе Аристотеля находилъ вполнѣ правильнымъ такъ какъ „нѣтъ ничего болѣе опаснаго Геометріи для теорій Стагирита; она указываетъ на всѣ ихъ ошибки и обманы".

но не такъ, чтобы когда нибудь можно было найти нѣчто осязательное, какъ опредѣленно безконечное, которое было-бы безконечно на самомъ дѣлѣ (ἐνεργεια); но оно существуетъ только всегда въ возникновеніи и прохожденіи, и хотя оно всякій разъ и ограничено, но все таки всегда и постоянно различно. Это потенціальное безконечное существуетъ какъ во времени, числѣ, такъ и въ дѣленіи величинъ, гдѣ положенное, при дальнѣйшемъ ходѣ дѣйствія, проходитъ, но не по отношенію къ приращенію величинъ. Ибо, что можетъ быть потенціальнымъ, можетъ быть и дѣйствительнымъ. Но такъ какъ не существуетъ безграничной умственно-осязательной величины, то невозможно, чтобы было что нибудь выходящее за предѣлы всѣхъ опредѣленныхъ величинъ; въ противномъ случаѣ существовало бы нѣчто, большее вселенной".

Къ такимъ разсужденіямъ пришелъ Аристотель изъ разсмотрѣнія, главнымъ образомъ доступныхъ намъ, физическихъ величинъ, такъ какъ далѣе онъ продолжаетъ: „можетъ быть изслѣдованія, существуетъ-ли безконечное въ Математикѣ и въ воображаемомъ, и въ томъ что не имѣетъ величины, гораздо болѣе широкое". Но, если даже въ воображеніи и существуетъ нѣчто безконечное, то изъ этого никакого нельзя вывести слѣдствія для дѣйствительно существующаго: „Ибо одна величина болѣе другой, не потому что такъ думаетъ кто нибудь, а потому что это дѣйствительно такъ есть... Величина не дѣлается безконечною, увеличивая ее въ нашемъ воображеніи".

Изъ вышесказаннаго можно видѣть, что даже самому высокому діалектику древности не удалось превозмочь всѣ трудности, сопровождающія понятіе о безконечномъ и разсѣять мракъ, который ихъ окружаетъ; самъ онъ впалъ въ новыя трудности, будучи стѣсненъ ограниченностью взглядовъ своего времени. Теперь очевидно, почему греческіе математики, послѣ того, какъ этотъ вопросъ сдѣлался достояніемъ діалектики, благодаря парадоксамъ Елеатовъ, думали устранить всѣ эти трудности, устранивъ разъ на всегда изъ науки понятіе объ измѣненіи и движеніи, равно какъ и понятія о безконечномъ, о потенціально-безконечномъ, а слѣдовательно о безконечно-возрастающемъ и безконечно-убывающемъ, которыя они замѣнили понятіями о какъ угодно великомъ и какъ угодно маломъ. Они удовольствовались принятіемъ аксіомы: „что всякая величина можетъ быть раздѣлена на сколько угодно частей". Понятіе о дѣйствительно существующемъ безконечно-великомъ не нашло примѣненія въ классическомъ греческомъ духѣ, какъ видно изъ отрицанія Аристотелемъ существованія дѣйствительно существующей безконечности; понятіе это обязано своимъ происхожденіемъ только позднѣйшему направленію духа въ области трансцендентнаго. Въ опредѣленіи же понятія о дѣйствительно существующемъ безконечно-маломъ они встрѣ-

тили неразрѣшимыя противорѣчія: безконечно-малое не увеличиваетъ величины, будучи къ ней приложено. „Но то что, будучи приложено къ величинѣ, не увеличиваетъ ее, а отнятое не уменьшаетъ, есть ничто",—говорилъ еще Зенонъ; тѣмъ не менѣе безконечно-малое должно же быть нѣчто, такъ какъ оно находится въ отношеніи опредѣленномъ къ другимъ безконечно-малымъ. Это понятіе они ясно выражали слѣдующей аксіомой: „если двѣ поверхности неравны, то возможно, разницу, на которую меньшая разнится отъ большей, столько разъ приложить саму къ себѣ, что получимъ поверхность большую всякой данной опредѣленной поверхности". Изъ этого слѣдуетъ, что не можетъ существовать безконечно-малой разницы, которая будучи сама съ собою сложена, по своему существу никогда не можетъ превзойти конечной поверхности.

Съ какою осмотрительностью, съ какою осторожностью, непонятною намъ, поступали древніе математики при выборѣ подобныхъ аксіомъ, видно изъ оговорки, которую Архимедъ, спустя нѣсколько столѣтій, считаетъ *долгомъ* сдѣлать при употребленіи имъ леммы (λῆμμα—принятое предложеніе): что сумма касательныхъ въ концахъ дуги болѣе самой дуги*), „прежніе геометры также пользовались этой леммой; а именно, что площади круговъ относятся какъ квадраты діаметровъ и т. д., доказано при помощи этой леммы. Но каждое изъ приведенныхъ предложеній не менѣе справедливо, какъ такое, которое доказано безъ помощи этой леммы, а потому то, о чемъ я сейчасъ буду говорить, не менѣе справедливо и должно быть принято".

Если только Архимедъ полагалъ такое соотношеніе между упомянутой леммой и предложеніемъ о соотношеніи площадей круговъ, съ другой же стороны, Евдемъ утверждаетъ, что послѣднее предложеніе найдено и доказано Гиппократомъ Хіосскимъ, то мы вправѣ предположить, что Гиппократу принадлежитъ честь открытія предложенія, которымъ впослѣдствіи воспользовался Архимедъ, которое въ томъ или другомъ видѣ есть основаніе *метода исчерпываній* древнихъ, т. е. того метода, въ которомъ при помощи вписаннаго и описаннаго, около криволинейной фигуры, многоугольника, стремились исчерпать ея содержаніе. Въ основаніи этого метода должно лежать предложеніе показывающее, что при помощи этихъ многоугольниковъ исчерпывается криволинейная площадь, т. е. что при дальнѣйшемъ увеличеніи числа сторонъ, многоугольники не только все приближаются и приближаются къ криволинейной поверхности, но что они могутъ приблизиться какъ угодно. Если доказательство предложенія Гиппократа, касательно площадей круговъ было вѣрно, что утверждаетъ Евдемъ, то ему затѣмъ предстояло доказать слѣдующее предложеніе: не можетъ су-

*) Въ началѣ сочиненія „О шарѣ и цилиндрѣ".

шествовать такой площади $K-\varepsilon$ многоугольника, какъ угодно мало разнящейся отъ площади K круга, чтобы не упалъ одинъ изъ многоугольниковъ, вписанныхъ по способу Антифона, между K и $K-\varepsilon$. Для этого необходимо было доказать, что разность между многоугольникомъ и кругомъ меньше половины разности предъидущаго многоугольника и круга. Если только это было доказано, а это легко изъ чертежа доказать, то можно продолжать далѣе:

Если невозможно приблизиться къ площади круга, при помощи многоугольниковъ, ближе чѣмъ на $K-\varepsilon$, то начнемъ удваивать ε до тѣхъ поръ пока оно не превзойдетъ площади круга, что можно допустить на основанiи основнаго предложенiя, и впишемъ столько же многоугольниковъ, начиная съ квадрата, въ кругъ По нашему предположенiю послѣднiй изъ нихъ болѣе чѣмъ на ε разнится отъ K, предъидущiй, по только что доказанному, болѣе чѣмъ на 2ε, предшествующiй этому болѣе чѣмъ на 4ε... и наконецъ квадратъ *разнится отъ круга* болѣе чѣмъ на величину, происшедшую отъ послѣдовательнаго удваиванiя ε. Но эта *послѣдняя* должна быть больше площади круга, а потому площадь квадрата менѣе на площадь круга отъ самой площади круга, что невозможно. Слѣдовательно многоугольники подходятъ къ площади круга какъ угодно близко.

Нельзя не сознаться, что такой способъ имѣетъ недостатки. Мысль, что, какъ бы мы не увеличивали число сторонъ многоугольниковъ, мы никогда не достигнемъ площади круга, не смотря на то, что мы къ ней приближаемся все болѣе и болѣе и какъ угодно близко, создаетъ въ нашемъ воображенiи желанiе пополнить этотъ пробѣлъ, лежащiй между дѣйствительностiю и идеаломъ, и мы принуждены психологически сдѣлать безконечно-малый или безконечно-большой шагъ и сказать: кругъ есть многоугольникъ съ безконечно-большимъ числомъ малыхъ сторонъ Древнiе не сдѣлали этого шага; пока существовали греческiе геометры, они не перешли границы отдѣляющей ихъ смутное представленiе о безконечномъ отъ вполнѣ правильнаго и чуждаго возраженiя *понятiя о немъ*.

Новѣйшiе математики, при нахожденiи соотношенiя между площадями круговъ, говорятъ, что такъ какъ вписанные въ кругъ многоугольники относятся какъ квадраты дiаметровъ, то и круги, какъ многоугольники съ безконечнымъ числомъ сторонъ находятся въ томъ же отношенiи. Безъ сомнѣнiя въ умѣ греческихъ геометровъ существовало подобное же представленiе, и несомнѣнно, изъ соотношенiя многоугольниковъ, что они въ умѣ дѣлали заключенiе о подобномъ же соотношенiи для площадей круговъ; но эта внутренняя увѣренность была для нихъ недостаточна; они стремились къ доказательству вполнѣ строго-логическому, неопровержимому, но такого доказательства здѣсь не могло быть, такъ какъ самый путь, на которомъ

создалось *это предложеніе*, былъ доступенъ возраженіямъ; здѣсь могло быть только доказательство непрямое. Такимъ образомъ въ этомъ мѣстѣ способа исчерпываній находится доказательство невозможности того, что постоянное отношеніе описанныхъ и вписанныхъ многоугольниковъ не можетъ разниться отъ отношенія соотвѣтствующихъ криволинейныхъ поверхностей.

Евдемъ, ученикъ Аристотеля, первый собралъ и издалъ сочиненія своего наставника. Онъ написалъ „Исторію Геометріи и Астрономіи", отъ этого сочиненія остались только отрывки сохраненные Прокломъ, Симпликіемъ, Теономъ изъ Смирны и др Изъ этихъ ничтожныхъ отрывковъ было почерпнуто все извѣстное о развитіи математическихъ наукъ до Аристотеля.

Теофрастъ, также ученикъ Аристотеля, написалъ нѣсколько сочиненій по математикѣ; всѣ эти сочиненія утеряны, до насъ дошли только заглавія ихъ именно: „Исторія Геометрія" въ четырехъ книгахъ, „Исторія Астрономіи" въ шести книгахъ и „Исторія Ариѳметики" въ одной книгѣ. Нѣкоторые полагаютъ, какъ выше было сказано, что Теофрасту приписываютъ написанное Евдемомъ.

Александрійская школа.

Платоновскій періодъ былъ самый блестящій въ исторіи человѣческаго развитія. Къ этому періоду принадлежали Платонъ, Сократъ и Аристотель, какъ представители философіи; Пиндаръ, Софоклъ, Еврипидъ, Эсхилъ и Аристофанъ, какъ представители поэзіи; Демосѳенъ и Эсхинъ —краснорѣчія; Ѳукидидъ и Ксенофонтъ -исторіи; Гиппократъ—медицины; Апеллесъ, Фидіасъ и Пракситель—живописи и зодчества; Периклъ и Алкивіадъ—блестящаго образованія; Эпаминондъ —военнаго искусства и доблести. Какой вѣкъ можетъ сравниться съ вѣкомъ Перикла? Вѣкъ Августа—это рабское подражаніе Грекамъ — и то лишь въ исторіи и поэзіи. Вѣкъ Медичисовъ и Людовика XIV — это возрожденіе наслѣдства, оставленнаго Греками и зарытаго невѣжествомъ среднихъ вѣковъ. Прекрасный климатъ страны, окруженной морями, обширное развитіе береговъ, живой характеръ, здоровая натура націи и политическое устройство способствовали широкому развитію торговли и благосостоянію, а неожиданный успѣхъ персидской войны, далъ поводъ Грекамъ считать себя первой націею въ мірѣ. Эти причины объясняютъ, до нѣкоторой степени, тотъ громадный шагъ въ наукахъ и искусствахъ, который Эллины сдѣлали въ такой ничтожный промежутокъ времени.

Завоеванія Александра Великаго перенесли центръ научной дѣятельности изъ Аѳинъ въ Александрію. Громадная монархія, основанная Алексан-

дромъ въ трехъ частяхъ свѣта, распалась; но сѣмена посѣянные геніемъ Александра, съумѣвшаго соединить столько народовъ, принесли плодъ. По мѣрѣ того какъ сглаживались особенности, прирожденныя національному духу Грековъ, по мѣрѣ того какъ творческій духъ терялъ въ своей глубинѣ и блескѣ, сношенія разныхъ народовъ между собою способствовали новому направленію. Изученіе природы заняло одно изъ первыхъ мѣстъ, и такимъ образомъ попытки объяснить всю совокупность явленій природы сдѣлались болѣе плодотворными. Почти во всѣхъ частяхъ громадной монархіи попыткамъ этимъ много содѣйствовали государи рѣдкаго достоинства. Въ этомъ отношеніи Египту, благодаря своему счастливому географическому положенію, принадлежитъ первое мѣсто; этому много содѣйствовалъ Птоломей, искусный сподвижникъ Александра, которому одному удалось создать сильное государство. Птоломей и его потомки съумѣли привлечь въ Александрію, основанную Александромъ Великимъ, большую часть замѣчательныхъ людей того времени. Птоломеи—эти фараоны греческаго происхожденія, потомки счастливаго полководца, во всемъ содѣйствовали просвѣщенію—они его не боялись. Первые три Птоломея, царствовавшіе въ продолженіи одного столѣтія, были друзья наукъ; великолѣпныя учрежденія, основанныя ими для содѣйствія развитію умственной дѣятельности, непрерывныя старанія ихъ расширить морскую торговлю,—послужили къ ознакомленію съ многими странами и къ болѣе близкому ознакомленію съ явленіями природы. Ни одинъ изъ народовъ древняго міра, до Птоломеевъ, не достигъ въ этомъ направленіи, такой высокой степени развитія. Всѣ предпріятія и всѣ учрежденія Птоломеевъ, имѣвшія цѣлью расширеніе торговли или развитіе наукъ, исходили изъ одной мысли: непреодолимое влеченіе ко всему отдаленному и всемірному, стремленіе соединить въ одно цѣлое всѣ разбросанные факты, желаніе собрать вмѣстѣ различныя воззрѣнія на міръ и на соотношенія между явленіями природы. Такое плодотворное стремленіе греческаго духа, издавна готовившееся, проявилось величественнымъ образомъ въ экспедиціи Александра Македонскаго, въ его стремленіи соединить Западъ съ Востокомъ *).

Стремленіе это достигло наибольшаго своего развитія въ эпоху Птоломеевъ; безъ сомнѣнія этому много способствовали разнообразіе и избытокъ

*) Походъ Александра Великаго еще тѣмъ замѣчателенъ, что онъ былъ первымъ, который сопровождали ученые по самымъ разнообразнымъ отраслямъ знаній, въ экспедиціи принимали участіе: естествовѣды, геометры, историки и художники. Вліяніе Аристотеля на своего ученика не прошло безъ слѣда. Во главѣ ученыхъ стоялъ *Каллисѳенъ*, родственникъ Аристотеля, извѣстный своими сочиненіями по ботаникѣ и изслѣдованіями объ устройствѣ органа зрѣнія.

наблюденій. Развитію естественныхъ наукъ и всѣмъ потребностямъ опытныхъ наукъ вообще, важнымъ подспорьемъ служили сношенія Египта съ отдаленнѣйшими странами, экспедиціи въ Еѳіопію, предпринимаемыя на средства государства, громадныя охоты для ловли дикихъ звѣрей, устройство большихъ звѣринцевъ, при царскихъ дворцахъ Бруціума, наполненныхъ рѣдкими животными. Но не въ этомъ только состояла особенность эпохи Птоломеевъ, равно какъ и всей Александрійской школы, которая слѣдовала принятому ею направленію до IV столѣтія нашей эры; въ это время меньше стремились къ непосредственному наблюденію явленій природы, а болѣе къ собиранію, часто съ большимъ трудомъ, существующихъ фактовъ, къ расположенію ихъ въ системы, къ ихъ сравненію и примѣненію. Въ теченіи многихъ столѣтій почти не было обращено вниманія на непосредственное наблюденіе явленій, до самаго Аристотеля изученіе явленій зависѣло отъ произвольныхъ воззрѣній, отъ догадокъ ни на чемъ не основанныхъ и отъ различныхъ, противорѣчащихъ другъ другу, гипотезъ. Въ эпоху-же Александрійской школы стали придавать болѣе значенія опытнымъ даннымъ, пріобрѣтенныя познанія были провѣряемы и изучаемы. Философія природы стала менѣе смѣла въ своихъ объясненіяхъ явленій природы, менѣе фантастична въ своихъ представленіяхъ о причинахъ явленій, она все болѣе и болѣе сближалась съ опытомъ и вмѣстѣ съ нимъ слѣдовала индуктивному пути.

Съ другой стороны, попытки въ стремленіи къ ознакомленію съ началами наукъ, требовали самыхъ разнообразныхъ познаній. Въ сочиненіяхъ знаменитыхъ мыслителей такое разнообразіе познаній принесло плоды, за то часто, въ эпоху когда воображеніе утратило въ своей силѣ, изложеніе стало непонятнымъ и безжизненнымъ. Недостатокъ въ формѣ изложенія, отсутствіе живости изложенія и красоты слога, вотъ упреки, по справедливости дѣлаемые многимъ ученымъ Александрійской школы. Развитію наукъ много способствовали Птоломеи основаніемъ громадныхъ учрежденій, каковы Александрійскій „*Музеумъ*" и образцовая при немъ обсерваторія, и обѣ библіотеки *Бруціума* и *Ракотиса* *), прилегавшихъ къ царскимъ дворцамъ и заключавшими до 700000 свертковъ рукописей, и сближеніемъ многочисленныхъ ученыхъ, воодушевленныхъ любовью къ наукамъ. Многостороннее образованіе этихъ ученыхъ не мало способствовало сравненію наблюденій и обобщенію воззрѣній на природу. Ученый институтъ, основанный двумя первыми Птоломеями, имѣлъ то преимущество передъ учрежденіями подоб-

---

*) Библіотека Бруціума есть болѣе древняя. Библіотека Ракотисъ занимала часть храма Сераписа и была присоединена къ Музеуму. Впослѣдствіи библіотека Ракотисъ увеличилась Пергамской библіотекой, благодаря щедрости Антонія.

наго рода, что члены его работали вполнѣ свободно въ самыхъ разнообразныхъ отрасляхъ знаній и не подчинялись какому нибудь опредѣленному направленію; живя въ странѣ чужой, окруженные людьми различныхъ расъ, они всегда сохранили ту оригинальную особенность, свойственную греческому духу, и ту глубокую проницательность во взглядахъ, которыя суть однѣ изъ его отличительныхъ чертъ.

Опытъ и наблюденіе были единственными источниками, изъ которыхъ должны были выйти наука о землѣ и небесныхъ пространствахъ; но, не смотря на такую особенность, ученые Александрійской школы, занимаясь собираніемъ матеріаловъ, не пренебрегли, въ должной мѣрѣ, и обобщеніями идей. Большая часть ученій философскихъ школъ Греціи, перенесенныя въ Нижній Египетъ, слишкомъ усвоили себѣ восточное направленіе и чрезъ-чуръ часто прибѣгали къ символическимъ объясненіямъ явленій природы; но за то математическія науки ученые Музеума считали самыми твердыми основаніями платоновскихъ воззрѣній; чистая математика, астрономія и механика шли рука объ руку. Въ это время всѣ познанія человѣчества, извѣстныя подъ именемъ *философіи*, стали раздѣлятся. Математика и астрономія, первыя отдѣлились отъ метафизики; болѣе долгое время еще оставались съ ней связаны естественныя науки; подобное раздѣленіе яснѣе всего обнаружилось въ Александрійской школѣ. Глубокое уваженіе Платона къ математическому развитію мышленія и его физіологическое воззрѣніе на всѣ организмы, были началомъ всего послѣдующаго прогресса науки о природѣ. Оба эти возрѣнія были путеводительною звѣздою, руководившей умъ человѣка въ теченіи многихъ столѣтій, среди заблужденіи присущихъ тому времени. Благодаря имъ не погибли начатки наукъ и здравыя силы ума.

Математикъ и астрономъ *Эратосѳенъ*, самый выдающійся изъ библіотекарей Александрійской библіотеки, воспользовался собранными матеріалами, находившимися въ его распоряженіи, и расположилъ ихъ въ систематическомъ порядкѣ въ своей *всеобщей географіи*. Онъ первый совершенно отдѣлилъ описаніе земли отъ баснословныхъ легендъ, онъ совершенно устранилъ изъ области географіи историческіе факты и хронологію, съ которыми былъ хорошо знакомъ, а науки эти до него занимали одно изъ видныхъ мѣстъ въ географіи; на мѣсто ихъ онъ ввелъ въ географію математическія данныя, въ видѣ размѣровъ материковъ и т. п. Эратосѳену также принадлежитъ первое *градусное измѣреніе*, произведенное имъ между Сіеной и Александріей, которое было предпринято для опредѣленія длины окружности земнаго шара. Попытка эта важна не по своимъ результатамъ, а какъ первая попытка узнать размѣры земнаго шара.

Такое же стремленіе къ обобщенію идей видно по блестящимъ успѣхамъ, сдѣланнымъ въ эпоху Птоломеевъ, научнымъ ознакомленіемъ съ не-

бесными пространствами. Стоитъ только припомнить имена, первыхъ александрійскихъ астрономовъ, *Аристила* и *Тимохариса* *), опредѣлившихъ положеніе неподвижныхъ звѣздъ; *Аристарха Самосскаго* **), который, будучи знакомъ съ старыми теоріями Пиѳагорейцевъ, пытался объяснить строеніе міра; онъ первый узналъ какъ громадны разстоянія, отдѣляющія нашу планету отъ неподвижныхъ звѣздъ: онъ также первый предугадалъ двойное вращеніе земли,—около своей оси и около солнца. Упомянемъ еще *Селевка* ***), который спустя столѣтіе послѣ Тимохариса, старался установить на новыхъ началахъ мнѣніе Аристарха,—предшественника Коперника. Вспомнимъ Гиппарха,—творца Астрономіи, какъ науки, сдѣлавшаго наибольшее число наблюденій изъ всѣхъ астрономовъ древняго міра. Гиппархъ между Греками первый устроилъ *астрономическія таблицы* и впервые замѣтилъ *предвареніе равноденствій*. Труды Гиппарха носятъ еще ту особенность, что онъ воспользовался явленіями, наблюдаемыми въ небесныхъ пространствахъ, для опредѣленія географическаго положенія мѣстъ. Эта связь между явленіями небесными и земными содѣйствовала единству идеи о вселенной. Новая карта свѣта, построенная Гиппархомъ, на основаніи карты Эратосѳена, основывается на астрономическихъ наблюденіяхъ.

Число знаменитыхъ математиковъ не ограничивается нѣсколькими астрономами—наблюдателями Александрійскаго Музеума. Вѣкъ Птоломеевъ былъ самымъ блистательнымъ періодомъ для наукъ математическихъ; въ этомъ вѣкѣ жили: *Евклидъ*, первый поставившій математику на ряду наукъ; *Аполлоній Пергейскій* и *Архимедъ*, посѣтившій Египетъ и который, при посредствѣ *Конона*, можетъ быть также причисленъ къ ученымъ Александрійской школы. Длинный путь ведущій отъ геометрическаго анализа, какъ его понималъ Платонъ, и тріады Менайхма, до временъ Кеплера, Тихо-де-Браге, Ньютона, Эйлера, Клеро, Даламберта, Лагранжа и Лапласа былъ рядомъ открытій въ области наукъ математическихъ, безъ которыхъ законы управляющіе движеніемъ небесныхъ тѣлъ и ихъ взаимное соотношеніе между собою были бы на всегда сокрыты отъ человѣчества.

*) *Аристилъ* и *Тимохарисъ* извѣстны намъ по ссылкамъ автора „Альмагесты". Они первые возымѣли мысль составить *звѣздный каталогъ*. Наблюденія, произведенныя ими очень цѣнны для исторіи астрономіи. Наблюденія ихъ обнимаютъ промежутокъ времени въ 26 лѣтъ, отъ 295 г. до Р. Х. Птоломей называетъ ихъ *древними наблюдателями*.

**) *Аристархъ Самосскій*, жившій около 264 г. до Р. Х., авторъ астрономическаго сочиненія „О размѣрахъ и разстояніяхъ солнца и луны". Аристарху было извѣстно свойство треугольника, въ которомъ одинъ изъ угловъ раздѣленъ пополамъ. Віетъ неправильно приписываетъ это предложеніе Архимеду.

***) *Селевкъ*, современникъ Аристарха, родомъ изъ Вавилона, прозванный *математикомъ*, раздѣлялъ мнѣніе Аристарха о двойномъ движеніи земли. Онъ первый пытался объяснить приливы и отливы вліяніемъ луны.

Наконецъ, въ недавнее время (въ 1846 году), столь плодотворное всевозможными открытіями въ области наукъ, астрономъ Леверье (Le Verrier), при помощи однихъ только средствъ анализа, опредѣлилъ мѣсто, орбиту и массу планеты Нептунъ, прежде чѣмъ она была замѣчена въ телескопѣ.

Въ Александріи получили начало двѣ знаменитыя школы, имѣвшія преобладающее вліяніе на развитіе наукъ. Въ первой изъ нихъ господствовали математика и астрономія, это *первая Александрійская школа.* Во второй преобладало направленіе спекулятивное, причемъ къ старымъ ученіямъ Пиѳагора и Платона были примѣшаны новыя ученія (нео-пиѳагоризмъ и нео-платонизмъ), понятія древнихъ философовъ-геометровъ значительно измѣнились и преобразовались, и мало-по-малу, съ теченіемъ времени, изъ всего этого сложилась новая школа—*вторая Александрійская школа.*

Первая Александрійская школа.

Представителями первой Александрійской школы были: Евклидъ, Архимедъ и Аполлоній Пергейскій, величайшіе математики древняго міра.

Евклидъ. Эпоха, которою открываетъ собою Евклидъ была золотымъ вѣкомъ для Греческой математики. Жизнь Евклида *) почти намъ неизвѣстна. Мы знаемъ только, что онъ былъ однимъ изъ первыхъ ученыхъ, приглашенныхъ Птоломеемъ I Лагомъ, царствовавшимъ отъ 323 г. до 283 г. до Р. Х., и занялъ мѣсто преподавателя въ знаменитой Александрійской школѣ,— этомъ научномъ центрѣ того времени. Паппусъ изображаетъ Евклида человѣкомъ мягкаго характера, скромнымъ и вполнѣ независимаго въ своихъ отношеніяхъ къ Птоломею. На вопросъ Птоломея, нѣтъ-ли способовъ болѣе легкихъ и на его жалобы относительно встрѣчаемыхъ имъ трудностей, въ указанномъ ему Евклидомъ пути, Евклидъ будто-бы отвѣтилъ: „для царей нѣтъ особаго пути въ Геометріи". Полагаютъ, что Евклидъ прибылъ въ Александрію изъ Аѳинъ, или иного города Греціи. Все это передаетъ Проклъ въ своихъ комментаріяхъ на „Начала" Евклида. Сотоварищами Евклида, по словамъ автора „Альмагесты", были извѣстные астрономы Аристилъ и Тимохарисъ.

Болѣе подробныя свѣдѣнія о Евклидѣ мы находимъ у арабскихъ писателей. Извѣстный знатокъ арабской математической литературы, Кассири, въ первомъ томѣ своего сочиненія „Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis", приводитъ слѣдующее мѣсто изъ „Ученой хроники", неизвѣстнаго автора, конца XII столѣтія: „Евклидъ, сынъ Наукрата, сына Зенарха, извѣстный подъ именемъ геометра, ученый стараго времени, по своему происхожденію

*) Евклида долго смѣшивали съ философомъ Евклидомъ изъ Мегары, который былъ ученикомъ Сократа, только въ XVI столѣтіи недоразумѣніе это разъяснилось.

грекъ, по мѣстожительству сиріецъ, родомъ изъ Тира, обладалъ большимъ искусствомъ въ Геометріи, и т. д.".

Имя Евклида сдѣлалось извѣстнымъ всему міру благодаря его трактату по Геометріи подъ заглавіемъ „*Начала*" (στοιχεῖα). Сочиненіе это состоитъ изъ 15 книгъ, изъ коихъ первыя шесть заключаютъ Планиметрію; 7, 8 и 9 ариѳметику или правильнѣе теорію чиселъ; 10 ученіе о несоизмѣримыхъ величинахъ; 11, 12 и 13 Стереометрію и 14 и 15—о правильныхъ тѣлахъ *). Изложимъ вкратцѣ содержаніе каждой изъ книгъ „Началъ".

Книга I содержитъ: основныя свойства прямолинейныхъ фигуръ на плоскости, о пересѣкающихся прямыхъ линіяхъ, составляющихъ съ третьею треугольникъ, равенство треугольниковъ, о параллельныхъ прямыхъ, о параллелограммѣ; свойства параллелограмма и треугольника; равенство несовмѣстимыхъ фигуръ, т. е. равновеликія фигуры. Предложеніе 45 показываетъ какъ превратить всякую прямолинейную фигуру въ параллелограмъ, имѣющій углы, равные даннымъ; наконецъ первая книга заканчивается предложеніями 47 и 48, это знаменитая теорема Пиѳагора и ей обратная.

Книга II есть слѣдствіе изъ пиѳагоровой теоремы. Содержаніе ея образованіе квадратовъ изъ квадратовъ и прямоугольниковъ въ различныхъ сочетаніяхъ, въ видѣ суммы и разности; построеніе квадрата равновеликаго всякой данной прямолинейной фигурѣ. Большая часть изъ предложеній этой книги выражаютъ геометрически алгебраическія тождества.

Книга III содержитъ ученіе о кругѣ; предложенія относящіяся къ соприкасанію двухъ круговъ или прямой и круга; соотношеніе между величиною угловъ и отрѣзками круга. Въ концѣ этой книги изложены свойства двухъ взаимно-пересѣкающихся прямыхъ, пересѣкающихъ кругъ, которыхъ отрѣзки составляютъ равновеликія прямоугольники.

Книга IV содержитъ предложенія: какъ по данному треугольнику вписать въ кругъ и описать около него треугольникъ подобный данному, какъ построить равнобедренный треугольникъ, котоrо-бы углы при основаніи были вдвое больше угла при вершинѣ, какъ вписать въ кругъ и описать около него правильные: треугольникъ, четыреугольникъ, пятиугольникъ, шестиугольникъ и пятнадцатиугольникъ.

Книга V содержитъ ученіе о пропорціяхъ, всѣ свойства доказываются на прямыхъ линіяхъ, но прямыя линіи не составляютъ фигуръ. Можетъ быть Евклидъ имѣлъ въ виду указать на двѣ точки зрѣнія, съ которыхъ можно смотрѣть на величины, именно *геометрическую* и *ариѳметическую*.

Книга VI содержитъ ученіе объ отношеніи, подобіи фигуръ и пропорціональности линій.

*) Книги 14 и 15-ю „Началъ" нѣкоторые приписываютъ *Гипсиклу*, александрійскому астроному, жившему между II и VI в. послѣ Р. Х.

Книга VII содержитъ признаки, по которымъ узнаютъ имѣютъ-ли числа общихъ дѣлителей или неимѣютъ. Затѣмъ говорится о числахъ, составленныхъ изъ другихъ чиселъ, какъ третія изъ четвертыхъ, это ученіе *о пропорціи чиселъ.* Въ концѣ этой книги показано какъ найти наименьшее кратное данныхъ чиселъ.

Книга VIII содержитъ дальнѣйшее ученіе о пропорціяхъ, члены которыхъ сами состоятъ изъ произведеній, по большей части одинаковыхъ множителей. Въ этой книгѣ мы встрѣчаемъ термины: *плоское число,* состоящее изъ произведенія двухъ чиселъ; такимъ числомъ выражается площадь фигуры; *тѣлесное число,* состоящее изъ произведенія трехъ чиселъ; *квадратное число* и *кубическое число.*

Книга IX содержитъ дальнѣйшія свойства чиселъ; разобраны свойства *простыхъ чиселъ,* входящихъ въ пропорцію. Въ предложеніи 20 доказывается, что простыхъ чиселъ существуетъ безконечно много. Въ предложеніи 35 показано суммированіе геометрическихъ строкъ въ примѣненіи къ такимъ строкамъ, которыя произошли отъ единицы, постепеннымъ удваиваніемъ. Предложеніе 36 снова изслѣдуетъ простыя числа, которыя произошли отъ суммованія тѣхъ же строкъ.

Книга X содержитъ ученіе о несоизмѣримыхъ величинахъ. Въ началѣ этой книги находится слѣдующее замѣчательное предложеніе: „даны двѣ неравныя величины, если отъ большей отымемъ часть, большую ея половины, отъ остатка, снова отымемъ часть, большую половины и т. д., то наконецъ дойдемъ до части меньшей меньшей изъ данныхъ величинъ"; предложеніе это есть основаніе *теоріи исчерпыванія* древнихъ; у древнихъ математиковъ она замѣняла теорію безконечно-малыхъ новѣйшихъ математиковъ. Къ сожалѣнію часто не обращаютъ должнаго вниманія на первое предложеніе X-й книги. За этимъ предложеніемъ слѣдуютъ другія, но онѣ прямаго отношенія къ нему неимѣютъ, содержаніе ихъ свойства соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ величинъ. Послѣднее предложеніе этой книги есть доказательство несоизмѣримости стороны квадрата съ его діагональю.

Эта книга въ настоящее время не имѣетъ значенія, но замѣчательна какъ образецъ самаго глубокаго синтеза древнихъ геометровъ. Техническіе термины, встрѣчаемые въ этой книгѣ пояснены нами въ примѣчаніяхъ къ X-й книгѣ „Началъ", въ нашемъ сочиненіи „Начала Евклида".

Книга XI содержитъ предложенія, относящіяся къ свойствамъ параллельныхъ и наклонныхъ линій, плоскостей и угловъ. Въ концѣ книги авторъ переходитъ къ *параллелепипеду;* въ послѣднемъ предложеніи этой книги дано общее понятіе о *призмахъ.*

Книга XII содержитъ ученіе о измѣреніи объемовъ: пирамиды, призмы, конуса, цилиндра и наконецъ шара. Собственно Евклидъ не вычи-

сляетъ объемовъ тѣлъ, въ образованіи которыхъ учавствуетъ кругъ. Подобнаго вычисленія Евклидъ не дѣлаетъ, по той простой причинѣ, что въ „Началахъ" ничего не сказано о измѣреніи круга. Далѣе, въ этой книгѣ, показано, что площади круговъ относятся между собою какъ квадраты діаметровъ; что пирамида есть треть призмы, имѣющей съ ней одну высоту и равновеликія основанія; подобное соотношеніе указано также для цилиндра и конуса. Мы видѣли выше, что эти предложенія были уже извѣстны Евдоксу. Но самое интересное въ этой книгѣ, это приложеніе метода исчерпываній, именно, что площади круговъ относятся какъ квадраты ихъ діаметровъ.

Книга XIII, содержаніе ея относится къ тому же предмету, что и содержаніе IV-й. Въ ней разсмотрѣны правильные многоугольники, вписанные въ кругъ и описанные около него, а главнымъ образомъ пятиугольники и треугольники. Этими фигурами Евклидъ пользуется для составленія тѣлъ, вписанныхъ въ шаръ. Книга эта заканчивается важнымъ замѣчаніемъ, что не существуетъ болѣе пяти правильныхъ тѣлъ, именно: тетраедра, октаедра и икосаедра, составленныхъ изъ треугольниковъ; куба—изъ четыреугольниковъ; и додекаедра изъ пятиугольниковъ.

Книга XIV и XV содержатъ предложенія, относящіяся къ правильнымъ тѣламъ, вписаннымъ однѣ въ другія.

„Начала" Евклида въ теченіи многихъ столѣтій были единственнымъ руководствомъ по Геометріи въ школахъ, они были основаніемъ математическаго образованія всѣхъ знаменитыхъ людей и великихъ математиковъ, каковы: Паскаль, Ферма, Декартъ, Лейбницъ, Ньютонъ, Лагранжъ и многіе другіе. Сочиненіе Евклида было переведено на большую часть языковъ и въ настоящее время извѣстно нѣсколько сотъ изданій „Началъ" на различныхъ языкахъ. Въ концѣ нашего сочиненія „Начала Евклида" помѣщенъ списокъ различныхъ изданій „Началъ", отъ самаго основанія книгопечатанія по 1880 годъ. Въ этомъ спискѣ помѣщено до 460 различныхъ изданій, расположенныхъ въ хронологическомъ порядкѣ. Изъ этого списка видно, что 155 изданій было на латинскомъ и греческомъ языкѣ, 142—на англійскомъ, 48 на нѣмецкомъ, 38—на французскомъ, 27—на итальянскомъ, 14—на голландскомъ, 5—на русскомъ, 2—на польскомъ, и 26 на различныхъ другихъ языкахъ, какъ то на шведскомъ, финскомъ, испанскомъ, португальскомъ, датскомъ, китайскомъ, арабскомъ и т. п. *).

*) Первое печатное изданіе „Началъ" Евклида, появилось въ Венеціи въ 1482 г., на латинскомъ языкѣ. Изданіе это есть переводъ на латинскій, съ арабскаго языка, „Началъ", сдѣланный около 1130 г. Ателардомъ, съ примѣчаніями Кампануса. Греческій текстъ „Началъ" съ примѣчаніями Прокла Діадоха напечатанъ въ первый разъ въ 1533 г. въ Базелѣ. Изъ

Такое множество изданій ясно показываетъ какимъ уваженіемъ пользовались „Начала“ Евклида, равно какъ ихъ достоинство, что подтверждается еще и тѣмъ обстоятельствомъ, что въ настоящее время снова начинаютъ вводить это сочиненіе въ тѣхъ странахъ, гдѣ на время оно было замѣнено другими сочиненіями по Геометріи, изъ которыхъ ни одно не было въ состояніи замѣнить классическое произведеніе эллинскаго духа. Совершенно справедливо замѣтилъ Боссю въ своей „Исторіи Математики“: „Jamais livre de science n'a eu un succès comparable à celui des Éléments d'Euclide. Ils ont été enseignés exclusivement, pendant plusieurs siècles, dans toutes les écoles de mathématiques, traduits et commentés dans toutes les langues: preuve certaine de leur excellence“.

Въ статьѣ „Евклидъ“ (см. „Начала Евклида“ стр. 77) и въ началѣ введенія (см. тамъ же, стр. 1—7) мы подробно изложили содержаніе, достоинства и недостатки сочиненія „Начала“; въ самомъ текстѣ, въ примѣчаніяхъ, мы указали на замѣчанія и поправки, сдѣланныя новѣйшими геометрами, такъ что здѣсь намъ ничего не остается больше прибавить объ этомъ замѣчательномъ сочиненіи; скажемъ только о его историческомъ значеніи. Мы уже выше замѣтили, что до Евклида было написано нѣсколько сочиненій по элементарной Геометріи, именно: *Анаксимандромъ, Гераклитомъ* изъ Понта, *Гиппократомъ Хіосскимъ, Леономъ, Ксенократомъ* и *Теудіемъ* изъ Магнезіи. Слѣдовательно „Начала“ Евклида должны быть полнымъ выраженіемъ того, что было сдѣлано до Евклида, и дѣйствительно изъ нихъ видно какой громадный шагъ сдѣлала Элементарная Геометрія отъ Өалеса до Евклида— она была вполнѣ закончена, какъ относительно содержанія, такъ и относительно всѣхъ научныхъ средствъ, т. е. методовъ. Въ „Началахъ“ мы находимъ: *опредѣленія, общія понятія* (аксіомы), *допущенія* и три рода предло

новѣйшихъ изданій полнаго собранія сочиненій Евклида самыя лучшія слѣдующія: полное собраніе сочиненій Евклида подъ заглавіемъ „Εὐκλείδου τὰ σωζόμενα“, изданное въ 1703 г., въ Оксфордѣ, Давидомъ Грегори (David Gregory); изданіе это составлено на основаніи греческихъ рукописей, завѣщанныхъ Савилемъ (H. Savile) Оксфордскому университету. Изданіе сочиненій Евклида на греческомъ, латинскомъ и французскомъ языкахъ, напечатанное въ 1814 г. въ Парижѣ Пейраромъ (Peyrard), составлено по рукописи IX в., принадлежащей Ватиканской библіотекѣ. Кромѣ этой рукописи, Пейраръ воспользовался еще 22 другими рукописями. Также пользуется извѣстностью греческое изданіе „Началъ“, напечатанное въ 1826 г. въ Берлинѣ Августомъ; при составленіи этого изданія Августъ воспользовался 65 рукописными списками этого сочиненія. Переводъ „Началъ“, сдѣланный Насиръ-Еддиномъ на арабскій языкъ, былъ напечатанъ въ Римѣ въ 1594 г.

Въ концѣ сочиненія „Начала Евклида“ приложенъ списокъ всѣхъ изданій „Началъ“ Евклида, которыя намъ удалось собрать на основаніи различныхъ указаній и каталоговъ извѣстнѣйшихъ библіотекъ Европы. Мы отыскали болѣе 450 изданій.

женій: *теоремы*, *проблемы* и *поризмы*; послѣдній родъ предложеній долгое время оставался загадочнымъ, а въ настоящее время разъясненъ вполнѣ, какъ увидимъ ниже. Всѣ методы: *синтезъ*, *анализъ*, *апагогическій* (приведеніе къ абсурду) и *методъ предѣловъ*. Въ группировкѣ аксіомъ сдѣлана разница, однѣ названы *общими понятіями*, а другія *допущеніями*. Между *аксіомой* или *общимъ понятіемъ* и *допущеніемъ* разница состоитъ въ томъ, что *аксіома* есть очевидная теорема, которую нельзя доказать, вслѣдствіе своей простоты она составляетъ основаніе, а *допущеніе* есть теорема не очевидная, но которую нельзя доказать, по неуловимости ея связи съ аксіомами и теоремами изъ нихъ вытекающими. Извѣстный *постулатъ* или одиннадцатая аксіома Евклида есть *допущеніе*, которое необходимо сдѣлать для теоріи параллельныхъ линій. Одно непонятно, почему Евклидъ поставилъ свое *допущеніе* въ началѣ, гдѣ оно остается непонятнымъ, между тѣмъ, будучи поставлено въ началѣ параллельныхъ линій, послѣ той теоремы, въ которой доказывается: что если, двѣ прямыя пересѣченныя третьею, составляютъ съ нею равные перекрестные углы, то такія прямыя не встрѣчаются (кн. 1, пр. 27), оно дѣлается почти совершенно яснымъ. Это историческій вопросъ, который трудно рѣшить. Кромѣ комментарій Прокла, который предлагаетъ доказательство этого допущенія, мы объ этомъ предметѣ отъ древнихъ писателей ничего не имѣемъ. Единственное объясненіе этому можно дать только слѣдующее: Евклидъ, а можетъ быть и всѣ авторы Элементовъ до Евклида, группировали предложенія согласно ихъ характеру, т. е. *опредѣленія, общія понятія, допущенія* и *теоремы*, подобная группировка логична, но грѣшитъ противъ ясности. Очень жаль, что изъ всего того, что было писано, объ этомъ предметѣ, до Евклида до насъ ничего не дошло. Строгая и тонкая критика прошлаго и настоящаго столѣтій указала на достоинства и недостатки „Началъ" и вмѣстѣ съ этимъ склонилась, въ настоящее время, къ тому мнѣнію, что лучшаго руководства въ школахъ быть не можетъ. Представителями такихъ мнѣній служатъ: во Франціи *Гуэль* (Houel), въ Германіи *Бальцеръ* (Baltzer), въ Италіи *Бріоски* (Brioschi) и *Бетти* (Betti), въ Англіи— Евклидъ всегда служилъ и служитъ въ настоящее время руководствомъ въ школахъ.

Кромѣ „Началъ" Евклидъ написалъ еще слѣдующія сочиненія, изъ которыхъ дошли до насъ: „Данныя" (Δεδομένα), „Феномены" (Φαινόμενα) *), „Оптика" (Ὀπτικά), „Катоптрика" (Κατοπτρικά) **), „Начала музыки" (Κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις) и „Гармоническія правила" (Κατατομὴ κάνονος). Не дошли

*) „О феноменахъ"—сочиненіе астрономическое; сочиненіе это важно какъ историческій памятникъ, указывающій состояніе астрономіи во время Евклида.

**) Первое предложеніе этого сочиненія: уголъ паденія равенъ углу отраженія.

до насъ слѣдующія сочиненія „Поризмы" (Πορίσμα) въ трехъ книгахъ; „О дѣленіи" (Περὶ διαιρέσεων), „Перспектива" въ двухъ книгахъ; „Коническія сѣченія" въ четырехъ книгахъ; „Мѣста на поверхности" и „О ложныхъ представленіяхъ" (Περὶ ψευδαρίων).

Въ сочиненіи „О дѣленіи" Евклидъ дѣлитъ различныя плоскія фигуры прямыми линіями въ данномъ отношеніи. Сочиненіе это не представляетъ ничего замѣчательнаго. Кромѣ поименованныхъ сочиненій Евклиду приписываютъ еще „De divisionibus" и отрывокъ „De Levi et Ponderoso". Первое изъ нихъ извѣстно только въ арабскомъ переводѣ. Арабы считаютъ авторомъ этого сочиненія Могамеда Багдадскаго; по своему содержанію оно, по предположенію *Ди* (Dee), нашедшаго эту рукопись въ 1563 г., заключаетъ то же, что и сочиненіе „О дѣленіи". Предположеніе это подтверждается еще въ настоящее время тѣмъ, что Вепке (Woepcke) нашелъ въ Парижѣ другую арабскую рукопись, почти такого же содержанія, въ которой прямо говорится, что это сочиненіе принадлежитъ Евклиду. Содержаніе „De divisionibus"—дѣленіе различныхъ многоугольниковъ. Сочиненіе „De Levi et Ponderoso" дошло до насъ въ латинскомъ переводѣ, оно ничтожно по своему содержанію и можно почти съ увѣренностью сказать, что оно написано не Евклидомъ.

Мы выше сказали, что сочиненіе „О ложныхъ представленіяхъ" до насъ не дошло; объ этой потерѣ приходится сожалѣть, такъ какъ оно заключало въ себѣ много интереснаго, представляя вѣроятно введеніе къ изученію Геометріи. По словамъ Прокла, „Евклидъ оставилъ послѣ себя самые остроумные методы, при посредствѣ которыхъ начинающій изученіе Геометріи получаетъ навыкъ въ нахожденіи ложныхъ заключеній и даетъ возможность ихъ избѣжать; методы свои онъ изложилъ въ сочиненіи ψευδάρια. Методы свои Евклидъ перечисляетъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, при чемъ упражняетъ наше мышленіе различными предложеніями, противоставляя ложному дѣйствительное и доказывая невѣрное при помощи опыта". Вотъ и все, что намъ извѣстно объ этомъ сочиненіи Евклида.

Самыя замѣчательныя сочиненія Евклида послѣ „Началъ" суть: „*Данныя*" и „*Поризмы*". Первое изъ этихъ сочиненій до насъ дошло, оно состоитъ изъ 95 предложеній. „Данныя" пользовались большимъ уваженіемъ Ньютона. Второе сочиненіе „Поризмы" утеряно и только на основаніи сказаннаго въ „Математическихъ коллекціяхъ" Паппуса, ученые могли съ большимъ трудомъ разъяснить, что такое *поризмъ* и содержаніе этого сочиненія, которое по отзыву Паппуса служило къ изслѣдованію и рѣшенію задачъ. Изъ сочиненія Паппуса видно, что „Поризмы" состояли изъ трехъ книгъ, въ первыхъ двухъ разсматривается *прямая линія*, а въ третьей—

кругъ. Паппусъ приводитъ 171 слѣдствіе, вытекающія изъ поризмъ, не приводя условій; слѣдствія эти онъ дѣлитъ на 29 родовъ *).

Разсмотримъ подробнѣе сочиненія Евклида „Данныя“ и „Поризмы“. Чтобы уяснить характеръ этихъ сочиненій, мы опредѣлимъ, что такое теорема и что такое проблема, или задача? и разсмотримъ, въ какихъ формахъ каждое изъ этихъ предложеній можетъ быть выражено. Эти формы дадутъ извѣстную характеристику теоремѣ, которая, вслѣдствіе этого, и получитъ различныя названія и особенный характеръ въ приложеніяхъ къ геометрическимъ изслѣдованіямъ, т. е. составитъ методъ. Изъ такой характеристики теоремы получили начало сочиненія: „Данныя“ и „Поризмы“.

Теорема есть предложеніе, въ которомъ требуется доказать *извѣстную* истину, выраженную въ *гипотезѣ*.

Примѣръ. Если изъ данной точки, внѣ круга, проведемъ сѣкущую, то площадь прямоугольника, заключеннаго между цѣлой сѣкущей и внѣшнимъ отрѣзкомъ, равна площади квадрата, построеннаго на касательной къ кругу, проведенной изъ данной точки.

Здѣсь въ гипотезѣ сказано, что нужно доказать, а именно, что площадь прямоугольника равна площади квадрата.

Проблема или *задача* есть предложеніе, въ которомъ требуется найти неизвѣстную величину.

Примѣръ. Найти, чему равна площадь прямоугольника, построеннаго на цѣлой сѣкущей, проведенной изъ данной точки внѣ круга, и внѣшнемъ ея отрѣзкѣ?

Въ теоремѣ истина, которую требуется доказать, сказана—она извѣстна, а въ проблемѣ она неизвѣстна—ее требуется найти.

Изъ этого видимъ, что эти два рода предложеній различаются только формой. Евклидъ въ своихъ „Началахъ“ ихъ не отличаетъ, всѣ предложенія у него суть—Πρότασις.

Если въ теоремѣ вмѣсто истины, которую требуется доказать, сказано просто, что она есть величина *данная*, въ силу гипотезы, то теорема будетъ *данная* или *поризмъ*, смотря потому будетъ-ли теорема относиться къ *одной величинѣ* или къ величинѣ *перемѣнной*, подлежащей извѣстному закону.

*) Затѣмъ въ сочиненіи Паппуса находится цѣлый рядъ *леммъ*, служившихъ къ тому, чтобы уяснить что такое *поризмы*, изъ такихъ леммъ дошло до насъ 38. Кромѣ того у него помѣщено еще содержаніе трехъ книгъ „Поризмъ“. Къ сожалѣнію леммы Паппуса часто совершенно не относятся къ вопросу, для котораго онъ ихъ приводитъ. Онъ часто увлекается и совершенно отходитъ отъ главной цѣли. Это видно по леммамъ, относящимся къ нѣкоторымъ предложеніямъ, дошедшихъ до насъ сочиненій. Поэтому нельзя было сказать à priori, дѣйствительно-ли приведенныя Паппусомъ леммы имѣютъ прямое отношеніе къ „Поризмамъ“ Евклида. Изъ этого можно видѣть какія затрудненія нужно было преодолѣть, чтобъ возстановить „Поризмы“.

Геометрическая величина можетъ быть дана относительно *величины, положенія* и *рода.*

Слѣдовательно *данныя* суть *поризмы*, въ тѣсномъ смыслѣ, а *поризмы* суть неполныя теоремы, такъ что поризмъ обращается въ теорему, когда то, что кроется подъ словомъ *данная величина* или положеніе, будетъ опредѣлено. Пояснимъ это примѣрами:

Данная. Если дано положеніе двухъ прямыхъ линій, то точка ихъ пересѣченія *дана.*

Данная. Если изъ данной точки проведена прямая, составляющая данный уголъ съ данною прямою, то положеніе проведенной прямой *дано.*

Данная. Если въ данномъ кругѣ проведена хорда, отсѣкающая сегментъ, содержащій данный уголъ, то хорда будетъ *дана*. Если въ этихъ *данныхъ* вмѣсто слово *дана* будетъ опредѣлена вполнѣ *величина* или *положеніе*, то *данная* сдѣлается обыкновенной теоремой.

Примѣры поризмъ.

Поризмъ. Если вершина угла лежитъ на окружности круга, а стороны упираются на діаметръ, то уголъ есть *данная* величина. Это поризмъ, но если мы скажемъ, что этотъ уголъ *прямой*, то это будетъ теорема.

Поризмъ. Если на діаметрѣ круга возьмемъ двѣ точки, которыя дѣлили бы его гармонически и соединимъ эти точки съ какою нибудь изъ точекъ окружности, то эти разстоянія находятся между собою въ *данномъ* отношеніи. Это поризмъ, но если скажемъ, что это отношеніе равно отношенію разстояній этихъ точекъ отъ одного изъ концевъ діаметра, то это будетъ теорема.

Поризмъ. Въ кругѣ, уголъ подъ которымъ видна изъ центра часть каждой изъ касательныхъ, заключенная между двумя данными касательными, есть *данной* величины. Это поризмъ, но если мы скажемъ, что этотъ уголъ равенъ углу между прямыми, проведенными изъ центра, къ точкѣ пересѣченія данныхъ касательныхъ и къ точкѣ касанія одной изъ этихъ же касательныхъ, то это будетъ теорема.

Слѣдовательно *поризмъ* есть не полная теорема, которая дѣлается полною, если слова „данная величина" или „положеніе" будутъ замѣнены тою величиною или положеніемъ, которыя слѣдуютъ изъ гипотезы.

Такъ какъ геометрическое мѣсто есть теорема, выражающая извѣстную зависимость между величинами перемѣнными, то ее можно сдѣлать поризмомъ, оставляя нѣчто не вполнѣ опредѣленнымъ. Приведемъ примѣры:

Поризмъ. Даны двѣ прямыя SA и SB и двѣ точки P и Q, проведена прямая чрезъ точки P и Q. Если проведемъ какую нибудь прямую параллельно прямой PQ и соединимъ точки a и b ея встрѣчи съ точками P и Q,

то точка m пересѣченія прямыхъ Pa и Qb будетъ находиться на прямой, коей положеніе *дано*.

Поризмъ. Если изъ данной точки внѣ круга проведена сѣкущая, то площадь прямоугольника, заключеннаго между цѣлою сѣкущею и внѣшнимъ отрѣзкомъ, есть *данная* величина.

Всѣ теоремы относительно геометрическихъ мѣстъ, по своей формѣ, суть поризмы, какъ это говоритъ и Паппусъ. Напр. геометрическое мѣсто вершинъ равныхъ угловъ, построенныхъ на данной прямой, есть кругъ. Если же сказать величину и положеніе круга, то это будетъ теорема.

Изъ сказаннаго выше и изъ приведенныхъ примѣровъ мы видимъ, какую форму древніе дали теоремамъ, для болѣе удобнаго приложенія къ изслѣдованіямъ. Такая форма теоремъ болѣе удобна въ изслѣдованіяхъ, гдѣ часто нѣтъ надобности знать величину или положеніе, а необходимо только знать, что они *могутъ быть* вполнѣ опредѣленны. Такимъ образомъ переходятъ отъ одной истины къ другой чрезъ рядъ *данныхъ* или *поризмъ*, имѣющихъ извѣстную связь между собою.

Въ новомъ анализѣ, слово *данная* величина замѣнили словомъ *постоянная*. Мы говоримъ, напримѣръ, что уголъ, вписанный въ извѣстный сегментъ, есть величина *постоянная;* мы говоримъ, что площадь прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ хордъ, проходящихъ чрезъ данную точку внутри круга, есть величина *постоянная*. Всѣ наши теоремы, выраженныя въ такой формѣ, суть или *данныя* или *поризмы* древнихъ. Слово *поризмъ*—πόρισμα или πορισμό означаетъ: пріобрѣтеніе, выигрышъ, отъ πορίζω, а также πείρω, *pore*, *parare* отъ санскритскаго *pri*.

Въ смыслѣ пріобрѣтенія, выигрыша, вывода—Евклидъ употребляетъ его въ своихъ „Началахъ", вмѣсто *corollarium'a* (у насъ *слѣдствіе*) изъ теоремы, который часто съ теоремой не имѣетъ ничего общаго.

Я уже выше сказалъ, что сочиненіе Евклида „Поризмы" утеряно, но въ VII книгѣ „Математическихъ коллекцій" Паппуса, находятся извлеченія, которыя долгое время ставили геометровъ въ затрудненіе. Паппусъ говоритъ: „что это сочиненіе есть собраніе весьма остроумныхъ предложеній, богатыхъ слѣдствіями и необходимыхъ всѣмъ тѣмъ, которые желаютъ погрузиться въ математическія изслѣдованія".

Вслѣдствіе такого мнѣнія Паппуса геометры были сильно заинтересованы этимъ сочиненіемъ. Знаменитый англійскій астрономъ *Галлей* (Halley), глубоко изучившій Геометрію древнихъ, былъ заинтересованъ этимъ предметомъ и издалъ греческій текстъ сочиненія Паппуса, относительно поризмовъ Евклида, такъ какъ до Галлея былъ извѣстенъ только латинскій переводъ; но самъ Галлей сознавался, что онъ въ извлеченіяхъ Паппуса ничего не понимаетъ. Первый изъ геометровъ, сдѣлавшій шагъ къ разъясне-

нію этой загадки былъ *Симсонъ* (Simson), а затѣмъ *Плайферъ* (Playfair). Въ настоящемъ столѣтіи *Шаль* (Chasles), пользуясь извлеченіями Паппуса, комментаріями *Прокла**), сочиненіемъ арабскаго математика *Гассанъ-бенъ-Гайтема* „Геометрическія извѣстныя" **), работами Симсона и Плайфера, въ 1860 году возстановилъ „Поризмы" Евклида подъ заглавіемъ: „Les trois livres des Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois d'apres la notice et les lemmes de Pappus". Я здѣсь не стану излагать содержанія возстановленнаго Шалемъ сочиненія, такъ какъ намъ, при изложеніи историческаго развитія Геометріи, важна собственно мысль, а не его содержаніе.

Сочиненіе это состоитъ изъ трехъ книгъ, заключающихъ двѣсти двадцать поризмъ. Прочитавъ это сочиненіе можно видѣть какія трудности долженъ былъ преодолѣть Шаль, чтобы возстановить его, имѣя самыя ничтожныя указанія. Возстановить „Поризмы" Евклида могъ только такой первоклассный геометръ какъ Шаль.

Кононъ, современникъ Архимеда, принадлежалъ къ ученымъ Александрійской школы, онъ жилъ въ царствованіе Птоломея Евергета, около 222 г. до Р. Х. По словамъ Аполлонія Пергейскаго, Кононъ написалъ сочиненіе „О коническихъ сѣченіяхъ", въ этомъ сочиненіи онъ старался опредѣлить число точекъ, которыя могутъ быть общими кругу и коническому сѣченію или двумъ коническимъ сѣченіямъ, при чемъ кривыя не должны совпадать. Кононъ первый изслѣдовалъ свойства *спирали*, но онъ умеръ, не давъ доказательствъ найденнымъ имъ теоремамъ.

Кононъ былъ также астрономъ.

Архимедъ. Жизнь Архимеда намъ мало извѣстна. Жизнеописаніе, составленное Гераклитомъ ***) до насъ не дошло, а все, что извѣстно объ Архимедѣ, почерпнуто изъ сочиненій Полибія, Цицерона, Тита-Ливія, Плутарха и другихъ древнихъ писателей. Изъ этихъ источниковъ мы узнаемъ, что Архимедъ родился въ Сициліи въ 287 г. до Р. Х. Одни изъ историковъ говорятъ, что онъ былъ родственникъ сиракузскаго царя Гіерона, другіе же, въ томъ числѣ и Цицеронъ, называютъ его „humilis homo", что не указываетъ на благородное происхожденіе Архимеда. Архимедъ былъ убитъ

---

*) Значеніе слова *поризмъ* объяснено совершенно тождественно какъ у Паппуса, такъ и у Прокла.

**) Объ этомъ сочиненіи будетъ подробно изложено въ статьѣ „Арабы"

***) Время когда жилъ Гераклитъ неизвѣстно, но во всякомъ случаѣ, онъ жилъ ранѣе VI в., такъ какъ Евтокій ссылается на него. Нѣкоторые полагаютъ, что жизнеописаніе Архимеда составлено Гераклитомъ изъ Понта, но это несправедливо, такъ какъ этотъ послѣдній былъ ученикомъ Аристотеля, а потому жилъ гораздо раньше Архимеда. Въ своихъ сочиненіяхъ Архимедъ ссылается также на Гераклита, но это другой.

при взятіи Сиракузъ въ 212 г., слѣдовательно тогда ему было уже семьдесять пять лѣтъ.

Значеніе Архимеда лучше всего оцѣнить, приведя мнѣніе о немъ нѣсколькихъ изъ извѣстнѣйшихъ математиковъ. Лагранжъ и Деламбръ, въ отчетѣ представленномъ французской академіи наукъ, относительно перевода сочиненій Архимеда, сдѣланнымъ Пейраромъ (Peyrard) въ 1806 г., выразились слѣдующими словами: „за Архимедомъ сохранилась репутація одного изъ самыхъ удивительныхъ геніевъ, которые когда либо посвятили себя математикѣ. Ни одинъ изъ геометровъ древности не сдѣлалъ такихъ многочисленныхъ и важныхъ открытій, но, не смотря на это, въ настоящее время находимъ мало читателей, знакомыхъ съ сочиненіями Архимеда, вѣроятно вслѣдствіи новыхъ исчисленій. Не смотря на преимущество новыхъ методовъ, сознаваемое всѣми геометрами, даже самыми крайними почитателями древнихъ, всякій геометръ долженъ полюбопытствовать, какими тонкими и глубокими размышленіями Архимедъ могъ достигнуть такихъ сложныхъ результатовъ".

„Читая внимательно сочиненія Архимеда и Аполлонія, говоритъ Лейбницъ, перестаешь удивляться всѣмъ новѣйшимъ открытіямъ геометровъ". Араго говоритъ, что „Архимеда можно сравнивать съ однимъ лишь Ньютономъ".

Ни объ одномъ изъ геометровъ не сложилось столько удивительныхъ разсказовъ, изъ которыхъ одни относятся къ его необыкновенной способности сосредоточиваться на извѣстной мысли, забывать все окружающее, а другіе къ его геніальной изобрѣтательности. Разсказываютъ, что Архимедъ, погруженный въ математическія размышленія, забывалъ пить и ѣсть, насильно его увлекали въ бани, гдѣ онъ чертилъ геометрическія фигуры на тѣлѣ намазанномъ масломъ. Цицеронъ разсказываетъ, что Архимедъ, погруженный въ математическія изслѣдованія на площади въ Сиракузахъ надъ начерченными на пескѣ геометрическими фигурами, не замѣтилъ взятія города Римлянами и былъ убитъ солдатомъ, котораго онъ просилъ не безпокоитъ его и не трогать начерченныхъ имъ фигуръ. Витрувій въ своей „Архитектурѣ" разсказываетъ, что Архимедъ открылъ извѣстный законъ, при погруженіи твердыхъ тѣлъ въ жидкость, который нынѣ еще носитъ названіе *закона Архимеда* *); законъ этотъ онъ нашелъ сидя въ ваннѣ и

*) По поводу открытія этого закона существуетъ слѣдующій разсказъ: Гіеронъ заказалъ золотыхъ дѣлъ мастеру корону и для этого далъ ему извѣстное количество золота, но мастеръ присвоилъ себѣ часть золота, замѣнивъ его равнымъ по вѣсу количествомъ серебра. Гіеронъ обратился къ Архимеду съ просьбой опредѣлить количество серебра, употребленнаго вмѣсто золота.

такъ обрадовался, что бросился бѣжать домой совершенно нагой, крича: „εὕρηκα! εὕρηκα!“ т. е. „я нашелъ, я нашелъ“. Разсказываютъ еще, что Гіеронъ, удивленный дѣйствіемъ машинъ и блоковъ, при помощи которыхъ Архимедъ двигалъ, при посредствѣ одной руки, громадныя массы, вскричалъ: „всему повѣрю, что бы ни сказалъ Архимедъ“, на что Архимедъ отвѣтилъ: „дай мнѣ точку опоры и я сдвину земной шаръ“ *).

---

*) По просьбѣ Гіерона Архимедъ устроилъ машины для обороны Сиракузъ, но этими машинами онъ не воспользовался, такъ какъ все правленіе его прошло въ мирѣ, послѣ него царствовалъ внукъ его Гіеронимъ, сынъ Гелона, но его скоро свергли съ престола. Главный начальникъ надъ войскомъ Гиппархъ сталъ на сторонѣ Карѳагенянъ, и тѣмъ вовлекъ своихъ согражданъ въ войну съ Римлянами; римскій сенатъ приказалъ Марцеллу взять Сиракузы Вотъ въ какихъ словахъ передаетъ Полибій взятіе этого города римлянами.

„Все было приготовлено, Римляне собирались аттаковать башни. Но Архимедъ съ своей стороны приготовилъ машины, которыя могли бросать стрѣлы на какое угодно разстояніе. Не смотря на то, что непріятель былъ еще далеко отъ города, онъ его осыпалъ множествомъ стрѣлъ, имѣющихъ большую скорость, изъ баллистовъ и катапультъ, большихъ чѣмъ обыкновенныя, непріятель не зналъ куда дѣваться. Когда стрѣлы перебрасывало дальше, то онъ употреблялъ катапульты меньшаго размѣра, пропорціонально разстоянію; это производило такое смятеніе среди Римлянъ, что они ничего не могли предпринимать. Марцеллъ, не зная, что дѣлать, сталъ въ тайнѣ придвигать свои корабли. Но когда они были уже около берега, на разстояніи полета стрѣлы, Архимедъ выдумалъ новую хитрость противъ нападающихъ съ кораблей: онъ велѣлъ пробить отверстія въ стѣнахъ, на высотѣ человѣческаго роста, шириною въ пядь съ наружи. Съ внутренней стороны около отверстій онъ помѣстилъ застрѣльщиковъ и маленькіе скорпіоны. При посредствѣ этихъ отверстій онъ поражалъ непріятельскій флотъ и отражалъ всѣ его нападенія. Такимъ способомъ, былъ-ли непріятель близко или далеко, Архимедъ не только уничтожалъ всѣ его намѣренія, но и убивалъ большую часть нападающихъ. Когда непріятель хотѣлъ устроить тараны, то машины, устроенныя за стѣнами вдоль стѣнъ, подымались надъ укрѣпленіями и наклонялись далеко внѣ ихъ. Многія изъ нихъ метали камни, вѣсившіе не менѣе десяти талантовъ, а другія—массы свинца, равнаго вѣса. Когда тараны приближались, то при посредствѣ веревки вращали нос. этихъ машинъ, смотря по надобности, и бросали камни на тараны, которые не только разбивали эти машины, но подвергали большой опасности корабли и находившихся на нихъ людей“.

„Кромѣ этого были еще другія машины, метавшія камни на непріятеля, который приближался покрытый плетенками, думая, что находится внѣ опасности отъ дротиковъ, бросаемыхъ со стѣнъ; но камни падали такъ мѣтко, что непріятель былъ вынужденъ отступать. Кромѣ этого онъ спускалъ желѣзную лапу, прикрѣпленную къ цѣпи. Когда эта лапа схватывала носъ корабля, то тотъ, кто управлялъ машиной, опускалъ къ землѣ конецъ, находящійся внутри ограды. Поставивъ корабль на корму и продержавъ его нѣкоторое время въ такомъ положеніи, лапа и цѣпь оставляли его при помощи блока. Такимъ способомъ, нѣкоторые корабли падали на бокъ, другіе на передъ, большая же часть падали перпендикулярно, на носъ, и были затоплены. Марцеллъ находился въ большомъ затрудненіи: всѣ его намѣренія были уничтожаемы изобрѣтательностью Архимеда; онъ понесъ большія потери, а осажденные смѣялись надъ всѣми его усиліями“.

„Аппій, потерпѣвшій такія же неудачи, со стороны суши, оставилъ свое предпріятіе.

Полагають, что большая часть сочиненій Архимеда утеряна *), дошли же до насъ только нѣкоторыя изъ нихъ, въ видѣ писемъ Архимеда къ

Не смотря на то, что его войско было далеко отъ города, оно было осыпаемо градомъ камней и стрѣлъ, бросаемыхъ балистами и катапультами съ удивительною ловкостью и силою. Если непріятель приближался къ городу, то его уничтожали безчисленное множество дротиковъ, бросаемыхъ со стѣнъ и всѣ его усилія оставались тщетны. Если непріятель, покрытый щитами стремительно бросался, то его поражали камнями и бревнами, которые падали на ихъ головы; не говоря уже о желѣзныхъ лапахъ, схватывавшихъ воиновъ съ ихъ оружіемъ и потомъ швырявшихъ на землю, о которую они разбивались".

„Аппій отступилъ въ свой лагерь и собралъ совѣтъ трибуновъ; на совѣтѣ положили испробовать всѣ средства, чтобы взять Сиракузы, исключая правильной осады; это рѣшеніе было приведено въ исполненіе. Въ продолженіи восьми мѣсяцевъ Римляне оставались подъ стѣнами города и испробовали всѣ возможныя средства хитрости, было также много случаевъ доблести, все было испробовано кромѣ приступа, который не осмѣливались предпринять. Таково было могущество одного человѣка; такова была сила его генія. При такихъ значительныхъ сухопутныхъ и морскихъ силахъ, городъ непремѣнно былъ бы взятъ при первомъ приступѣ, если бы только одного старика не было въ Сиракузахъ. Но Архимедъ въ его стѣнахъ и они не осмѣливаются даже подступить".

Далѣе, со словъ Полибія, Титъ-Ливій и Плутархъ повторяютъ тоже:

„Когда корабли Марцелла приблизились на разстояніе полета стрѣлы, говоритъ Тзетзъ, то старикъ (Архимедъ) велѣлъ приблизить шестигранное зеркало, сдѣланное имъ. На извѣстномъ разстояніи отъ этого зеркала, онъ помѣстилъ другія зеркала по-меньше; такого же вида; зеркала эти вращались на своихъ шарнирахъ при помощи квадратныхъ пластинокъ. Затѣмъ онъ устанавливалъ свое зеркало среди лучей солнца лѣтомъ и зимой. Лучи, отраженные отъ этихъ зеркалъ, произвели страшный пожаръ на корабляхъ, которые были обращены въ пепелъ на разстояніи, равномъ полету стрѣлы"

Этотъ послѣдній разсказъ долгое время считали басней, пока извѣстный Бюффонъ (Buffon) въ 1777 г. не показалъ на опытѣ, что это возможно. При помощи 168 зеркалъ, онъ, въ апрѣлѣ мѣсяцѣ, зажегъ дерево и расплавилъ свинецъ на разстояніи 45 метровъ.

Римляне такъ боялись дѣйствія машинъ Архимеда, что они обращались въ бѣгство при приближеніи малѣйшаго предмета со стороны укрѣпленій Сиракузъ: такъ великъ былъ страхъ, внушенный великимъ геометромъ.

Я привелъ эти разсказы для того, чтобы показать, какое мнѣніе существовало въ древности о Архимедѣ.

*) По словамъ арабскаго писателя Абульфараги, Римляне при взятіи Сиракузъ, сожгли четырнадцать книгъ сочиненій Архимеда; но этотъ разсказъ не заслуживаетъ довѣрія, такъ какъ Абульфарагу принадлежитъ также вымышленный разсказъ о сожженіи александрійской библіотеки Арабами.

Теонъ упоминаетъ о „Катоптрикѣ" Архимеда. Касири упоминаетъ о рукописи сочиненій Архимеда на еврейскомъ языкѣ, хранящейся въ Ватиканской библіотекѣ. Другое сочиненіе „De iis quae vehuntur in humido" существовало еще въ XVI в. въ греческой рукописи, Коммандинъ издалъ это сочиненіе. Нынѣ рукопись утеряна. Есть основаніе предполагать, что Архимедъ написалъ сочиненіе „Коническія сѣченія", на которое онъ ссылается въ своихъ сочиненіяхъ „Квадратура параболы" и „О коноидахъ и сфероидахъ" не называя автора этого сочиненія; подобныя ссылки онъ дѣлаетъ на всѣ свои сочиненія, если же сочиненіе написано не имъ, то онъ всегда называетъ автора.

Досиѳею *), ученику Конона, послѣ смерти этого послѣдняго, и къ царю Гелону **). Изъ этихъ писемъ видно, что Архимедъ посылалъ свои геометрическія открытія Конону, при посредствѣ Гераклита. Конона Архимедъ считалъ весьма свѣдущимъ геометромъ, а потому онъ посылалъ ему теоремы, уже доказанныя или же для доказательства. Нѣкоторыя изъ нихъ онъ находилъ неправильными и посылаетъ поправки, сдѣланныя имъ, къ Досиѳею. До насъ дошли слѣдующія сочиненія Архимеда:

1) „О шарѣ и цилиндрѣ" (Περὶ τῆς σφαίρας καὶ κυλίνδρου).

2) „Объ измѣреніи круга" (Κύκλου μέτρησις).

3) „О коноидахъ и сфероидахъ" (Περὶ κωνοειδέων καὶ σχημάτων σφαιροειδέων).

4) „О гелисахъ" (Περὶ ἑλίκων).

5) „О равновѣсіи плоскихъ фигуръ и ихъ центрахъ тяжести" (Περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπικῶν, ἢ κέντρα βαρῶν επιπεδῶν).

6) „Квадратура параболы" (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς).

7) „О числѣ песчинокъ" (Ψαμμίτης).

8) „О плавающихъ тѣлахъ" (Περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων).

9) „Леммы" (Lemmata). Сочиненіе это извѣстно намъ только въ арабскомъ переводѣ, и нѣкоторые математики полагаютъ, что оно написано не Архимедомъ.

Семь изъ этихъ девяти сочиненій Архимеда, относятся къ Геометріи; остальныя два, именно 5-е и 8-е, къ механикѣ ***).

---

*) Послѣ смерти Конона, Архимедъ написалъ слѣдующее письмо къ его ученику Досиѳею, которое помѣщено въ началѣ сочиненія „Квадратура параболы": „Привѣтъ Архимеда Досиѳею! когда я узналъ, что Кононъ, единственный изъ моихъ друзей, остававшихся въ живыхъ, умеръ, то я, зная, что ты былъ въ дружбѣ съ нимъ и хорошо знакомъ съ Геометріей, глубоко огорченный смертью человѣка, бывшаго моимъ другомъ и глубоко изучившаго математическія науки, рѣшился послать тебѣ, какъ бы это я сдѣлалъ Конону, геометрическую теорему, которой еще никто не занимался и которую я разсмотрѣлъ". Досиѳей родомъ изъ Колоны, его считали свѣдущимъ геометромъ и астрономомъ. Геминусъ и Птоломей воспользовались наблюденіями Досиѳея надъ неподвижными звѣздами, произведенными въ 200 г. до Р. Х. Изъ этого можно заключить, что Досиѳей пережилъ Архимеда.

**) Сочиненія Архимеда имѣютъ значеніе для филологовъ, такъ какъ они написаны на *дорическомъ* нарѣчіи.

***) Сочиненія Архимеда выдержали много изданій, мы укажемъ на болѣе извѣстныя. Въ первый разъ сочиненія Архимеда были напечатаны въ Венеціи въ 1543 г. на латинскомъ и греческомъ языкахъ; переводъ этотъ изданъ Николаемъ Тарталіа. Въ томъ же году появилось изданіе, напечатанное въ Базелѣ, съ латинскимъ переводомъ Іоанна Кремонскаго, просмотрѣннымъ Регіомонтанусомъ; къ этому изданію приложены комментаріи Евтокія. Въ 1558 г. сочиненія Архимеда изданы въ Венеціи Коммандиномъ, съ весьма цѣнными комментаріями. Сцина (Scinà) упоминаетъ о изданіи сочиненій Архимеда, предпринятомъ Мавролико между 1550 и 1560 гг.; изданіе это все погибло во время кораблекрушенія, за исключеніемъ *двухъ* экземпляровъ. Монтукла относитъ это изданіе къ 1570 г. Въ 1615 г. сочиненія Архимеда

Все, что содержать сочинения Архимеда, принадлежитъ вполнѣ ему и есть результатъ его творческаго генія; онъ не имѣлъ, относительно того что излагалъ, предшественниковъ, коихъ бы трудами онъ могъ воспользоваться, подобно Евклиду и Аполлонію, которые увеличили и разработали наслѣдство, оставленное ихъ предшественниками. Архимедъ творецъ Механики: къ написанному имъ относительно равновѣсія тѣлъ, погруженныхъ въ жидкость, новые геометры съ ихъ могущественнымъ анализомъ, почти ничего не прибавили. Читая сочиненія Архимеда, по истинѣ, удивляешься, что съ тѣми немногими началами, которыя онъ положилъ въ основанія своихъ изслѣдованій, и съ такими ничтожными аналитическими средствами, одною силою своего генія, онъ могъ достигнуть столь блестящихъ результатовъ. Онъ началъ изслѣдованія въ той части Геометріи, которая до него не была затронута.

Мы вкратцѣ изложимъ содержаніе и результаты, полученные Архимедомъ, сперва его геометрическихъ сочиненій, а затѣмъ сочиненій по механикѣ; и наконецъ бросимъ взглядъ на начала, положенныя въ основаніи этихъ сочиненій и на методъ изслѣдованій.

„О шарѣ и цилиндрѣ", въ двухъ книгахъ. Въ этомъ сочиненіи Архимедъ достигъ слѣдующихъ результатовъ.

1) Поверхность прямаго цилиндра, исключая площадей основаній, равна площади круга, коего радіусъ есть величина средне-пропорціональная между женератрисой цилиндра и діаметромъ его основанія, т. е. если радіусъ основанія есть R, а высота цилиндра h, то, полагая $2Rh=r^2$, поверхность цилиндра будетъ равна πr^2.

2) Поверхность прямаго конуса, исключая площади основанія, равна площади круга, радіусъ котораго есть величина средне-пропорціональная между женератрисой конуса и радіусомъ его основанія.

издалъ Рево (Revault), воспитатель Людовика XIII. Въ 1670 г. Борелли (Borelli) началъ изданіе сочиненій Архимеда, но не окончилъ его, вслѣдствіе преслѣдованій, которымъ онъ подвергся. Въ 1675 г. Барровъ издалъ сочиненія Архимеда въ сокращенномъ видѣ. Въ 1681 г. было вновь напечатано изданіе Мавролико сочиненій Архимеда, въ Палермо; изданіе это есть переработанныя сочиненія Архимеда и весьма цѣнно для изучающихъ сочиненія древнихъ геометровъ. Въ 1699 г. появилось изданіе Валлиса. Въ 1793 г. Торелли издалъ сочиненія Архимеда въ Оксфордѣ, на греческомъ и латинскомъ языкахъ; переводъ этотъ важенъ по своимъ комментаріямъ и различнымъ примѣчаніямъ. Въ 1806 г. сочиненія Архимеда были напечатаны на французскомъ языкѣ въ переводѣ Пейрара; переводъ этотъ важенъ своими примѣчаніями. Изданіе это вновь напечатано въ 1808 г. На нѣмецкомъ языкѣ сочиненія Архимеда изданы въ 1828 г. Гутенекеромъ въ Вюрцбургѣ. На русскомъ языкѣ были напечатаны въ 1823 г. Петрушевскимъ слѣдующія сочиненія Архимеда. „О шарѣ и цилиндрѣ", „Измѣреніе круга" и „Леммы". Сочиненіе „Измѣреніе круга" переведено также нами и помѣщено въ нашемъ сочиненіи „Начала Евклида".

3) Поверхность шара равна четырежды взятой площади большаго круга этого шара.

4) Объемъ шара равенъ четырежды взятому объему конуса, коего основанiе есть большой кругъ шара, а высота равна радiусу того же шара.

5) Доказавъ это, ясно, что объемъ цилиндра, коего основанiе равно большому кругу шара, а высота дiаметръ того же шара, равенъ трижды взятой половины объема шара; а поверхность того же цилиндра, съ площадями основанiй, также равна трижды взятой половинѣ поверхности шара.

6) Поверхность сферическаго сегмента, меньшаго половины шара, равна площади круга, коего радiусъ есть хорда, проведенная изъ вершины сегмента къ окружности его основанiя.

7) Поверхность сегмента, большаго половины шара, также равна площади круга, коего радiусъ есть хорда, проведенная изъ вершины сегмента къ окружности его основанiя.

8) Объемъ сферическаго сектора равенъ объему конуса, имѣющаго основанiемъ поверхность сегмента, служащаго основанiемъ сектору, а высотою радiусъ шара.

9) По данному конусу или цилиндру, найти шаръ, имѣющiй объемъ равный объему даннаго конуса или цилиндра?

10) Пересѣчь шаръ плоскостью такъ, чтобы объемы полученныхъ сегментовъ находились въ данномъ отношенiи.

Архимедъ для рѣшенiя этой задачи составляетъ двѣ пропорцiи и потомъ говоритъ: „каждая изъ этихъ величинъ (т. е. неизвѣстныя) въ концѣ сочиненiя будутъ опредѣлены и построены". Между тѣмъ въ концѣ сочиненiя такого опредѣленiя и построенiя нѣтъ. Это объясняется тѣмъ, что уравненiе, опредѣляющее неизвѣстное, третьей степени:

$$x^3-3R^2x+2\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}R^3=0$$

которое получается или изъ пропорцiй данныхъ Архимедомъ, или извѣстнаго выраженiя для объема сегмента; данное отношенiе есть $\frac{\lambda}{\mu}$. Это уравненiе, будучи сравнено съ такимъ:

$$x^3+px+q=0$$

даетъ:

$$p=-3R^2 \qquad q=2\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}R^3$$

откуда будемъ имѣть, очевидно:

$$\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$$

слѣдовательно уравненiе представляетъ *casus irreductibilis*, т. е. имѣетъ всѣ три корня дѣйствительныя.

Если Архимедъ дѣйствительно нашелъ построеніе, то это не иначе какъ при помощи коническихъ сѣченій, а не при помощи прямой и круга, какъ онъ рѣшаетъ всѣ предъидущія задачи. Думали прежде, что построеніе Архимеда, было дѣйствительно элементарное и что оно утеряно, но мы теперь знаемъ, что такое построеніе невозможно.

11) Построить сферическій сегментъ, подобный одному данному и равный другому, также данному, сегменту?

12) По даннымъ двумъ сегментамъ, одного и того же шара, или различныхъ шаровъ, найти сегментъ, подобный одному изъ нихъ и коего поверхность была-бы равна поверхности другаго?

13) Отрѣзать плоскостью отъ шара сегментъ, котораго бы отношеніе объема къ объему конуса, имѣющаго основаніе и высоту сегмента, было данное?

„*Объ измѣреніи круга*". Предметъ этого сочиненіе измѣреніе длины окружности и площади круга. Архимедъ приходитъ къ слѣдующимъ результатамъ:

1) Площадь круга равна площади прямоугольнаго треугольника, коего одинъ изъ катетовъ равенъ радіусу этого круга, а другой катетъ равенъ длинѣ окружности того же круга.

2) Окружность круга равна трижды взятому діаметру, сложенному съ частью діаметра, меньшей $\frac{1}{7}$ діаметра и большей $\frac{10}{71}$ того же діаметра.

Весьма вѣроятно, что Архимедъ, зная невозможность рѣшить задачу квадратуры круга, сталъ ее рѣшать по приближенію; онъ началъ съ того, что опредѣляетъ сторону описаннаго около круга шестиугольника, отношеніе которой къ діаметру, на основаніи доказаннаго потомъ, меньше отношенія $\frac{153}{265}$. Изъ этого слѣдуетъ, что сторона описаннаго около круга двѣнадцатиугольника меньше $\frac{153}{571}$ діаметра. Продолжая такимъ образомъ дальше, удваивая все число сторонъ многоугольниковъ, онъ нашелъ, что сторона, описаннаго около круга 96-ти угольника меньше $\frac{153}{4673\frac{1}{2}}$ діаметра. Периметръ 96-ти угольника, а тѣмъ болѣе окружность вписаннаго въ него круга меньше $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}$, т. е. менѣе $3\frac{1}{7}$ діаметра. За тѣмъ Архимедъ беретъ вписанные многоугольники, и показываетъ, что сторона вписаннаго въ кругъ шестиугольника равна половинѣ діаметра, а сторона вписаннаго въ кругъ двѣнадцатиугольника больше $\frac{780}{3013\frac{3}{4}}$ діаметра. Продолжая же далѣе онъ находитъ, что сторона вписаннаго въ кругъ 96-угольника больше $\frac{66}{2017\frac{1}{4}}$ діаметра; а слѣдовательно периметръ всего 96-угольника, а тѣмъ болѣе окружность описаннаго круга больше $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$, т. е. болѣе $3\frac{10}{71}$ діаметра. Такимъ способомъ было найдено Архимедомъ, что численная величина отношенія окружности къ діаметру

лежитъ между двумя довольно близкими предѣлами, именно между $3\frac{10}{70}$ и $3\frac{10}{71}$.

Въ томъ же сочиненіи Архимеда мы находимъ примѣры извлеченія квадратныхъ корней, но къ сожалѣнію не указаны пріемы, съ помощью которыхъ были произведены эти вычисленія, а даны только числа, изъ которыхъ требовалось извлечь корни и самые корни этихъ чиселъ, именно ряды чиселъ: 349450, $1373943\frac{33}{64}$, $5472132\frac{1}{16}$, 9082321, 3380929, 1018405, $4069284\frac{1}{36}$; корни этихъ чиселъ суть: $591\frac{1}{8}$, $1172\frac{1}{8}$, $2339\frac{1}{4}$, $3013\frac{3}{4}$, $1838\frac{9}{11}$, $1009\frac{1}{6}$ и $2017\frac{1}{4}$. Евтокій, комментировавшій это сочиненіе, указываетъ какъ производились сложеніе, вычитаніе, умноженіе на цѣлыя и дробныя числа; но о дѣленіи и извлеченіи корней ничего не говорится; въ текстѣ комментаріевъ Евтокія, сказано: „отношеніе $EH^2 : HG^2$ болѣе отношенія 349450 : 23409, а потому отношеніе по длинѣ $EH : HG$ больше отношенія $591\frac{1}{8} : 153$“. Далѣе, Евтокій говоритъ, въ комментаріи къ третьему предложенію сочиненія Архимеда: „Въ этомъ предложеніи указано, какъ найти корень квадратный изъ даннаго числа; но найти корень изъ числа, которое не есть полный квадратъ, невозможно, такъ какъ число умноженное само на себя есть квадратъ, но число и дробь сами на себя умноженныя не даютъ цѣлаго числа, а также число дробное. Какъ найти корень числа, коего квадратъ весьма близокъ ему, указано въ сочиненіяхъ Паппуса, Теона и другихъ, комментировавшихъ сочиненіе Птоломея. А потому мы не приведемъ этихъ вычисленій, такъ какъ желающія познакомиться съ ними, могутъ ихъ найти въ указанныхъ выше сочиненіяхъ“.

Это маленькое сочиненіе переведено мною и помѣщено въ текстѣ сочиненія „Начала Евклида“ на стр. 299.

„О коноидахъ и сфероидахъ“. *Коноидами* Архимедъ называетъ тѣла вращенія, полученныя вращеніемъ параболы или гиперболы около главной оси; а *сфероидами* онъ называетъ тѣла вращенія, полученныя вращеніемъ эллипса около большой или около малой оси, въ первомъ случаѣ сфероидъ будетъ *растянутый*, а во второмъ—*сжатый*.

Тѣла, разсматриваемыя Архимедомъ, въ настоящее время носятъ названіе: *параболоида вращенія, гиперболоида вращенія* и *эллипсоида вращенія*.

Въ этомъ сочиненіи Архимедъ опредѣляетъ коноидальные и сфероидальные сегменты, полученные пересѣкая коноидъ или сфероидъ плоскостями перпендикулярными къ оси вращенія или наклоненными къ ней. Объемы эти онъ выражаетъ всегда объемомъ конуса, имѣющаго тоже основаніе и ту же высоту, что и сегментъ.

Коноиды и сфероиды Архимедъ разсѣкаетъ параллельными плоскостями, равно-отстоящими одна отъ другой; между каждой парой подобныхъ сѣченій заключается элементъ тѣла, около котораго описанъ цилиндръ и въ

который вписанъ цилиндръ. Суммированіе всѣхъ большихъ и всѣхъ меньшихъ цилиндровъ даетъ два предѣла, между которыми заключается объемъ самаго тѣла вращенія. При сближеніи плоскостей сѣченій, предѣлы могутъ разниться какъ угодно мало между собою. Такимъ пріемомъ Архимедъ находитъ то, что нынѣ извѣстно подъ именемъ *кубатуры тѣлъ*; дальнѣйшее развитіе этой мысли привело къ *теоріи опредѣленныхъ интеграловъ*.

Въ этомъ сочиненіи Архимедъ достигъ слѣдующихъ результатовъ:

1) Объемъ сегмента параболическаго коноида, отсѣченнаго плоскостью перпендикулярною къ оси, равенъ тремъ половинамъ объема конуса, имѣющаго одно основаніе и одну ось съ сегментомъ.

2) Таже теорема и относительно сегмента, полученнаго пересѣченіемъ параболическаго коноида плоскостью не перпендикулярною къ оси вращенія.

3) Два сегмента, полученные пересѣченіемъ параболическаго коноида, двумя плоскостями, изъ коихъ одна перпендикулярна къ оси, а другая не перпендикулярна, будутъ равны, если оси сегментовъ равны между собою.

4) Два сегмента параболическаго коноида, полученные пересѣченіемъ произвольно проведенной плоскости, относятся между собою какъ квадраты ихъ осей.

5) Отношеніе объема сегмента гиперболическаго коноида, полученнаго пересѣченіемъ его плоскостью, перпендикулярною къ оси, къ объему конуса, имѣющаго то же основаніе и ту же ось, что и сегменты, равно отношенію прямой, составленной изъ оси сегмента и утроенной прямой, прибавленной къ оси *), къ прямой составленной изъ оси сегмента и удвоенной прямой, прибавленной къ оси

6) Если сегментъ гиперболическаго коноида, полученъ пересѣченіемъ его плоскостью не перпендикулярною его оси, то отношеніе сегмента коноида къ сегменту конуса, имѣющаго одно и то же основаніе и одну и ту же ось, что и сегментъ коноида, будетъ равно отношенію прямой, составленной изъ оси сегмента и утроенной прямой, прибавленной къ оси, къ прямой, составленной изъ оси сегмента и удвоенной прибавленной къ оси прямой.

7) Половина какого нибудь сфероида (т. е. растянутаго или сжатаго), полученнаго пересѣченіемъ плоскостью, проходящею чрезъ центръ и перпендикулярною къ оси вращенія, равна дважды взятому объему конуса, имѣющаго одно и тоже основаніе и одну ось съ сегментомъ.

8) Половина какого нибудь сфероида, полученнаго пересѣченіемъ

---

*) Прямая, *прибавленная къ оси*, есть прямая, заключенная между вершиною коноида и вершиною конуса, коего поверхность образована ассимптотами.

плоскостью, проходящею чрезъ центръ и неперпендикулярною къ оси также равна половинѣ сегмента конуса, имѣющаго то же основаніе и ту же ось, что и сегменты.

9) Отношеніе сегмента какого нибудь сфероида, пересѣченнаго плоскостью перпендикулярною къ оси, но не проходящею чрезъ центръ, къ конусу имѣющему то же основаніе и ту же высоту съ сегментомъ, равно отношенію прямой, составленной изъ половины оси сфероида и оси большаго сегмента, къ оси большаго сегмента.

10) Отношеніе меньшаго сегмента, какого нибудь сфероида, пересѣченнаго плоскостью не перпендикулярною къ оси и не проходящею чрезъ центръ, къ сегменту конуса, имѣющаго одно основаніе и одну высоту съ упомянутымъ сегментомъ, равно отношенію прямой, составленной изъ половины прямой, соединяющей вершины сегментовъ, полученныхъ сѣкущею плоскостью, и оси меньшаго сегмента, къ оси большаго сегмента.

11) Отношеніе большаго изъ сегментовъ, какого нибудь сфероида, полученнаго пересѣченіемъ плоскостью, перпендикулярною къ оси, не проходящею чрезъ его центръ, къ конусу, имѣющему то же основаніе и ту же ось, что и сегментъ, равно отношенію прямой, составленной изъ половины оси сфероида и оси меньшаго изъ сегментовъ, къ оси меньшаго сегмента.

12) Отношеніе большаго изъ сегментовъ сфероида, полученнаго пересѣченіемъ его плоскостью, не перпендикулярною къ оси и не проходящею черезъ центръ, къ конусу, имѣющаго одно и то же основаніе и одну и ту же высоту, что и сегментъ, равно отношенію прямой, составленной изъ прямой, соединяющей вершины сегментовъ, полученныхъ отъ пересѣченія плоскостью, и оси меньшаго сегмента, къ оси меньшаго сегмента.

„О гелисахъ“. Гелисъ это *спираль* извѣстная у насъ подъ именемъ *Архимедовой.* Въ своемъ сочиненіи Архимедъ находитъ всѣ извѣстныя намъ свойства ея. Образованіе этой спирали принадлежитъ *Конону.*

Содержаніе этого сочиненія слѣдующее:

1) Если прямая линія, коей одинъ конецъ укрѣпленъ неподвижно, вращается въ одной плоскости, съ равномѣрною скоростью, пока она не прійдетъ въ первоначальное свое положеніе, и если притомъ точка двигается съ равномѣрною скоростью по вращающейся прямой, начиная свое движеніе съ неподвижнаго конца, то эта точка опишетъ въ плоскости *гелисъ.* Площадь, заключенная между гелисомъ и прямой, пришедшей въ первоначальное свое положеніе, равна третьей части площади круга, коего центръ неподвижная точка, а радіусъ равенъ части прямой, которую прошла точка во время одного оборота прямой.

2) Если прямая касается гелиса въ точкѣ, гдѣ онъ оканчивается, и если изъ неподвижной точки прямой, сдѣлавшей одинъ оборотъ и пришед-

шей въ первопачальное положеніе, опустимъ перпендикуляръ на касательную къ гелису, то этотъ перпендикуляръ равенъ по длинѣ окружности круга.

3) Если прямая, сдѣлавшая оборотъ, и точка, двигавшаяся по этой прямой, будутъ продолжать свое движеніе, повторяя свои вращенія, приходя каждый разъ снова въ первопачальное положеніе, то площадь, заключенная въ гелисѣ, полученнаго отъ третьяго вращенія, вдвое больше площади, заключенной гелисомъ втораго вращенія; площадь, заключенная въ гелисѣ, полученномъ отъ четвертаго вращенія, втрое болѣе площади, заключенной гелисомъ втораго вращенія; площадь, заключенная въ гелисѣ, полученномъ отъ пятаго вращенія, вчетверо больше; наконецъ, площади, заключенныя въ гелисахъ, полученныхъ при слѣдующихъ вращеніяхъ, соотвѣтственно будутъ равны площади, заключенной въ гелисѣ, полученномъ при второмъ вращеніи, умноженной на числа, слѣдующія за только что упомянутыми. Площадь, заключенная въ гелисѣ, полученномъ при первомъ вращеніи, равна шестой части площади гелиса, полученнаго при второмъ вращеніи.

4) Если мы возьмемъ двѣ точки на гелисѣ, полученномъ при одномъ обращеніи и если изъ этихъ точекъ проведемъ прямыя къ неподвижной оконечности вращавшейся прямой, затѣмъ опишемъ два круга, коихъ центры неподвижная точка, а радіусы равны прямымъ, проведеннымъ къ неподвижной оконечности, вращавшейся прямой, и если продолжимъ болѣе короткую изъ этихъ прямыхъ; то площадь заключенная между частью окружности большаго круга, лежащей на одномъ и томъ же гелисѣ между этими двумя прямыми и гелисомъ и продолженіемъ меньшей изъ прямыхъ, такъ относится къ площади, заключенной между частью окружности меньшаго круга, и тѣмъ же гелисомъ и прямой соединяющей оконечности, какъ радіусъ меньшаго круга, сложенный съ двумя третями избытка радіуса большаго круга надъ меньшимъ, относится къ радіусу меньшаго круга, сложенному съ одной третью избытка, о которомъ мы сейчасъ сказали.

Сочиненіе Архимеда „О гелисахъ" можетъ служить прекраснымъ примѣромъ самаго тонкаго синтеза древнихъ геометровъ. Послѣ двадцати столѣтій, при нынѣшнемъ широкомъ развитіи Геометріи, многіе, весьма свѣдущіе геометры, часто съ большимъ трудомъ могутъ слѣдовать синтезу Архимеда *).

*) Въ этомъ сочиненіи, помѣщено письмо Архимеда къ Досиѳею, характеризующее какъ самого Архимеда, такъ и нравы ученыхъ того времени. Въ древности существовало обыкновеніе между геометрами [illegible] о найденныхъ ими предложеніяхъ, не обнародывая ихъ доказательствъ; этимъ [illegible] они обратить вниманіе математиковъ на свои открытія. Въ это же время существовало не мало лицъ, а такія лица бывали всегда и вездѣ, которыя

„Квадратура параболы". Въ письмѣ Архимеда къ Досиѳею, въ которомъ онъ излагаетъ, какимъ образомъ имъ найдена площадь параболическаго сегмента, онъ говоритъ: „многіе изъ занимавшихся Геометріей, еще прежде меня, хотѣли найти прямолинейную фигуру, которой бы площадь была равна площади круга или площади круговаго сегмента. Они пробовали тоже относительно эллипса, но они полагали въ основаніи своихъ изслѣдованій такія леммы, которыя трудно допустить. Но я никого не знаю, кто-бы искалъ прямолинейную фигуру, которой бы площадь была равна площади параболическаго сегмента; я это сдѣлалъ, въ настоящее время, показавъ, что площадь такого сегмента равна $^4/_3$ площади треугольника, имѣющаго съ сегментомъ одно основаніе и одну высоту. Я это доказалъ двумя способами, разъ на основаніи механическихъ соображеній, а другой разъ чисто геометрическими". Изъ этого письма видно, что уже до Архимеда многіе занимались квадратурой эллипса, но безъ успѣха. Архимедъ въ своемъ сочиненіи „О коноидахъ и сфероидахъ" показалъ, что площадь эллипса равна площади круга, котораго радіусъ есть прямая средне-пропорціональная между большою и малою осью эллипса, а слѣдовательно привелъ квадратуру эллипса къ квадратурѣ круга.

Квадратура параболы—большой шагъ въ Геометріи. Рѣшивъ эту задачу, Архимедъ опровергъ установившееся уже въ то время мнѣніе, что квадратура площади, заключенной между кривою и прямою, невозможна. Онъ нашелъ эту квадратуру при помощи способа *исчерпыванія*, который состоитъ въ слѣдующемъ: пусть ASB будетъ какой нибудь параболическій сегментъ, коего основаніе есть *прямая* AB; прямую AB въ точкѣ C раздѣлимъ пополамъ и проведемъ діаметръ SC, сопряженный хордамъ параллельнымъ AB. Соединимъ S съ точками A и B, получимъ треугольникъ ASB. Если стороны AS и SB въ точкахъ C' и C'' раздѣлимъ пополамъ и проведемъ діаметры, сопряженные хордамъ SA и SB, и соединимъ точки S' и S'' встрѣчи діаметровъ съ параболой съ точками S, A и B, то получимъ два треугольника, сумма которыхъ будетъ равна $^1/_4$ треугольника ASB. Если со сторонами этихъ послѣднихъ треугольниковъ сдѣлаемъ тоже, то получимъ четыре треугольника, которыхъ сумма будетъ равна $^1/_4$ двухъ предъидущихъ, а слѣдовательно $^1/_{16}$ треугольника ASB. Поступая подоб-

---

при всякомъ удобномъ случаѣ присваивали себѣ чужія открытія, нисколько не заботясь о ихъ достовѣрности. Для подобныхъ лицъ Архимедъ позволилъ себѣ заявить о двухъ найденныхъ имъ *ложныхъ* предложеніяхъ, думая „такимъ образомъ тѣхъ лицъ, которыя удостовѣряли, что ими все найдено и что имъ все извѣстно, не приводя никогда доказательства своимъ словамъ, изобличить въ томъ, что они хоть однажды нашли невозможное". Пейраръ указываетъ еще на третье ложное предложеніе въ томъ же сочиненіи.

нымъ образомъ и далѣе, мы будемъ находить, что сумма треугольниковъ, какого бы то ни было порядка, всегда будетъ составлять $^1/_4$ суммы треугольниковъ предъидущаго порядка; продолжая это до безконечности, будемъ имѣть означая черезъ Δ треугольникъ *ASB*:

$$\Delta + \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{4^2} + \frac{\Delta}{4^3} + \ldots$$

Архимедъ, показавъ, что эта сумма равна $^4/_3\Delta$, показываетъ, что параболическій сегментъ не можетъ быть ни больше, ни меньше $^4/_3\Delta$.

Изъ этой квадратуры и изъ теоремъ, изложенныхъ въ сочиненіи „О коноидахъ и сфероидахъ“, мы видимъ, что коническія сѣченія во время Архимеда были обстоятельно изслѣдованы, слѣдовательно задолго до Аполлонія, который родился спустя пятьдесятъ лѣтъ послѣ Архимеда.

„*О числѣ песчинокъ*“ *). Сочиненіе это написано въ видѣ письма къ царю Гелону, въ которомъ Архимедъ доказываетъ, что, какое бы ни было собраніе единицъ извѣстнаго рода, всегда существуетъ число, которымъ можно выразить не только это собраніе единицъ, но и большее.

Сочиненіе свое Архимедъ начинаетъ съ того, что излагаетъ его цѣль. Онъ говоритъ: „Есть люди, полагающія, что число песчинокъ безконечно велико. Я не говорю о пескѣ, который около Сиракузъ, ни о томъ, который въ остальной Сициліи; а я говорю о пескѣ, который могъ бы находиться не только во всѣхъ обитаемыхъ мѣстахъ, но и во всѣхъ необитаемыхъ мѣстахъ. Нѣкоторые полагаютъ, что хотя число песчинокъ не безконечно велико, но невозможно получить числа большаго. Если полагающія такъ представляютъ себѣ объемъ песку равный объему земли, наполняющій всѣ углубленія суши и пропасти моря и возвышающійся наравнѣ съ высочайшими горами, то очевидно для нихъ тѣмъ менѣе понятно, что можетъ существовать число большее числа песчинокъ. Что же касается меня, то я докажу геометрически, что между числами, приведенными нами въ книгахъ, написанныхъ Ксевиппу, есть такія, которыя превышаютъ число песчинокъ не только объема песку, равнаго величинѣ земли, но превышающія—объемъ песку, равнаго по величинѣ вселенной“.

Далѣе Архимедъ соглашается съ мнѣніемъ Аристарха Самосскаго, который утверждалъ, что солнце есть центръ міра, на предѣлахъ котораго находятся неподвижныя звѣзды и около котораго вращается земля. Затѣмъ Архимедъ вычисляетъ объемъ такого шара и полагаетъ, что онъ весь со-

*) Число песчинокъ въ греческомъ текстѣ названо „ψαμμίτης“, въ переводѣ на латинскій его назвали arenarius, откуда произошло французское названіе l'arenaire. Ницe (Nizze), въ своемъ переводѣ сочиненій Архимеда на нѣмецкій языкъ, назвалъ это число „Sandeszahl“.

стоитъ изъ песку и показываетъ, какимъ образомъ выразить число песчинокъ въ этомъ шарѣ.

Онъ говоритъ: „дали названія числамъ отъ единицы до миріады (10000), а дальше повторяютъ миріаду до десяти тысячъ миріадъ*). Назовемъ числа отъ единицы до миріады *первыми*, назовемъ миріаду миріадъ единицей *вторыхъ* чиселъ и такихъ единицъ насчитаемъ десять, сто, тысячу, до миріады миріадъ. Эту миріаду миріадъ *вторыхъ* чиселъ возьмемъ за единицу чиселъ, которыя назовемъ *третьими*. Насчитаемъ такихъ единицъ до миріады миріадъ и возьмемъ это послѣднее число за единицу *четвертыхъ* чиселъ и т. д.".

Изъ этого видимъ, что миріада есть 10^4, миріада миріадъ или единица *вторыхъ* чиселъ есть 10^8, единица *третьихъ* чиселъ есть 10^{16}, *четвертыхъ* 10^{24} и т. д. до 10^{56}. Всѣ числа до этого послѣдняго онъ называетъ числами *перваго періода*, беретъ за единицу число 10^{56} и изъ этой единицы составляетъ числа, которыя онъ называетъ числами *втораго періода* и т. д.

Въ этомъ сочиненіи мы находимъ измѣреніе видимаго діаметра солнца или лучше сказать угла подъ которымъ виденъ діаметръ солнца; изъ данныхъ, полученныхъ такимъ наблюденіемъ, онъ вычисляетъ радіусъ сферы міра и объемъ этой сферы. Затѣмъ онъ полагаетъ, что маковое зерно составляетъ $\frac{1}{40}$ дюйма, а въ маковомъ зернѣ одну миріаду песчинокъ и находитъ, что въ сферѣ всего міра песчинокъ меньше 100, сопровождаемаго 61-мъ нулемъ, т. е. меньше $10^2 . 10^{61} < 10^{64}$. Слѣдовательно 64-й членъ геометрической прогрессіи, въ которой первый членъ единица, а отношеніе 10, больше числа песчинокъ всего міра, въ объемѣ, опредѣляемомъ Архимедомъ.

Въ этомъ сочиненіи мы находимъ первую идею десятичной системы счисленія. При своихъ вычисленіяхъ Архимедъ пользуется двумя прогрессіями, одной ариѳметической и другой геометрической. Первый членъ первой прогрессіи нуль, а разность 8 единицъ; первый членъ геометрической прогрессіи единица, а отношеніе 8-я степень 10. Сравненіе такихъ прогрессій, какъ извѣстно, привело къ открытію логариѳмовъ. Архимедъ оканчиваетъ свое сочиненіе слѣдующимъ обращеніемъ къ Гелону: „О царь! все то, что я сказалъ многимъ будетъ казаться невѣроятнымъ, въ особенности лицамъ не посвященнымъ въ математическія науки; но оно будетъ ясно тѣмъ, ко-

*) До Архимеда существовала уже система счисленія, въ которой числа выражались чрезъ *монады* (μονάδες), *декады* (δεκάδες), *гекатонтады* (ἑκατοντάδες), *хиліады* (χιλιάδες), *миріады* (μυριάδες), *десятки миріадъ* (δέκα μυριάδες), *сотни миріадъ* (ἑκατὸν μυριάδες), *тысячи миріадъ* (χίλιαι μυριάδες).

торые, занимались этой наукой желали знать разстояние и величину земли, солнца, луны и цѣлаго міра. Вотъ почему я думалъ не безполезно будетъ знать и другимъ".

Въ сочинени „О числѣ песчинокъ" показанъ способъ опредѣлить видимый діаметръ солнца. Изъ пріема, употребленнаго Архимедомъ, можно заключить, что во время Архимеда не знали еще какъ опредѣлить уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника, коего равныя стороны и основаніе извѣстны. Пріемъ предложенный Архимедомъ графическій. Изъ этого можно заключить, что вычисленіе хордъ дугъ круга было неизвѣстно, а потому Тригонометрія, даже прямолинейная, несуществовала. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что пріемъ, при помощи котораго Архимедъ вычисляетъ стороны вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ, былъ уже большой шагъ къ вычисленію хордъ.

Сочиненіе это еще важно въ томъ отношен. , что изъ него и изъ комментарій Евтокія, почерпнуто все извѣстное о состояніи Ариѳметики у Грековъ.

„Леммы" Въ этомъ сочинени, считаемое нѣкоторыми математиками сомнительнымъ *), не принадлежащемъ Архимеду, содержится много весьма замѣчательныхъ теоремъ, изъ которыхъ особенно заслуживаетъ вниманіе слѣдующая: если двѣ хорды въ кругѣ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то сумма квадратовъ, построенныхъ на отрѣзкахъ хордъ, равна квадрату, построенному на діаметрѣ. При помощи этой теоремы нашли діаметръ круга, описаннаго около треугольника. Многія изъ теоремъ, находящихся въ „Леммахъ", мы находимъ въ сочиненіяхъ Брамагупты.

Вотъ краткое содержаніе геометрическихъ сочиненій Архимеда. Посмотримъ, какія начала были имъ положены и какой методъ былъ имъ употребленъ.

---

*) Въ настоящее время можно съ достовѣрностью утверждать, что сочиненіе „Леммы" принадлежитъ Архимеду. Впервые оно было переведено съ арабскаго языка на латинскій въ 1659 году Гревесомъ (Greaves) и Фостеромъ (Foster, подъ заглавіемъ „Lemmata Archimedis"; впослѣдствіи это сочиненіе снова было переведено съ арабскаго, въ 1661 А. Борелли (A. Borelli), съ примѣчаніями Аль-Мохтассо-Абулъ Гассана (Al-Mochtassa-Aboul-Hassan) и Абулъ-Сагалъ-аль-Куги (Abou-Sahal-al-Cuhi), комментировавшихъ это сочиненіе

Гербелотъ Herbelot) въ своей „Bibliotheque orientale", изданной въ 1697 году, упоминаетъ о сочиненіи по Геометріи Архимеда, которое перевелъ съ греческаго Табитъ-бенъ-Корра, съ примѣчаніями Абулъ-Гассана-Али-бенъ-Агмедъ-аль-Нессуи Abou-Hassan-Ali-ben-Ahmed-al-Nessoui) и съ 15 чертежами Насиръ-Еддинъ-ат-Гусси; заглавіе этого сочиненія Ketab maakhoudhat fi ossoul al hendassah li Arschemides.

Кромѣ этого есть еще статья, написанная по поводу этого сочиненія Сагалль-Аль-Куги (Sohail-al-Caouhi), подъ заглавіемъ: Tezjin ketab Arschemides fil-maakhoudhat

Многіе геометры въ сочиненіяхъ Архимеда находятъ первую идею *дифференціальнаго исчисленія.* Изъ ниже слѣдующаго изложенія метода его изслѣдованій, мы увидимъ на сколько такое мнѣніе справедливо.

Начала, положенныя Архимедомъ, какъ основанія своихъ изслѣдованій, суть слѣдующія:

1) Прямая линія короче всѣхъ тѣхъ линій, которыя имѣютъ общіе съ нею концы

2) Двѣ линіи, лежащія въ одной плоскости и имѣющія общіе концы, не равны, когда обѣ вогнуты въ одну сторону и одна изъ нихъ заключена другою и прямою, имѣющей съ ними общіе концы, или когда одна изъ нихъ только частію заключена, какъ выше сказано, а остальная часть общая, то заключенная линія будетъ короче.

3, Если поверхности имѣютъ съ плоскостью общіе предѣлы, то плоская поверхность будетъ наименьшая.

4) Двѣ поверхности, имѣющія общіе предѣлы въ одной плоскости, будутъ не равны, когда обѣ вогнуты въ одну сторону и одна изъ нихъ заключена другою и плоскостью, или если одна заключена только частью, а остальная часть будетъ общая, то заключенная поверхность будетъ наименьшая.

5) Если даны двѣ линіи или двѣ поверхности, или два тѣла не равныя, то избытокъ одной надъ другой можетъ быть сложенъ самъ съ собою столько разъ, что сумма превзойдетъ или одну или другую изъ данныхъ величинъ. Вотъ всѣ начала, съ которыми Архимедъ приступилъ къ своимъ изслѣдованіямъ. Многіе думали, что первымъ началомъ Архимедъ опредѣляетъ прямую, но это ошибочно,—это начало выражаетъ только одно изъ свойствъ прямой.

Если внимательно прослѣдить процессъ доказательствъ Архимеда чему равна площадь круга, чему равны поверхности и объемы цилиндра, конуса и шара, то мы легко замѣтимъ, что всѣ эти теоремы были найдены Архимедомъ слѣдующимъ образомъ: онъ вписываетъ въ кругъ правильный многоугольникъ, въ цилиндръ правильную призму, въ конусъ—пирамиду, въ шаръ какой нибудь многогранникъ и находитъ, что площадь вписаннаго многоугольника равна площади прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть периметръ и апоѳема вписаннаго многоугольника, что поверхность вписанной въ цилиндръ призмы равна площади прямоугольника, коего стороны суть периметръ основанія призмы и ея высота, поверхность пирамиды равна площади треугольника, имѣющаго основаніемъ периметръ основанія пирамиды, а высотою апоѳему пирамиды.

Точно также онъ находитъ объемы описанныхъ около цилиндра конуса и шара -призмы, пирамиды и многогранника. Выраженія для поверх-

постей и объемовъ, вписанныхъ фигуръ и тѣлъ, не зависятъ отъ числа сторонъ или граней, которое можетъ возрастать *неопредѣленно*, такъ что разность между данною фигурою или тѣломъ и вписанными фигурами или тѣлами можетъ сдѣлаться *менѣе всякой данной величины*. Архимедъ это и доказываетъ. Оставалось только выраженія для поверхностей и объемовъ, вписанныхъ фигуръ перенести на площадь круга, поверхности и объемы цилиндра, конуса и шара. Такимъ образомъ онъ получилъ, что площадь круга равна площади прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть окружность круга и его радіусъ, что поверхность цилиндра равна площади прямоугольника, коего стороны суть окружность основанія цилиндра и высота его и т. д.

Такъ какъ по понятію о безконечной дѣлимости линій, поверхностей и объемовъ, древніе геометры и софисты сдѣлали бы много вѣскихъ возраженій, то Архимедъ доказываетъ, что, напримѣръ, площадь круга не можетъ быть ни больше, ни меньше площади прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть окружность и радіусъ круга; точно также онъ поступаетъ и съ поверхностями и объемами другихъ тѣлъ. Ходъ этого послѣдняго доказательства для круга есть слѣдующій:

Онъ допускаетъ, что площадь круга больше площади прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть окружность и радіусъ круга. Допустивъ это онъ вписываетъ въ кругъ многоугольникъ, коего бы площадь была меньше площади круга, и больше площади, построеннаго треугольника. Такой многоугольникъ можно построить на основаніи того, что вписанный многоугольникъ есть величина *перемѣнная*, которая можетъ разниться отъ круга на *какую угодно малую величину*. Когда такой многоугольникъ вписанъ, то его площадь будетъ равна площади прямоугольнаго треугольника, коего катеты суть периметръ и апоѳема многоугольника. Но периметръ и апоѳема этого многоугольника меньше окружности (Нач. 2), а апоѳема меньше радіуса, слѣдовательно площадь этого треугольника меньше площади построеннаго, что противорѣчитъ допущенію. Точно также онъ доказываетъ, что площадь круга не можетъ быть меньше площади построеннаго треугольника.

Изъ этого процесса видимъ, что доказательство Архимеда есть методъ *безконечно малыхъ*, пополненный методомъ *предѣловъ*. Мы у Архимеда находимъ то, что въ новомъ анализѣ называется величиной *перемѣнной* и то, что называется ея *предѣломъ*. Мы у него находимъ безконечное дробленіе величинъ дифференціалы, и суммованіе этихъ величинъ—интегралы.

Изъ этого видимъ, что принятый въ настоящее время методъ предѣловъ для изложенія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, преи-

мущественно передъ методомъ безконечно-малыхъ, который нарушаетъ всякую математическую точность, мы находимъ у Архимеда.

Что же касается до того, что его упрекаютъ въ частомъ употребленіи не прямаго способа доказательства, т. е. приведенія къ нелѣпости или апагогическому, то это упрекъ незаслуженный, такъ какъ нашъ методъ предѣловъ въ строгомъ смыслѣ есть методъ непрямой. Извѣстно, что основная теорема метода предѣловъ: *если двѣ перемѣнныя величины, оставаясь равными, стремятся къ извѣстнымъ предѣламъ, то и предѣлы этихъ перемѣнныхъ равны,* доказывается приведеніемъ къ нелѣпости (см. „Начала" Евкл. стр. 319); за этимъ, съ помощью этой теоремы, мы обращаемъ нашъ методъ предѣловъ въ прямой.

По словамъ Паппуса, въ V книгѣ его „Collectiones mathematicae", Архимедъ занимался изученіемъ пяти правильныхъ тѣлъ. Видя невозможность построить большее число такихъ тѣлъ, Архимедъ создалъ новый видъ многогранниковъ, названныхъ *полуправильными:* стороны ихъ тоже правильные многоугольники, но не подобные между собою; ихъ числомъ тринадцать. Паппусъ описываетъ ихъ весьма подробно *). Впослѣдствіи времени, Кеплеръ помѣстилъ ихъ во второй части своего сочиненія „Harmonice mundi".

Остается теперь сказать о сочиненіяхъ по Механикѣ. Архимеда можно назвать творцемъ Механики, онъ положилъ основаніе и развилъ законы Статики и Гидростатики. Читая сочиненія Архимеда удивляешься его творчеству, глубинѣ мысли и тонкому соображенію, его сочиненія не суть развитіе, дополненіе или улучшеніе извѣстныхъ теорій — это созданіе собственнаго его творческаго духа; въ томъ, что онъ излагаетъ и изслѣдуетъ, онъ не имѣлъ предшественниковъ, поэтому характеръ его сочиненій рѣзко отличается отъ сочиненій всѣхъ предшественниковъ, какъ по содержанію, такъ и по изложенію.

„*О равновѣсіи и центрѣ тяжести*" **). Въ основаніи этого сочиненія онъ дѣлаетъ слѣдующія *допущенія* (postulat):

1) Равныя тяжести, приложенныя къ равнымъ плечамъ рычага, находятся въ равновѣсіи.

2) Равныя тяжести, приложенныя къ неравнымъ плечамъ рычага, не находятся въ равновѣсіи; и та тяжесть, которая виситъ на болѣе длинномъ плечѣ падаетъ къ низу.

3) Если тяжести, повѣшенныя на какихъ нибудь плечахъ рычага находятся въ равновѣсіи, то если къ одной изъ этихъ тяжестей прибавить

*) Число всѣхъ полуправильныхъ многогранниковъ тридцать.

**) Сочиненіе это дошло до насъ только въ переводѣ на латинскій языкъ, нѣкоторыя изъ предложеній этого сочиненія до насъ не дошли.

нѣчто, то равновѣсіе нарушится, и тяжесть къ которой мы прибавимъ пойдетъ къ низу.

4) Точно также если отъ одной изъ тяжестей отымемъ нѣчто, то равновѣсіе нарушится и та тяжесть, отъ которой мы не отнимали, пойдетъ къ низу.

5) Если двѣ плоскія фигуры равныя и подобныя, будутъ наложены другъ на друга, то ихъ центры тяжести будутъ одинъ подъ другимъ.

6) Центры тяжести фигуръ не равныхъ, но подобныхъ, помѣщены подобно.

7) Если тяжести, повѣшенныя на какихъ нибудь плечахъ рычага, находятся въ равновѣсіи, то если мы къ этимъ тяжестямъ прибавимъ поровну, то равновѣсіе не нарушится.

8) Центры тяжести въ одну сторону вогнутой фигуры находятся внутри фигуры.

При помощи этихъ началъ Архимедъ сдѣлалъ всѣ свои изслѣдованія.

Замѣтимъ здѣсь, что первое допущеніе тождественно съ одиннадцатой аксіомой „Началъ" Евклида.

Вотъ результаты изслѣдованій Архимеда.

1) Соизмѣримыя тяжести находятся въ равновѣсіи, когда плечи рычага обратно пропорціональны тяжестямъ.

2) Тоже имѣетъ мѣсто когда, тяжести несоизмѣримы.

3) Центръ тяжести параллелограмма находится на пересѣченіи діагоналей.

4) Центръ тяжести треугольника *).

5) Центръ тяжести трапеціи.

6) Центръ тяжести параболическаго сегмента.

7) Квадратура параболическаго сегмента въ зависимости отъ его центра тяжести.

„О равновѣсіи тѣлъ, погруженныхъ въ жидкость". Въ этой книгѣ опредѣлены различныя положенія, принимаемыя коноидомъ, погруженнымъ въ жидкость, при извѣстномъ удѣльномъ вѣсѣ коноида относительно жидкости.

Древніе приписывали Архимеду 41 механическое изобрѣтеніе, но до насъ дошли только слѣдующія: полиспасты, безконечный винтъ, Архимедовъ винтъ, система зажигательныхъ стеколъ, водяной органъ, геометрическая игра, состоящая въ томъ, что квадратъ разрѣзывали на 14 частей, представляющихъ многоугольники самыхъ разнообразныхъ формъ, изъ ко-

*) По поводу этой теоремы Евтокій доказываетъ что если изъ трехъ вершинъ треугольника проведемъ прямыя къ срединамъ трехъ его сторонъ, то эти прямыя пересѣкутся въ одной точкѣ.

торыхъ складывали потомъ всевозможныя фигуры. О нѣкоторыхъ изъ этихъ изобрѣтеніяхъ мы находимъ только довольно темныя описанія у нѣкоторыхъ писателей. Архимедъ никогда не давалъ описаній изобрѣтенныхъ имъ машинъ. Плутархъ, въ жизнеописании Марцелла, говоритъ: „Архимедъ обладалъ такимъ проницательнымъ умомъ, творчество его было такъ велико, познанія въ теоріи столь обширны, что онъ никогда не хотѣлъ писать о своихъ механическихъ изобрѣтеніяхъ, которыя доставили ему такую великую славу и благодаря которымъ ему приписывали не человѣческія познанія, а божественный умъ".

Одно изъ самыхъ остроумныхъ изобрѣтеній Архимеда это безспорно винтъ, носящій его имя; онъ его изобрѣлъ во время путешествія по Египту. Подробно описывать этотъ приборъ мы не станемъ, а упомянемъ только, что весь механизмъ его состоитъ въ томъ, что тяжесть, вслѣдствіе которой происходитъ паденіе тѣлъ, заставляетъ подыматься въ этой машинѣ воду, вода подымается въ винтѣ, по той причинѣ что она въ немъ постоянно понижается собственною тяжестью. Это заставило сказать Галлилея: „La quale inventione non solo è maravigliosa, ma è miracolosa".

Нѣкоторые писатели упоминаютъ также о громадномъ кораблѣ, построенномъ Архимедомъ, по порученію Гіерона; описаніе этого корабля въ мельчайшихъ подробностяхъ сохранилъ намъ Атеней.

Архимедъ былъ не только знаменитый геометръ, но также былъ основательно знакомъ съ астрономіей, что видно изъ его сочиненія „О числѣ песчинокъ". Кромѣ того онъ написалъ астрономическое сочиненіе „Sphaeropoeia", о которомъ упоминаетъ Паппусъ въ своихъ „Математическихъ коллекціяхъ". Содержаніе этого сочиненія описаніе изобрѣтеннаго Архимедомъ прибора—*планетарія* для объясненія движенія свѣтилъ небесныхъ, который былъ предметомъ всеобщаго удивленія. Цицеронъ считалъ его однимъ изъ самыхъ остроумныхъ изобрѣтеній человѣческаго ума, а Клавдій воспѣлъ его въ стихахъ. Но сочиненіе это до насъ не дошло.

Выше мы привели разсказы историковъ, для того, чтобы показать, какое мнѣніе существовало въ древности объ Архимедѣ. По словамъ Плутарха, древніе удивлялись ясности доказательствъ предложенныхъ великимъ геометромъ. Въ „Жизнеописаніи Марцелла" онъ говоритъ: „Во всей Геометріи нѣтъ теоремъ болѣе трудныхъ и глубокихъ, каковы теоремы Архимеда, но, не смотря на это, онѣ доказаны очень просто и весьма ясно. Нѣкоторые приписываютъ это ясности взгляда Архимеда, другіе его усидчивости, которая дѣлаетъ понятными самыя сложныя вещи. По моему мнѣнію невозможно найти доказательства какого-бы то ни было изъ предложеній Архимеда; но прочитавши доказательство, данное имъ, намъ кажется, что мы сами дали бы это доказательство, такъ оно просто и легко".

Согласно желанію Архимеда, на мѣстѣ гдѣ онъ былъ похороненъ, былъ воздвигнутъ памятникъ, состоящій изъ цилиндра, въ который вписанъ шаръ, съ надписью, обозначавшей соотношеніе, существующее между этими двумя тѣлами*). Полтора столѣтія послѣ смерти Архимеда, Цицеронъ, будучи квесторомъ въ Сициліи, захотѣлъ увидѣть этотъ памятникъ; но никто не могъ его указать. Однако онъ его самъ нашелъ, при чемъ воскликнулъ: „и такъ нѣкогда самый благородный и самый ученый изъ городовъ Греціи не зналъ бы мѣста погребенія одного изъ своихъ талантливыхъ граждапъ, если бы незнакомецъ изъ Арпина не указалъ бы его“.

Аполлоній Пергскій. Около того времени когда Архимедъ кончалъ свою ученую дѣятельность въ Александрійской школѣ появился геометръ не менѣе знаменитый, прославившійся многочисленными своими открытіями,— это былъ Аполлоній, прозванный древними *великимъ геометромъ;* онъ былъ родомъ изъ города Перги, въ Памфиліи, откуда и получилъ названіе *пергскаго* **). Аполлоній родился около 240 г. до Р. Х., онъ былъ ученикъ Александрійской школы, гдѣ по словамъ Паппуса учился у учениковъ Евклида. Жизнь Аполлонія мало извѣстна ***), все что извѣстно о немъ мы знаемъ изъ сочиненія Паппуса, который изображаетъ Аполлонія, какъ „человѣка надменнаго, завистливаго, и при всякомъ удобномъ случаѣ дурно отзывающемся о другихъ“.

Аполлоній былъ одинъ изъ самыхъ глубокихъ и плодовитыхъ писателей древности; его сочиненія составляли значительную часть математической литературы древнихъ. Аполлоній написалъ слѣдующія сочиненія:

„*Коническія Сѣченія*“ (Κωνικὰ στοιχεῖα) въ восьми книгахъ; „**De tactionibus**“ (Περὶ ἐπαφῶν) въ двухъ книгахъ; „**De locis planis**“ (Περὶ ἐπιπέδων τόπων) въ двухъ книгахъ; „**De sectione rationis**“ (Περὶ λόγου ἀποτομῆς) въ двухъ книгахъ; „**De sectione spatii**“ (Περὶ χωρίου ἀποτομῆς) въ двухъ книгахъ; „**De sectione determinata**“ въ двухъ книгахъ; „**De inclinationibus**“ въ двухъ книгахъ; „**De Cochleâ**“; „**De perturbatis rationibus**“; и „о сравненіи икосаедра и додекаедра, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ“.

Самое замѣчательное изъ сочиненій, написанныхъ Аполлоніемъ есть его „*Коническія Сѣченія*“ ****) въ восьми книгахъ; до насъ дошли только

---

*) Отношеніе между поверхностями и объемами шара вписаннаго въ цилиндръ и цилиндра было найдено Архимедомъ.

**) Аполлонія Пергскаго часто называютъ *пергиейскимъ*.

***) Аполлоній Пергскій жилъ въ царствованіе Птоломея Евергета (247—222). Ученыхъ, носившихъ имя Аполлонія, было нѣсколько, одинъ изъ нихъ былъ астрономъ извѣстный подъ именемъ *Иисилона* вѣроятно по сходству буквы є съ луной; онъ жилъ въ царствованіе Птоломея Филопатора (222—205).

****) Существуетъ только одно изданіе, съ греческимъ текстомъ, „Коническихъ сѣченій“

первыя четыре книги въ греческомъ текстѣ, съ комментаріями Евтокія. 5-я, 6-я и 7-я книги дошли до насъ только благодаря переводу, сдѣланному на арабскій; восьмая же книга возстановлена извѣстнымъ *Галлеем* на основаніи замѣчаній въ *леммахъ* Паппуса.

Первыя четыре книги „Коническихъ Сѣченій" содержали все написанное до Аполлонія по этому предмету, онъ только обобщилъ и расширилъ извѣстное до него. Эти четыре книги составляли, такъ называемые „*Начала* Коническихъ Сѣченій"; остальныя четыре содержатъ собственныя открытія Аполлонія.

„Коническія Сѣченія" Аполлонія можно назвать вѣнцомъ всей греческой Геометріи, все написанное въ послѣдствіи времени—это слабое подражаніе мастерскому сочиненію *великаго* геометра. Въ этомъ сочиненіи все расположено симметрично; единство мысли проявляется въ мельчайшихъ подробностяхъ и во всемъ сочиненіи видна основная мысль автора, стремящагося связать между собою всѣ сѣченія конуса.

До Аполлонія разсматривали только коническія сѣченія, полученныя на прямомъ конусѣ или такъ наз. конусѣ вращенія; при чемъ всегда предполагали, что плоскость сѣченія, т. е. плоскость, образующая „коническое сѣченіе", перпендикулярна къ одной изъ образующихъ конуса; чтобы получить всѣ три рода коническихъ сѣченій, необходимы были и три рода конусовъ, именно: для полученія *эллипса* (ἔλλειψις) конусъ остроугольный; для *параболы* (παραβολή)—конусъ прямоугольный и для *гиперболы* (ὑπερβολή)—конусъ тупоугольный. Аполлоній первый сталъ разсматривать коническія сѣ-

---

Аполлонія. Изданіе это было начато Давидомъ Грегори и окончено Галлеемъ, оно напечатано въ Оксфордѣ въ 1710 г. in fol. подъ заглавіемъ: „Apollonii Pergaei Conicorum libri VIII". Изданіе это содержитъ: 1) греческій текстъ первыхъ четырехъ книгъ, на основаніи различныхъ рукописей съ латинскимъ переводомъ, сдѣланнымъ Коммандиномъ въ Болоньѣ въ 1566 г. и исправленнымъ Галлеемъ; Леммы Паппуса и комментаріи Евтокія. 2) книги 5-ю, 6-ю и 7-ю на латинскомъ языкѣ, на основаніи переводовъ сдѣланныхъ съ двухъ арабскихъ переводовъ, первый латинскій переводъ былъ сдѣланъ оріенталистомъ Авраамомъ Экелленси (Echellensis)[1] и изданъ Борелли, съ комментаріями, во Флоренціи въ 1661 г., второй сдѣланъ Равіусомъ (Ravius) въ Килѣ въ 1669 г., 3) 8-ю книгу, возстановленную Галлеемъ, 4) сочиненіе Серенуса „О сѣченіяхъ цилиндра и конуса".

Изданіе полнаго собранія сочиненій Аполлонія было предпринято Пейраромъ въ началѣ этого столѣтія, но къ сожалѣнію смерть прекратила дѣятельность Пейрара, извѣстнаго уже своими изданіями полныхъ собраній сочиненій Евклида и Архимеда, сочиненія Аполлонія не были напечатаны и трудамъ Пейрара *не было* суждено выйти въ свѣтъ.

[1]) Abraham Echellensis, маронитскій ученый, родомъ изъ Екеля (Ekel), въ Сиріи, изучалъ философію и богословіе въ Римѣ. По приглашенію Le-Jay онъ отправился въ Парижъ, гдѣ принялъ участіе въ изданіи Библіи на семи языкахъ, предпринятомъ въ 1643 г. Онъ авторъ нѣсколькихъ сочиненій; умеръ въ 1664 г.

ченія на *косомъ конусѣ* (не прямоугольномъ), при чемъ тремъ различнымъ родамъ сѣченія далъ имена: *эллипсъ*, *парабола* и *гипербола* *).

Все сочиненіе Аполлонія основано на одномъ единственномъ свойствѣ коническихъ сѣченій, которое непосредственно слѣдуетъ изъ самой природы конусовъ, на которыхъ они получены. Это основное свойство есть основаніе всего ученія древнихъ о коническихъ сѣченіяхъ; свойство это, какъ справедливо замѣтилъ Шаль, въ новѣйшихъ сочиненіяхъ упущено изъ виду; мы изложимъ его такъ, какъ изложилъ его Шаль въ своемъ сочиненіи „Aperçu historique“ на страницахъ 18 и 19. „Вообразимъ себѣ косой конусъ съ круговымъ основаніемъ; прямая, проведенная изъ его вершины въ центръ основанія, называется *осью конуса*. Плоскость, проведенная по оси, перпендикулярно площади основанія, разсѣкаетъ конусъ по двумъ ребрамъ и площадь основанія по діаметру; треугольникъ, коего основаніе этотъ діаметръ, а боковыя стороны оба ребра, носитъ названіе: *треугольника по оси*. Аполлоній предполагаетъ, для полученія своихъ коническихъ сѣченій, что сѣкущая плоскость перпендикулярна площади треугольника по оси. Точки, въ которыхъ пересѣкаетъ эта плоскость обѣ стороны треугольника суть *вершины* кривой; а прямая ихъ соединяющая *діаметръ* ея. Этотъ діаметръ Аполлоній называетъ latus transversum. Если, изъ одной изъ вершинъ кривой возставимъ перпендикуляръ къ площади треугольника по оси; и дадимъ ему извѣстную опредѣленную длину, какую мы укажемъ ниже; затѣмъ изъ оконечности этого перпендикуляра проведемъ прямую къ другой вершинѣ кривой. Изъ какой нибудь точки діаметра кривой возставимъ перпендикулярно къ нему *ординату*: то квадратъ, построенный на этой ординатѣ, заключающейся между діаметромъ и кривой, будетъ равенъ прямоугольнику, построенному на части ординаты, заключающейся между діаметромъ и прямой, и на части діаметра, заключающейся между первою вершиною и основаніемъ ординаты. Вотъ основное и характеристическое свойство найденное Аполлоніемъ для своихъ коническихъ сѣченій, этимъ свойствомъ онъ пользуется, при помощи преобразованій и очень искусныхъ выводовъ, для

---

*) Названіе *парабола* было извѣстно еще Архимеду, онъ его употребилъ въ заглавіи одного изъ своихъ сочиненій, хотя въ текстѣ кривую эту онъ вездѣ называетъ сѣченіе прямоугольнаго конуса. Подобнымъ образомъ онъ не употребляетъ терминъ *гипербола* и *эллипсъ*. Точно также *діаметръ* Архимедъ обозначаетъ довольно неопредѣленнымъ терминомъ: прямая простирающаяся до оси. Вообще, необходимо замѣтить, что вся терминологія въ сочиненіяхъ Архимеда и Аполлонія весьма неудовлетворительна — отличается многословіемъ; такъ напр. термины *абсцисса* и *ордината* замѣнены длинными опредѣленіями; даже само названіе *радіусъ круга* было неизвѣстно греческимъ геометрамъ, они называли его *линія выходящая изъ центра*. Вслѣдствіи такого неудовлетворительнаго состоянія терминологіи, чтеніе сочиненій греческихъ математиковъ въ подлинникѣ крайне тяжело и скучно.

нахожденія почти всѣхъ другихъ свойствъ. Свойство это въ рукахъ Аполлонія, имѣетъ почти тоже значеніе, что и уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными въ Аналитической Геометріи Декарта".

„Изъ этого видно, что діаметръ кривой и перпендикуляръ, возставленный изъ одной изъ его оконечностей, достаточны для построенія кривой. Этими двумя элементами воспользовались древніе геометры для постановки теоріи коническихъ сѣченій. Упомянутый выше перпендикуляръ они назвали latus erectus *); новѣйшіе геометры замѣнили это названіе другимъ latus rectum, которое они перемѣнили на названіе *параметръ*, которое существуетъ и понынѣ. Аполлоній, и всѣ геометры писавшіе послѣ него, давали различныя геометрическія выраженія, взятыя въ конусѣ, длинѣ этого latus rectum'а для каждаго сѣченія: но ни одно изъ нихъ намъ кажется не можетъ сравниться по простотѣ и изяществу, съ выраженіемъ, даннымъ Яковомъ Бернулли (Jacques Bernulli). Вотъ оно: „если проведемъ плоскость параллельную основанію конуса, на разстояніи отъ его вершины, равномъ разстоянію отъ нея плоскости искомаго коническаго сѣченія, то эта плоскость пересѣчетъ конусъ по кругу, коего діаметръ будетъ latus rectum коническаго сѣченія". На основаніи сказаннаго легко показать какъ нанесть данное коническое сѣченіе на данный конусъ".

Вотъ основная мысль сочиненія Аполлонія. Оно начинается съ опредѣленія конуса, котораго поверхность онъ образуетъ (κωνικὴν ἐπιφανείαν) движеніемъ прямой линіи, вращающейся около неподвижной точки и коей другая оконечность двигается по окружности круга. Неподвижная точка—это *вершина* (κορυφή), а кругъ *основаніе* конуса. Прямая, проведенная изъ вершины конуса въ центръ основанія, есть *ось конуса*: Аполлоній различаетъ *простую ось* и *сопряженныя оси*. Парабола имѣетъ одну ось неопредѣленной длины. Эллипсъ и гипербола имѣютъ сопряженныя оси, взаимно перпендикулярныя.

Изложимъ вкратцѣ содержаніе каждой изъ восьми книгъ „Коническихъ Сѣченій" Аполлонія **).

Книга I. въ ней изложено образованіе трехъ главныхъ коническихъ сѣченій. Во второмъ предложеніи этой книги Аполлоній доказываетъ, что въ *параболѣ* (παραβολή—равенство, сравненіе) квадратъ, построенный на ординатѣ, равенъ прямоугольнику, построенному на абсциссѣ и параметрѣ. Свойство это мы выражаемъ въ настоящее время алгебраическимъ уравне-

*) Аполлоній въ своемъ сочиненіи называетъ этотъ перпендикуляръ *прямая* ὀρθία. Терминъ latus rectum былъ въ употребленіи до XVIII в. Latus erectus значитъ перпендикулярная линія.

**) Первыя три книги Аполлоній посвящаетъ Евдему, четверсуль Атталу.

ніемъ $ax=y^2$, при чемъ a —параметръ, x—абсцисса, а y—ордината. Это уравненіе показываетъ, что съ возрастаніемъ x возрастаетъ y, при постоянномъ параметрѣ; изъ этого мы заключаемъ, что парабола есть кривая не замкнутая, которой вѣтви никогда не сходятся

Въ *эллипсѣ* (ἔλλειψις—недостатокъ), квадратъ, построенный на ординатѣ, всегда меньше, а въ *гиперболѣ* (ὑπερβολή—избытокъ) всегда больше прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ и параметрѣ. Въ самомъ дѣлѣ, эллипсъ есть кривая замкнутая, подобно кругу, его уравненіе, принимая абсциссы въ вершинѣ, есть $y^2=(ax-x^2)\frac{b}{a}$, гдѣ a—ось, а b—параметръ. Итакъ квадратъ y^2 меньше прямоугольника bx. Уравненіе гиперболы $ay^2=abx+bx^2$, или $b:a=y^2:ax+x^2$; квадратъ, построенный на ординатѣ больше прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ и параметрѣ. При увеличеніи прямоугольниковъ, ординаты увеличиваются въ томъ же отношеніи, гипербола есть кривая не замкнутая, коей вѣтви постоянно удаляются отъ ея оси.

Два взаимно перпендикулярные сопряженные діаметры Аполлоній называетъ *осями*. Далѣе Аполлоній разсматриваетъ *касательныя* въ какой нибудь точкѣ коническихъ сѣченій и возможное число паръ, сопряженныхъ діаметровъ.

Книга II содержитъ предложенія, относящіяся къ ассимптотамъ гиперболы, въ ней изслѣдованы ихъ свойства, а равно свойства діаметровъ. Изъ другихъ предложеній второй книги заслуживаетъ вниманія еще слѣдующее: прямая, соединяющая точку пересѣченія двухъ касательныхъ къ коническому сѣченію, съ срединой хорды, соединяющей эти точки касанія, есть діаметръ коническаго сѣченія. Въ этой же книгѣ доказано, что во всякомъ коническомъ сѣченіи существуетъ только одна пара взаимно-перпендикулярныхъ осей. Въ концѣ книги помѣщены задачи и ихъ рѣшенія.

Книга III. Первыя 44 предложенія этой книги составляютъ цѣлый отдѣлъ, въ которомъ изслѣдованы свойства, равенство и отношенія площадей, составленныхъ изъ сѣкущихъ и касательныхъ къ коническимъ сѣченіямъ. Предложенія эти заключаются въ слѣдующемъ, болѣе общемъ: „если изъ точки проведемъ двѣ касательныя къ коническому сѣченію, и проведемъ параллельно имъ двѣ сѣкущія, до ихъ пересѣченія то отношеніе квадратовъ, построенныхъ на касательныхъ будетъ равно отношенію прямоугольниковъ, построенныхъ на сѣкущихъ и ихъ внѣшнихъ отрѣзкахъ". Предложеніе 27-е замѣчательно тѣмъ, что въ немъ изслѣдованы свойства, которыя въ настоящее время служатъ исходною точкою изслѣдованій *о гармоническихъ точкахъ*.

Предложенія, слѣдующія за 44-мъ, можно выразить слѣдующими двумя главными предложеніями, изъ которыхъ первое: „если изъ одной точки проведемъ двѣ сѣкущія, то отношеніе произведенія разстояній данной точки

отъ двухъ точекъ сѣкущей, въ которой она пересѣкаетъ коническое сѣченіе и произведенія подобныхъ же разстояній для другой сѣкущей, остается постояннымъ, если мы изъ какой нибудь другой точки проведемъ двѣ сѣкущія, параллельныя предыдущимъ". Второе изъ этихъ предложеній „если изъ какой нибудь точки сѣкущей, проведемъ двѣ касательныя къ коническому сѣченію и точки касанія соединимъ хордою, то сѣкущая въ точкахъ, изъ которой проведены касательныя, точкѣ ея пересѣченія съ хордою и двухъ точкахъ ея пересѣченія съ коническимъ сѣченіемъ раздѣлена въ гармоническомъ отношеніи". На этомъ предложеніи въ новѣйшей Геометріи основанъ *методъ взаимныхъ поляръ*, этимъ предложеніемъ воспользовался еще прежде Лагиръ (La-Hire), какъ основаніемъ, въ своей теоріи коническихъ сѣченій.

Далѣе Аполлоній доказываетъ предложенія, относящіяся до площадей, какъ напримѣръ, что треугольники, составленные ассимптотами и касательною къ гиперболѣ, имѣютъ постоянную площадь. Въ 45 предложеніи говорится о *фокусахъ* коническихъ сѣченій. Аполлоній называетъ ихъ *точками происходящими при приложеніи* (σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς). Онъ разсматриваетъ только фокусы эллипса и гиперболы, о фокусѣ параболы ничего не сказано. Опредѣленіе фокусовъ и ихъ свойства заключаются въ слѣдующемъ. У Аполлонія фокусъ есть точка, дѣлящая большую ось на двѣ части, составляющія прямоугольникъ, котораго площадь равна $1/4$ площади фигуры, подъ фигурою надо понимать прямоугольникъ, построенный на параметрѣ и большой оси, или, что все равно квадратъ, построенный на малой оси. Далѣе доказано свойство угловъ паденія и отраженія; на основаніи физическихъ свойствъ этихъ точекъ Кеплеръ назвалъ ихъ *фокусами*. Доказано постоянство суммы радіусовъ векторовъ и много другихъ предложеній, которыя въ настоящее время составляютъ предметъ элементарныхъ сочиненій о коническихъ сѣченіяхъ.

Книга IV. Первыя двадцать три предложенія этой книги относятся къ гармоническому дѣленію прямыхъ, проведенныхъ въ плоскости коническихъ сѣченій. Въ слѣдующихъ предложеніяхъ авторъ изслѣдуетъ систему двухъ коническихъ сѣченій и доказываетъ, что два коническихъ сѣченія болѣе чѣмъ въ *четырехъ* точкахъ, пересѣкаться не могутъ. Далѣе онъ доказываетъ, что два коническихъ сѣченія могутъ имѣть общими двѣ точки пересѣченія и одну точку касанія, или же двѣ точки касанія. Двѣ параболы могутъ имѣть только одну точку касанія, точно также парабола и гипербола если только парабола лежитъ внѣ гиперболы; а также эллипсъ и парабола, если эллипсъ лежитъ внѣ параболы.

Необходимо замѣтить, что предложенія четвертой книги для древнихъ математиковъ имѣли важное значеніе; точки пересѣченія кривыхъ служили къ разрѣшенію задачи удвоенія куба. Мы уже выше замѣтили, что задача

удвоенія куба была отчасти причиною нахожденія коническихъ сѣченій. Методъ, при посредствѣ котораго Аполлоній опредѣляетъ точки общія двумъ коническимъ сѣченымъ, основывается на аналогическомъ способѣ доказательствъ, вытекающемъ изъ леммы 4-й книги, относящейся къ гармоническому дѣленію. Четвертая книга „Коническихъ сѣченій“ была дополненіемъ къ первымъ тремъ. Первыя четыре книги содержали въ себѣ ту часть высшей математики древнихъ геометровъ, которая заключала въ себѣ все необходимое къ рѣшенію задачи удвоенія куба и ея рѣшеніе. Такая тѣсная связь между первыми четырьмя книгами можно видѣть еще въ томъ, что только они дошли до насъ въ греческомъ текстѣ, тогда какъ 5-я, 6-я и 7-я дошли до насъ только въ XVII столѣтіи въ арабскомъ переводѣ, а 8-я изчезла безслѣдно *).

Книга V, самая замѣчательная, показываетъ изслѣдованія Аполлонія во всемъ ихъ величіи, въ этой книгѣ впервые появляется вопросъ о *геометрическомъ значеніи наибольшихъ* и *наименьшихъ* величинъ, т. е. вопросъ о *maximum'ѣ* и *minimum'ѣ* **). Вопросъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ не является у Аполлонія какъ вполнѣ законченная теорія, въ видѣ метода, каково она достигла въ XVII столѣтіи, Аполлоній разсматриваетъ только извѣстный родъ задачъ, который онъ изслѣдуетъ. Онъ изслѣдуетъ отдѣльные случаи, и съ необыкновеннымъ умѣніемъ, почти совершенно непонятнымъ для насъ, изъ этихъ отдѣльныхъ случаевъ выводитъ правила болѣе общія, подъ которыя онъ подводитъ всѣ изслѣдуемые имъ вопросы. Съ удивительнымъ искуствомъ онъ рѣшаетъ самыя сложные вопросы и намъ невольно приходитъ на мысль, что онъ обладалъ иными методами изслѣдованія, при помощи которыхъ онъ находилъ предложенія, а уже впослѣдствіи передѣлывалъ ихъ на общепринятую форму. Извѣстно, что почти два тысячелѣтія спустя, Ньютонъ многія изъ своихъ изслѣдованій передѣлывалъ и видоизмѣнялъ, облекая ихъ въ формы и пріемы, употребляемые древними греческими геометрами. Вопросъ о maximum'ѣ и minimum'ѣ появляется у Аполлонія при рѣшеніи вопроса, какія суть самыя большія и самыя меньшія прямыя, проведенныя изъ произвольно взятой точки на плоскости къ коническому сѣченію. Сначала онъ разсматриваетъ точки, которыя лежатъ на оси коническаго сѣченія. Затѣмъ онъ изслѣдуетъ цѣлый рядъ

*) Книги 5, 6 и 7-я „Коническихъ сѣченій“ были найдены въ срединѣ XVII столѣтія Голіусомъ (Golius) на Востокѣ и Борелли во Флоренціи въ библіотекѣ Медичисовъ.

**) Задача, относящаяся къ maximum'у и minimum'у находится въ комментаріяхъ Евтокія, къ сочиненію „О шарѣ и цилиндрѣ“, при рѣшеніи ариеметическаго предложенія, что наибольшее произведеніе двухъ частей извѣстной суммы получается тогда, когда эти части равны. Предложеніе это доказано на основаніи предл. 5, кн. 2 „Началъ“ Евклида; а нахожденіе этого предложенія Евтокій приписываетъ Никомаху.

вопросовъ относящихся къ субнормалямъ. Далѣе Аполлоній указываетъ на то, что *наибольшія и наименьшія прямыя* суть прямыя нормальныя къ коническому сѣченію; затѣмъ онъ рѣшаетъ вопросъ: изъ какой нибудь точки плоскости провести нормали къ коническому сѣченію, лежащему въ этой плоскости. При рѣшеніи этого вопроса онъ дѣлаетъ построеніе, въ которомъ участвуютъ отрѣзки гиперболы. Аполлонію извѣстно, что число прямыхъ, проведённыхъ изъ данной точки перпендикулярно къ коническому сѣченію, не произвольно, а зависитъ отъ рода коническаго сѣченія, и кромѣ того отъ положенія данной точки. Онъ находитъ, что въ зависимости отъ этихъ условій, извѣстныя точки занимаютъ опредѣленное положеніе. Эти точки, изъ которыхъ можно провести къ противолежащей имъ части коническаго сѣченія только одну нормаль, суть центры кривизны, непрерывный рядъ которыхъ есть эволюта даннаго коническаго сѣченія. На основаніи этого можно сказать, что въ сочиненіи Аполлонія находятся зачатки *теоріи развертокъ.* Аполлоній вездѣ слѣдуетъ аналитическому методу. По выраженію Монтуклы: „въ этой книгѣ мы находимъ все то, что нынѣшніе аналитическіе методы нашли по этому предмету“.

Пятая книга содержитъ 77 предложеній

Книга VI. Въ этой книгѣ заключаются предложенія относительно равенства и подобія коническихъ сѣченій, получаемыхъ на равныхъ и подобныхъ конусахъ. Въ концѣ книги рѣшается вопросъ: данный конусъ разсѣчь плоскостью такъ, чтобы полученное сѣченіе было равно данному эллипсу Въ этой книгѣ приложено много задачъ.

Книга VII. Въ началѣ этой книги Аполлоній говоритъ, что 7-я книга содержитъ предложенія, служащія къ опредѣленіямъ, а 8-я содержитъ опредѣленные вопросы о коническихъ сѣченіяхъ. Въ этой книгѣ нѣсколько основныхъ предложеній служатъ къ рѣшенію довольно трудныхъ задачъ на maximum и minimum; кромѣ того указано нѣсколько замѣчательныхъ свойствъ коническихъ сѣченій, напримѣръ: въ эллипсѣ и сопряженныхъ гиперболахъ параллелограммы, построенные на касательныхъ къ оконечностямъ сопряженныхъ діаметровъ, постоянны; въ гиперболѣ разность, а въ эллипсѣ сумма квадратовъ, построенныхъ на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ, постоянна. Также въ этой книгѣ изложены предложенія относительно дополнительныхъ хордъ, проведенныхъ параллельно сопряженнымъ діаметрамъ.

Книга VIII. На основаніи свойствъ коническихъ сѣченій, изложенныхъ въ VII-й книгѣ, относительно осей и діаметровъ, Галлей основалъ, главнымъ образомъ, возстановленіе VIII-й книги „Коническихъ сѣченій“ Аполлонія.

Изъ другихъ сочиненій Аполлонія дошли до насъ только заглавія нѣкоторыхъ изъ нихъ. Что заключали эти сочиненія неизвѣстно, но съ вѣ-

роятностію, судя по ихъ заглавіямъ, можно предположить, что содержаніе ихъ относилось къ приложенію свойствъ коническихъ сѣченій въ рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ. Таково вѣроятно содержаніе сочиненій: „De tactionibus“, „De loci plani“, „De inclinationibus“ и „De sectio spatii“.

Такое предположеніе тѣмъ вѣроятно, что дошедшее до насъ, въ переводѣ на арабскій языкъ сочиненіе „De sectione determinata“ имѣетъ упомянутый нами выше характеръ. Содержаніе этого сочиненія заключается въ рѣшеніи слѣдующаго вопроса: „дано положеніе двухъ неопредѣленной длины прямыхъ линій, лежащихъ въ одной плоскости; прямыя эти или параллельны, или же пересѣкаются; на каждой изъ этихъ прямыхъ дана точка, дано также отношеніе и кромѣ того дана точка, лежащая внѣ этихъ прямыхъ. Требуется провести чрезъ данную точку прямую линію, которая бы отсѣкала отъ двухъ данныхъ по положенію прямыхъ, части, коихъ отношеніе было-бы равно данному отношенію“. Легко видѣть, что задача эта заключаетъ множество случаевъ, зависящихъ отъ положенія точки, лежащей внѣ этихъ прямыхъ, относительно тѣхъ же прямыхъ, или же отъ ея положенія относительно сѣкущихъ, проведенныхъ чрезъ точки, данныя на данныхъ прямыхъ; кромѣ того вопросъ находится еще въ зависимости отъ направленія, въ которомъ взяты части прямыхъ составляющихъ отношеніе.

Задача эта вполнѣ въ духѣ геометрическихъ изслѣдованій Аполлонія; онъ ее рѣшаетъ при помощи коническихъ сѣченій.

Сочиненіе „De sectione determinata“ было найдено въ концѣ XVII столѣтія *Бернардомъ* (Edm. Bernard), какъ мы выше сказали въ переводѣ на арабскій языкъ. Рукопись эта была весьма неудовлетворительна, но тѣмъ не менѣе Бернардъ предпринялъ ея переводъ на латинскій языкъ. При переводѣ этого сочиненія онъ встрѣтилъ такія затрудненія, что перевелъ только десятую часть его и совершенно оставилъ попытку перевести все сочиненіе. Однако переводъ начатый Бернардомъ, принялъ на себя Галлей, и съ успѣхомъ довелъ его до конца. Трудъ Галлея можетъ служить прекраснымъ примѣромъ его необыкновенныхъ способностей; онъ былъ совершенно незнакомъ съ арабскимъ языкомъ, но отрывокъ перевода на латинскій, начатый Бернардомъ, послужилъ ему вмѣсто лексикона и грамматики.

Сочиненіе „De tactionibus“, на основаніи нѣкоторыхъ указаній, можно предположить занималось соприкосновеніемъ прямыхъ и круговъ; оно было возстановлено *Віетомъ* (Viète въ 1600) г. подъ заглавіемъ: „Apollonius Gallus“; затѣмъ *Маріномъ Гетальди* (Marino Ghetaldi) въ 1607 г., въ сочиненіи подъ заглавіемъ „Apollonius redivivus“. Наконецъ въ 1795 г. *Камереръ* (Camerer) возстановилъ это сочиненіе на греческомъ языкѣ подъ заглавіемъ: „Apollo-

nii de tactionibus, quae supersunt ac maxime Lemmata Pappi in hoc libros graeco nunc primum edita". Попытка Камерера считается наиболѣе удачною.

Віетъ предложилъ голландскому геометру Адріану Романусу, рѣшить задачу, которая есть основная въ возстановленномъ сочиненіи Аполлонія, задача эта состоитъ въ слѣдующемъ: „даны три круга, найти четвертый, касающійся трехъ данныхъ". Задача эта была предложена по поводу спора возникшаго между этими геометрами. Романусъ рѣшилъ, предложенную ему задачу, опредѣливъ центръ искомаго круга пересѣченіемъ двухъ гиперболъ. Но Віетъ показалъ ему, что такъ какъ задача плоская, то она можетъ быть рѣшена при помощи обыкновенной Геометріи; рѣшеніе, предложенное имъ, тоже, что и рѣшеніе приведенное Ньютономъ, въ своей „Arithmetica universalis". Другое рѣшеніе предложено также Ньютономъ въ своемъ сочиненіи „Philosophiae naturalis principia mathematica", въ этомъ рѣшеніи онъ весьма остроумно сводитъ два тѣлесныя мѣста, найденныя Адріаномъ Романусомъ, на пересѣченіе двухъ прямыхъ линій. Задачей этой также занимался Декартъ, онъ далъ два рѣшенія, но одно изъ нихъ такъ сложно, что, по словамъ самаго Декарта, „онъ не привелъ-бы его къ концу въ теченіи цѣлаго мѣсяца"; второе изъ его рѣшеній не такъ сложно, „но все таки на столько, что онъ не сталъ имъ заниматься". Задачей этой также занималась много принцесса Елисавета Богемская. Рѣшеніе данное ею алгебраическое, но оно представляетъ тѣ же неудобства, какъ и рѣшеніе предложенное Декартомъ. Рѣшеніе свое она прислала Декарту, съ которымъ она находилась въ постоянной перепискѣ.

Занимаясь этой задачей Ферма рѣшилъ вопросъ еще болѣе трудный, именно: „даны четыре шара, коихъ положеніе и величина извѣстны, найти шаръ, касающійся четырехъ данныхъ". Задача эта была предложена Ферма Декартомъ, который утверждалъ, что имъ найдено ея рѣшеніе при помощи Алгебры и элементарной Геометріи; но въ сочиненіяхъ Декарта нѣтъ ничего относительно этого вопроса.

Другое сочиненіе Аполлонія „De locis planis", отъ котораго дошли до насъ только самые ничтожные отрывки было возстановлено Ферма въ 1637 г. Оно было напечатано въ 1679 г., по смерти Ферма, въ полномъ собраніи его сочиненій „Varia opera mathematica".

Сочиненіе „De sectione rationis" дошло до насъ только въ переводѣ на арабскій языкъ, оно было переведено Галлеемъ на латинскій въ 1706 г. При этомъ сочиненіи Галлей помѣстилъ сочиненіе „De sectione Spatii", возстановленное имъ на основаніи однѣхъ только гипотезъ и догадокъ.

Сочиненія „De sectione determinata" и „De locis planis" были также возстановлены Симсономъ.

Сочиненіе „De sectione spatii" также пытался возстановить Снелліусъ.

Пятую книгу „Коническихъ сѣченій“ Аполлонія старался возстановить итальянскій геометръ Вивіани, много занимавшійся изученіемъ сочиненій, написанныхъ древними геометрами. Когда Вивіани предпринялъ этотъ трудъ, то еще не были извѣстны арабскіе переводы „Коническихъ сѣченій“. Сочиненіе, написанное по этому поводу Вивіани, весьма замѣчательно по глубинѣ своихъ изслѣдованій, онъ его напечаталъ въ 1659 г. подъ заглавіемъ: „**Divinatio in quintum Apollonii conicorum librum**“.

Кромѣ поименованныхъ нами сочиненій Аполлоній, по словамъ Гипсикла, написалъ еще сочиненіе „О сравненіи икосаедра и додекаедра, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же шаръ“. Проклъ упоминаетъ также о сочиненіи „Объ Архимедовомъ винтѣ“ (Περὶ τοῦ κοχλίου), но содержаніе послѣдняго сочиненія совершенно неизвѣстно. Евтокій упоминаетъ также о сочиненіи Аполлонія „О рѣшенномъ мѣстѣ“, предметомъ котораго служитъ геометрическій анализъ, какъ его понимали древніе.

Евтокій, въ своихъ комментаріяхъ къ сочиненію Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ“, говоритъ слѣдующее: „на сколько было возможно мнѣ, я стремился объяснить происхожденіе чиселъ, данныхъ Архимедомъ. При этомъ не лишнимъ будетъ замѣтить, что также Аполлоній Пергскій въ своемъ сочиненіи „**Okytoboon**“ (ὠκυτόβοος) достигъ большей точности чѣмъ Архимедъ, въ вычисленіи длины окружности круга“. Само слово ὠκυτόβοος до сихъ поръ филологами не объяснено удовлетворительно и содержаніе этого сочиненія неизвѣстно, а потому нельзя сказать въ чемъ именно заключался пріемъ предложенный Аполлоніемъ для болѣе точнаго опредѣленія отношенія окружности къ діаметру. Нѣкоторыя соображенія относительно этого пріема высказываетъ Канторъ *). Объясненіе, въ чемъ состоялъ пріемъ Аполлонія онъ находитъ въ арабской рукописи, изданной Венке **). Рукопись эта заключаетъ въ себѣ переводъ на арабскій языкъ греческаго комментарія на X-ю книгу „Началъ“ Евклида. Кто авторъ этой рукописи—неизвѣстно, но Венке полагаетъ, что рукопись эта есть переводъ греческаго комментарія, въ двухъ книгахъ, къ X-й книгѣ „Началъ“, написаннаго византійскимъ астрологомъ *Веттіемъ Валенсомъ* (**Vettius Valens**), жившемъ въ царствованіе Константина ***). Комментаторъ этотъ въ своемъ сочиненіи упоминаетъ о сочиненіи

---

*) *Moritz Cantor*. Euclid und sein Jahrhundert. Leip. 1867. in 8

**) *Woepcke*. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe. Memoires presentés à l'academie des sciences. T. XIV. Paris. 1856

Chasles. Rapport sur un mémoire ect. Comptes Rendus. T. XXXVII. Paris. 1853.

***) Комментарій Веттія Валенса переведенъ на арабскій языкъ Абу-Отманомъ изъ Дамаска, но до насъ дошла только копія съ этого перевода, сдѣланная въ 969 г. въ Ширазѣ, арабскимъ геометромъ Ахмедомъ-бенъ Могамедомъ-Алсаджи (Ahmed-Ben-Mohamed-Ben-Abd-

Аполлонія „Объ ирраціональныхъ величинахъ", изслѣдованіямъ котораго по этому вопросу онъ придаетъ большое значеніе. Маринусъ въ своемъ сочинении: „Введеніе къ „Даннымъ" Евклида" упоминаетъ о сочинении Аполлонія подъ заглавіемъ „Всеобщій трактатъ".

По отрывку изъ второй книги сочиненія Паппуса „Collectiones mathematicae" видно, что Аполлоній предложилъ пріемъ, подобный пріему Архимеда, для выраженія очень большихъ чиселъ, въ дошедшемъ до насъ отрывкѣ второй книги сочиненія Паппуса, найденномъ и изданномъ Валлисомъ, находится выписка изъ сочиненія Аполлонія, въ которомъ онъ изложилъ свой пріемъ. Начала, положенныя въ основаніе этого пріема, были примѣнены на практикѣ въ другомъ его сочиненіи, о которомъ упоминаетъ Евтокій. По словамъ Евтокія, Аполлоній занимался также рѣшеніемъ задачи удвоенія куба.

Аполлоній приложилъ Геометрію къ астрономіи. Птоломей въ своемъ „Альмагестѣ" приписываетъ ему теорію эпицикловъ.

Въ своихъ „Коническихъ сѣченіяхъ" Аполлоній упоминаетъ имена нѣкоторыхъ геометровъ, съ которыми онъ находился въ сношеніяхъ. Къ сожалѣнію до насъ ничего не дошло изъ написаннаго этими геометрами. Изъ геометровъ онъ упоминаетъ имена: *Наукрата*, который поощрялъ его къ изученію коническихъ сѣченій; *Евдема Пергамскаго*, которому онъ поручилъ представить вторую книгу „Коническихъ сѣченій" *Филониду Эфесскому;* затѣмъ Аполлоній упоминаетъ *Тразидея*, который находился въ постоянной перепискѣ съ *Конономъ Самосскимъ*, другомъ Архимеда, *Никотиля* изъ Кирены, котораго упрекаетъ Аполлоній за нѣкоторыя неточности.

Эратосѳенъ былъ однимъ изъ самыхъ образованныхъ людей своего времени, онъ былъ астрономъ, геометръ, грамматикъ, ораторъ, поэтъ и фи-

---

Al-djakl-Alsidjzi). Переводъ этотъ составляетъ часть цѣлаго сборника, составленнаго въ 969 и 970 гг. Ахмедомъ-бенъ-Могамедомъ въ Ширазѣ и заключающаго въ себѣ на 320 листахъ 51 сочиненіе, или отрывки изъ сочиненій различныхъ авторовъ математическаго содержанія. Онъ принадлежитъ Парижской Національной Библіотекѣ и о немъ мы скажемъ въ статьѣ объ „Арабахъ".

Мы выше уже сказали, что комментарій Веттія Валенса состоитъ изъ двухъ книгъ. Первая книга не заключаетъ ничего интереснаго для математиковъ, такъ какъ содержаніе ея составляютъ метафизическія толкованія и воззрѣнія на ирраціональныя величины. Вторая же книга весьма цѣнна для исторіи математическихъ наукъ, въ ней заключается нѣсколько весьма замѣчательныхъ теоремъ, относящихся къ ирраціональнымъ величинамъ, которыхъ нѣтъ въ X книгѣ „Началъ" Евклида. Кромѣ того многіе вопросы, относящіеся къ теоріи ирраціональныхъ величинъ, разобраны съ болѣе общей точки зрѣнія чѣмъ у Евклида. Для геометровъ въ особенности заслуживаетъ вниманія комментарій Веттія Валенса, такъ какъ въ немъ находятся указанія на недошедшія до насъ сочиненія Аполлонія.

лософъ *). Эратосоенъ родился въ 276 г. до Р. Х. въ Киренѣ. Первоначальное образованіе онъ получилъ въ Александріи, гдѣ воспитателемъ его былъ извѣстный Каллимахъ, второй изъ библіотекарей знаменитой александрійской библіотеки. Затѣмъ Эратосоенъ отправился въ Аѳины, гдѣ учился у платониковъ, такъ что его самого причисляютъ къ Платоновской школѣ. Послѣ смерти Каллимаха Эратосоенъ, по приглашенію Птоломея III Евергета занялъ мѣсто своего наставника. До самаго конца своихъ дней Эратосоенъ занималъ мѣсто библіотекаря и умеръ въ 196 г. до Р. Х. восьмидесяти лѣтъ отъ роду слѣпымъ. По словамъ Свиды, Эратосоенъ, лишившійся зрѣнія, пришелъ въ такое отчаяніе, что уморилъ себя голодомъ. Современники до того удивлялись необыкновеннымъ способностямъ и многосторонности познаній Эратосоена, что прозвали его Pentathlos'омъ, имя дававшееся побѣдителю въ пяти состязаніяхъ на Олимпійскихъ играхъ. Эратосоена ставятъ на ряду съ тремя величайшими геометрами древности: Евклидомъ, Архимедомъ и Аполлоніемъ, разработавшихъ геометрическій анализъ. Паппусъ въ III-й книгѣ своихъ „Математическихъ коллекцій" сообщаетъ, что Эратосоенъ написалъ сочиненіе, относящееся къ геометрическому анализу. Къ сожалѣнію сочиненіе это до насъ не дошло, заглавіе же его: „De locis ad medietates". Впрочемъ намъ не извѣстно, какія именно это были мѣста. Монтукла полагаетъ, что эти мѣста суть коническія сѣченія; „названіе *medietates*, говоритъ онъ, было одинаково примѣняемо древними геометрами къ тремъ пропорціямъ, извѣстнымъ у насъ подъ именами: ариѳметической геометрической и гармонической; они называли пропорціей только геометрическія отношенія".

Для рѣшенія задачи „о нахожденіи двухъ средне-пропорціональныхъ", Эратосоенъ изобрѣлъ инструментъ, извѣстный подъ именемъ *мезолаба* (mésolabe). Описаніе этого инструмента находится въ его письмѣ къ Птоломею, въ которомъ Эратосоенъ излагаетъ исторію задачи „удвоенія куба". Письмо это сохранилъ намъ Евтокій, въ своихъ комментаріяхъ на сочиненіе Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ". Паппусъ также даетъ описаніе этого инструмента въ своихъ „Математическихъ коллекціяхъ".

Эратосоенъ указалъ пріемъ для отысканія простыхъ чиселъ, изъ даннаго ряда чиселъ, способъ, предложенный имъ, извѣстенъ подъ именемъ „*рѣшето Эратосоена*" (κόσκινον Ἐρατοσθένους). При помощи этого пріема выдѣляютъ всѣ числа не простыя, такъ, что мы наконецъ получаемъ однѣ

*) Самъ Эратосоенъ называлъ себя *филологомъ*. Изъ его сочиненій наиболѣе извѣстны слѣдующія: „О добрѣ и злѣ", „Хронологія", „О комедіи" и „Географія". Эратосоена называли также современники *Бетой*, происхожденіе этого названія неизвѣстно. Эратосоену сильно покровительствовала царица Арсиноэ, супруга Птоломея.

только простыя числа. Эратосѳенъ, подобнымъ пріемомъ, пропускаетъ всѣ числа какъ-бы чрезъ рѣшето, на которомъ остаются числа простыя, а не простыя проходятъ; отсюда и произошло названіе пріема *)

По просьбѣ Эратосѳена Птоломей приказалъ сдѣлать армиллярную сферу, при помощи которой Эратосѳенъ производилъ свои астрономическія наблюденія **).

Эратосѳену принадлежитъ первому попытка опредѣлить размѣры земнаго шара научнымъ путемъ; хотя числа, полученныя имъ, невѣрны, но тѣмъ не менѣе его пріемъ заслуживаетъ полнаго вниманія, какъ методъ, которымъ пользовались впослѣдствіи съ большимъ успѣхомъ при рѣшеніи того же вопроса. Числа данныя для размѣровъ земнаго шара невѣрны, но разстояніе земли отъ солнца близко къ дѣйствительному. По словамъ Макробія ***) Эратосѳенъ написалъ сочиненіе „De dimensionibus“, предметъ котораго—опредѣленіе размѣровъ земнаго шара.

Теонъ Смирнскій упоминаетъ сочиненіе Эратосѳена по Ариѳметикѣ, заглавіе котораго ἀριθμητική, но содержаніе этого сочиненія намъ неизвѣстно.

„Географія“ Эратосѳена также до насъ не дошла, за исключеніемъ незначительныхъ отрывковъ. Кромѣ того онъ написалъ еще астрономо-географическое сочиненіе—поэму „Hermes“, въ которой описаны: видъ земли, различные пояса, созвѣздія и т. п.

Уцѣлѣвшія отрывки изъ сочиненій Эратосѳена были собраны и изданы Бернгарди (Bernhardy), подъ заглавіемъ „Eratosthenica“, въ Берлинѣ, въ 1822 г.

Никомедъ, современникъ Эратосѳена, принадлежалъ къ геометрамъ александрійской школы. Жизнь его неизвѣстна. Въ своихъ комментаріяхъ къ 1-й книгѣ „Началъ“ Евклида, Проклъ говоритъ, что Никомедъ изобрѣлъ

---

*) Боссю въ своей „Исторіи Математики“ называетъ этотъ способъ „un moyen facile et commode“, Нессельманнъ, въ своемъ сочиненіи „Die Algebra der Griechen“, вполнѣ справедливо замѣчаетъ, что „если бы Боссю попробовалъ просѣять при помощи этого удобнаго и легкаго пріема, всѣ числа отъ единицы до милліона для нахожденія всѣхъ простыхъ чиселъ, то онъ не назвалъ бы этотъ пріемъ легкимъ и удобнымъ“. На практикѣ пріемъ Эратосѳена почти не примѣнимъ для большаго ряда чиселъ

**) Подробное описаніе *армиллярной сферы* до насъ не дошло, но на основаніи сказаннаго въ сочиненіи Прокла можно думать, что она состояла изъ трехъ мѣдныхъ круговъ: двухъ неподвижныхъ, одного расположеннаго въ плоскости экватора, другаго—въ плоскости меридіана; третій же подвижной. Приборъ этотъ былъ установленъ въ портикахъ Александріи. Въ діаметрѣ круги имѣли около одного метра. Впослѣдствіи при помощи этой сферы Гиппархъ производилъ свои наблюденія надъ перемѣщеніями звѣздъ на сферѣ небесной.

***) *Макробій*, римскій писатель временъ императора Ѳеодосія, по происхожденію грекъ, жилъ въ Римѣ. Онъ написалъ сочиненіе: Macrobii Interpretatio in somnium Scipionis a Cicerone confictum; въ сочиненіи этомъ есть нѣсколько астрономическихъ данныхъ.

конхоиду. При помощи этой кривой онъ рѣшалъ задачу удвоенія куба и механическимъ построеніемъ задачи „о двухъ средне-пропорціональныхъ" и „трисекціи угла".

По словамъ Евтокія Никомедъ смѣялся надъ пріемомъ, предложеннымъ Эратосѳеномъ для рѣшенія задачи удвоенія куба. Описаніе этой кривой сохранили намъ Проклъ и Геминусъ въ своихъ сочиненіяхъ. Конхоида была примѣнена Ньютономъ для геометрическаго построенія всѣхъ уравненій 3-й и 4-й степеней. Въ теченіи всего XVII и XVIII столѣтій конхоида была предметомъ изслѣдованій многихъ геометровъ. Сочиненія Никомеда до насъ не дошли.

Діоклесъ вѣроятно жилъ во II в. до Р. Х., такъ какъ Геминусъ въ своихъ сочиненіяхъ говоритъ о циссоидѣ Діоклеса, Геминусъ же, какъ извѣстно, жилъ около I в. до Р. Х. Многіе математики невѣрно считаютъ Діоклеса современникомъ Прокла, жившаго въ IV в. по Р. Х. Для рѣшенія задачи удвоенія куба Діоклесъ изобрѣлъ кривую, извѣстную подъ именемъ *циссоиды.* Мы обязаны также Діоклесу рѣшеніемъ задачи: „провесть плоскость, дѣлящую шаръ въ данномъ отношеніи"; задача эта рѣшена имъ при помощи двухъ коническихъ сѣченій. Задача эта была предложена Архимедомъ*), но онъ самъ ее не рѣшилъ. Извѣстно, что Архимедъ рѣшалъ задачи только при помощи циркуля и линейки, предложенная же имъ задача зависѣла отъ уравненія 3-й степени, а потому могла быть построена только при помощи коническихъ сѣченій или другой какой нибудь кривой высшей степени. Построеніе, данное Діоклесомъ, сохранилъ намъ Евтокій въ своихъ комментаріяхъ ко второй книгѣ сочиненія Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ".

Гиппархъ по справедливости считается самымъ великимъ изъ астрономовъ древняго міра, онъ первый положилъ начала математической Астрономіи. Время когда жилъ Гиппархъ точно намъ неизвѣстно, нужно полагать, что между 160 и 125 гг. до Р. Х. Относительно его мѣсторожденія также не всѣ согласны, болѣе вѣроятія заслуживаютъ указанія Плинія и Птоломея, которые говорятъ, что Гиппархъ былъ родомъ съ острова Родоса. Гиппархъ авторъ многочисленныхъ сочиненій, большая часть которыхъ, къ сожалѣнію, не дошла до насъ. Почти всѣ сочиненія, написанныя Гиппархомъ, относятся къ Астрономіи, за исключеніемъ сочиненія „О хордахъ круга", о которомъ упоминаетъ Теонъ.

Прямолинейная и Сферическая Тригонометріи были необходимы Гиппарху для астрономическихъ вычисленій; онъ первый положилъ начало этимъ наукамъ и изложилъ ихъ геометрическія основы въ своемъ сочине-

*) Въ сочиненіи „О шарѣ и цилиндрѣ", книга II, предложеніе 5.

нiи: „О восхожденiи и захожденiи свѣтилъ“, но сочиненiе это до насъ не дошло. Гиппарху первому приписываютъ нахожденiе *стереографической проэкцiи*.

Гиппархъ стремился рѣшить обширную задачу, именно: найти соотношенiе между свѣтилами, опредѣливъ ихъ разстоянiя, величину, положенiе и движенiе. Задачей этой занимался шестнадцать столѣтiй спустя Гиппарха великiй Кеплеръ. Гиппарху первому принадлежитъ честь составленiя перваго *звѣзднаго каталога*, въ которомъ онъ даетъ положенiя 1080 звѣздъ, расположенныхъ по величинѣ и блеску.

Изъ сочиненiй Гиппарха до насъ дошли только два, именно: „Комментарiи на Феномены Аратуса и Евдокса“ *) и „О созвѣздiяхъ“. Послѣднее сочиненiе есть звѣздный каталогъ, оно почти воспроизведено Птоломеемъ въ VII книгѣ его Альмагесты.

Другiя сочиненiя Гиппарха утеряны, до насъ же дошли только ихъ заглавiя и выписки изъ нѣкоторыхъ, сдѣланныя Птоломеемъ. Вотъ заглавiя этихъ сочиненiй: „О величинахъ и разстоянiяхъ солнца и луны“; „О мѣсячномъ движенiи луны въ широтѣ“; „О продолжительности мѣсяца“; „О величинѣ года“; „О перемѣщенiи точекъ равноденствiя“; „О паденiи тѣлъ“. Кромѣ того, по словамъ Плутарха, Гиппархъ написалъ „Ариѳметику“ а по словамъ Паппуса Гиппарху принадлежитъ сочиненiе „О прямомъ восхожденiи двѣнадцати знаковъ зодiака“. Гиппарху также приписываютъ сочиненiе „О затмѣнiяхъ солнца, согласно семи климатамъ“. Теонъ упоминаетъ еще сочиненiе Гиппарха „О хордахъ круга“.

Филонъ Византiйскiй жилъ около 146 г. до Р. Х. въ Александрiи, а также на островѣ Родосѣ. По словамъ Паппуса онъ предложилъ рѣшенiе задачи „о двухъ средне-пропорцiональныхъ“, въ основанiи прiема лежитъ начало, предложенное Аполлонiемъ. Филонъ написалъ сочиненiе, относящееся къ устройству машинъ для обороны крѣпостей, но до насъ дошли только IV-я и V-я книги этого сочиненiя. Въ немъ описанъ снарядъ, названный ἀερότονος, имѣющiй сходство съ духовымъ ружьемъ. Кромѣ того, по словамъ самаго Филона, онъ написалъ сочиненiе о примѣненiи ядовъ

---

*) *Аратусъ* жилъ около 270 г. до Р. Х., при дворѣ македонскаго царя Антигона, по просьбѣ котораго онъ переложилъ въ стихи два сочиненiя Евдокса: „Зеркало“ и „Феномены“. Предметъ послѣдняго сочиненiя составляетъ влiянiе свѣтилъ. Поэмы Аратуса пользовались большимъ уваженiемъ древнихъ. Сочиненiя Аратуса еще тѣмъ замѣчательны, что это самыя древнiя изъ дошедшихъ до насъ сочиненiй Грековъ, послѣ сочиненiй Автолика и Евклида. Сочиненiя Аратуса были предметомъ многочисленныхъ комментарiевъ различныхъ ученыхъ; изъ числа ихъ наиболѣе заслуживаютъ вниманiя комментарiи Гиппарха и Теона александрiйскаго. Цицеронъ перевелъ на латинскiй языкъ „Феномены“ Аратуса, но отъ этого перевода до насъ дошли только незначительные отрывки.

во время войны. Филонъ написалъ также сочиненіе по Механикѣ, но оно до насъ не дошло, а о немъ упоминаетъ Паппусъ.

Персей, какъ полагаютъ жилъ за 100 л. до Р. Х. Монтукла говоритъ, что Персей жилъ въ 1 в. по Р. Х., но это не вѣрно, потому что Геминусъ, жившій за 70 л. до Р. Х., приписываетъ Персею нахожденіе *спирическихъ линій*,—это передаетъ Проклъ. Нѣкоторые геометры полагали, что эти линіи были спирали, но Монтукла, много занимавшійся этимъ вопросомъ въ молодости, положительно утверждаетъ, что это были не спирали, а линіи, полученныя пересѣченіемъ плоскостью тѣлъ, образованныхъ движеніемъ круга около хорды или касательной, или какой нибудь прямой линіи, лежащей внѣ круга. Монтукла прибавляетъ, что подобнымъ образомъ „можно получить тѣло, имѣющее видъ открытаго или замкнутаго кольца или вѣнчика; пересѣкая подобныя тѣла плоскостями, различно наклоненными, получаютъ кривыя странныхъ видовъ, однѣ изъ нихъ продолговаты въ видѣ эллипса, другія съуженныя, пересѣкающіяся между собою въ видѣ узловъ, иногда состоящія изъ двухъ сопряженныхъ оваловъ, лежащихъ иногда одинъ внѣ другаго, а иногда одинъ внутри другаго, а иногда даже просто изъ овала съ сопряженной ему точкой внутри; однимъ словомъ это суть кривыя 4-й степени".

Весьма жаль, что до насъ не дошло сочиненіе Персея, интересно было бы узнать геометрическую теорію спирическихъ линій, и какъ поступали въ данномъ случаѣ древніе геометры? Изслѣдованіе уравненій поверхностей, на которыхъ получаются эти кривыя, требуютъ довольно сложныхъ аналитическихъ вычисленій.

Геминусъ родомъ изъ Родоса, жилъ около 100 л. до Р. Х., онъ написалъ нѣсколько сочиненій, которыя за исключеніемъ одного, всѣ до насъ не дошли. По словамъ Прокла, въ одномъ изъ своихъ сочиненій Геминусъ разсматриваетъ различнаго рода кривыя, въ числѣ которыхъ также *винтовую линію*, начерченную на поверхности круговаго прямаго цилиндра, и доказываетъ свойство этой кривой, что всѣ ея части совмѣстимы,—свойство это, какъ извѣстно, принадлежитъ также прямой линіи и кругу. Въ этомъ сочиненіи были разобраны исторически происхожденіе многихъ кривыхъ линій: спирали, конхоиды, циссоиды и др. На него часто ссылается Проклъ въ своихъ комментаріяхъ на 1-ю книгу „Началъ" Евклида, а также Евтокій, въ своихъ комментаріяхъ на „Коническія сѣченія" Аполлонія.

Другое сочиненіе Геминуса есть его „Enarrationes geometricae" въ шести книгахъ, которое часто цитируетъ Проклъ и содержаніе котораго, вѣроятно составляло, философское развитіе геометрическихъ открытій. Очень жаль, что это сочиненіе утеряно, судя по выпискамъ изъ него, которыя

находятся у Прокла, сочиненіе это заключало весьма много любопытныхъ данныхъ.

Геминусъ одинъ изъ первыхъ между математиками раздѣлилъ математическія науки на два большихъ класса, на *теоретическія* (νοητὰ) и *практическія* (αἰσθητὰ). Первый классъ составляли—Геометрія и Ариѳметика, второй—астрономія, механика, оптика, геодезія, правила музыки и счета.

Кромѣ этихъ двухъ сочиненій Геминусъ написалъ еще третье сочиненіе, которое до насъ дошло, сочиненіе это астрономическое, заглавіе его „Введеніе къ Феноменамъ“, это есть введеніе въ Астрономію. Оно содержитъ много интересныхъ фактовъ, относящихся къ исторіи астрономіи, его часто считаютъ комментаріемъ къ „Феноменамъ Аратуса“, но такое мнѣніе несправедливо.

Геронъ Старшій принадлежитъ къ ученымъ Александрійской школы; время когда онъ жилъ точно неизвѣстно, болѣе вѣроятія заслуживаетъ мнѣніе Мартена, который полагаетъ, что Геронъ жилъ въ первой половинѣ I в. до Р. Х. Жизнь Герона также неизвѣстна, мы знаемъ только, что первоначально онъ былъ сапожникомъ, а впослѣдствіи сдѣлался ученикомъ Ктезибія *), подъ руководствомъ котораго онъ занимался механикой. Ученыхъ, носившихъ имя Герона было болѣе двадцати, вслѣдствіе чего произошла путаница, такъ что многія изъ сочиненій, написанныхъ Герономъ Старшимъ, приписывали другимъ Геронамъ и въ томъ числѣ Герону Младшему, жившему въ X в. по Р. Х., тоже занимавшемуся математикой.

Геронъ Старшій авторъ многихъ сочиненій, которыя почти всѣ утеряны, отъ нѣкоторыхъ же изъ нихъ дошли только ничтожные отрывки, часто въ самомъ жалкомъ и видоизмѣненномъ видѣ. Сочиненія, написанныя Герономъ, относятся къ Механики и Геометріи. Дошедшія до насъ отрывки изъ сочиненій Герона были предметомъ ученыхъ изслѣдованій многихъ математиковъ, изъ числа которыхъ упомянемъ извѣстныхъ знатоковъ древне-греческой математической литературы Балди **) и Вен-

---

*) *Ктезибій*, учитель Герона, по словамъ Атенея, жилъ въ Александріи, въ царствованіе Птоломея Евергета, около 150 г. По своему происхожденію Ктезибій былъ сынъ цирюльника. По словамъ Витрувія Ктезибій устроилъ машину, которая служила вмѣстѣ и органомъ и водяными часами. Приборъ этотъ показывалъ часы дня и ночи. Кромѣ этого Ктезибію приписываютъ первому изобрѣтеніе насосовъ; онъ также одинъ изъ первыхъ воспользовался упругостью воздуха, какъ движущей силой.

Изъ работъ Герона и Ктезибія можно видѣть, что изученіе Механики занимало не послѣднее мѣсто въ Александрійской школѣ.

**) *Балди* (Bernardino Baldi), аббатъ Гуасталла, былъ однимъ изъ самыхъ ученыхъ людей XVI в., онъ родился въ 1553 г.; образованіе получилъ въ Падуанскомъ университетѣ. Балди былъ богословъ, математикъ, философъ, географъ, историкъ, поэтъ, ораторъ и

тури *); но только въ послѣднее время обширныя изслѣдованія Летро-

антикварій. Онъ былъ хорошо знакомъ съ литературой древнихъ Грековъ и Римлянъ. Балди написалъ много сочиненій, изъ которыхъ болѣе извѣстны его комментаріи на сочиненія Витрувія и переводъ въ стихахъ на италіанскій языкъ „Феноменъ" Аратуса. Изъ другихъ его сочиненій для математиковъ имѣютъ значеніе слѣдующія: „De Herone Alessandrino degli Automati overo Machine se moventi, Lb. II tradotti dal Grece. Venet. 1589". „Heronis Ctesibii Belopoeca hoc est Telifactiva, Venet. 1616". „Cronica de Matematici, Urbino, 1707".

Балди былъ ученикъ знаменитаго Коммандина, подъ руководствомъ котораго онъ занимался математикой и главнымъ образомъ изученіемъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ. Впослѣдствіи Балди написалъ біографію Коммандина. Въ школѣ Коммандина соученикомъ Балди былъ извѣстный Тассо. Балди никакихъ новыхъ открытій въ математикѣ не сдѣлалъ, но изъ числа многочисленныхъ его сочиненій многія заслуживаютъ особеннаго вниманія. Двадцати пяти лѣтъ онъ написалъ „Математическіе парадоксы" и извѣстное сочиненіе о трудахъ Герона. Чтобы лучше понимать Библію Балди изучилъ языки еврейскій и халдейскій, затѣмъ онъ принялся за изученіе арабскаго и иллирійскаго. Къ концу жизни онъ зналъ основательно шестнадцать языковъ. Одинъ изъ современниковъ Балди разсказываетъ, что Балди шестидесяти пяти лѣтъ читалъ „Начала" Евклида, послѣ обѣда въ видѣ легкаго чтенія, на арабскомъ языкѣ; тогда только что былъ отпечатанъ извѣстный арабскій переводъ „Началъ" въ типографіи Медичисовъ въ Римѣ. Балди перевелъ много арабскихъ сочиненій, изъ числа которыхъ найболѣе извѣстенъ переводъ „Географіи" Едриссi. Знакомство съ этимъ сочиненіемъ побудило Балди заняться изученіемъ географіи и написать громадный географическій словарь, который онъ впрочемъ довелъ только до буквы С. Кромѣ того Балди составилъ арабскую грамматику и лексиконъ, персидскую грамматику, турецкій и венгерскій словари. Онъ перевелъ также и комментировалъ халдейское сочиненіе „Thargum"; этотъ громадный трудъ, заслужившій похвалы всѣхъ оріенталистовъ, былъ имъ оконченъ въ теченіи года. Но самое замѣчательное изъ сочиненій Балди, это его „Vite dei mathematici", этотъ обширный трудъ, надъ которымъ Балди трудился четырнадцать лѣтъ, къ сожалѣнію не былъ изданъ. Одновременно съ переводами сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ Балди писалъ философскія поэмы комментаріи на Механику Аристотеля и мн. др. сочиненія. Трудолюбіе и способности Балди были изумительны, для всего онъ находилъ время. Къ сожалѣнію Балди былъ не только глубокій ученый, но также самый грубый фанатикъ, въ вопросахъ религіи онъ отличался нерѣдко жестокостью, прибѣгалъ къ средствамъ инквизиціи—къ пыткамъ. Причина этого вѣроятно духъ того времени.

На сколько цѣнились ученые труды въ XVI столѣтіи можно видѣть изъ слѣдующаго случая: будучи аббатомъ въ Гуасталла Балди отправился по дѣламъ въ Римъ, желая основательно изучить арабскій языкъ и сочиненія арабскихъ писателей, онъ сталъ просить папу позволить ему остаться въ Римѣ, но папа отказалъ, тогда Балди просилъ позволить ему остаться въ Римѣ по дѣлу, касающагося платья, которое онъ имѣлъ право носить; просьба его была удовлетворена и кардиналъ Гонзага разрѣшилъ ему оставаться въ Римѣ, находя, что „эта причина болѣе законна, чѣмъ первая"!!

Балди написалъ болѣе 90 сочиненій по различнымъ отраслямъ знанія; изъ числа этихъ сочиненій нѣкоторыя обнимаютъ собою двѣнадцать большихъ томовъ каждое. Мы полагали не безъинтереснымъ остановиться на Балди, который, какъ мы видимъ, принадлежалъ къ числу самыхъ даровитыхъ и ученыхъ людей XVI столѣтія. Впослѣдствіи мы увидимъ, что такихъ людей какъ Балди въ XVI столѣтіи, въ Италіи, было не мало.

*) *Вентури* (Giovanni Battista Venturi) италіанскій ученый, родился въ 1746 г.,

на*), Мартена**) и Гультша***) пролили нѣкоторый свѣтъ на труды Герона.

Разсмотримъ вкратцѣ, какія сочиненія написалъ Геронъ и что онѣ содержали. Начнемъ съ сочиненій чисто математическаго содержанія.

Евтокій въ своихъ комментаріяхъ на сочиненіе Архимеда „Объ измѣреніи круга“, говоря объ извлеченіи квадратныхъ корней по приближенію, ссылается на сочиненіе Герона „Метрика“ (Μετρικά), но сочиненіе это до насъ не дошло. Мартенъ стремился возстановить содержаніе этого сочиненія на основаніи многочисленныхъ рукописныхъ отрывковъ и выписокъ изъ сочи-

---

умеръ въ 1822 г. Сначала былъ профессоромъ философіи въ Моденѣ, а впослѣдствіи профессоромъ физики въ университетѣ въ Павіи. Вентури авторъ многихъ сочиненій, большая часть которыхъ относится къ физикѣ; кромѣ того онъ писалъ о физико-математическихъ сочиненіяхъ Леонардо-да-Винчи, издалъ переписку Галилея и мн. др. Вентури былъ основательно знакомъ съ математической литературой древнихъ Грековъ. Онъ первый между математиками указалъ, въ 1812 г., что выраженіе для площади треугольника, въ функціи сторонъ, находится въ сочиненіяхъ Герона. Предложеніе это сначала приписывали ученымъ XV столѣтія, потомъ Арабамъ и наконецъ Индусамъ. Указаніе это помѣщено Вентури въ его сочиненіи: Commentarj sopra la storia e le teorie dell' ottica. T. I. Bologna. 1814.

*) *Letronne.* Recherches critiques, historiques et géographiques sur les fragments d'Héron d'Alexandrie. Сочиненіе это было написано на тему, заданную историко-филологическимъ отдѣленіемъ Французской Академіи Наукъ въ 1816 г., подъ заглавіемъ: Expliquer le système métrique d'Héron d'Alexandrie, et en determiner les rapports avec les autres mesures de longueur des anciens. Сочиненіе Летронна было напечатано только послѣ его смерти, благодаря Венсену (Vincent), въ 1851 г.

**) Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie, disciple de Ctesibius, et sur tous les ouvrages mathématiques grecs, conservés ou perdus, publiés ou inédits, qui ont été attribués à un auteur nommé Héron, par M. Henri Martin. Mémoires présentés par divers savants à l'Academie des inscriptions et belle-lettres. Paris. T. IV. 1854.

***) Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquae; accedunt Didymi Alexandrini mensurae marmorum et Anonymi varia collectiones ex Herone, Euclide, Gemino, Proclo, Anatolio aliisque. E libris manu scriptis edidit. F. Hultsch. Berlin 1864. Въ этомъ сочиненіи помѣщены всѣ извѣстные отрывки изъ геометрическихъ сочиненій Герона. Гультшъ полагаетъ, что Геронъ жилъ въ концѣ II в. до Р. Х.

Фридлейнъ полагаетъ, что опредѣленія, *помѣщенныя въ началѣ* этого сочиненія, принадлежатъ не Герону, а написаны еще ранѣе неизвѣстнымъ намъ авторомъ, написавшимъ два элементарныхъ сочиненія, одно по Ариѳметикѣ, другое по Геометріи. Первое изъ нихъ утеряно, второе возстановилъ Фридлейнъ, на основаніи текста, изданнаго Гультшемъ, подъ заглавіемъ „De Heronis quae feruntur definitionibus“; оно помѣщено въ Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche за 1871, мартъ.

Кромѣ того Дасиподіусъ издалъ въ 1571 г. въ Страсбургѣ, при 1-й книги „Началъ“ Евклида, сочиненіе Герона, съ латинскимъ и греческимъ текстомъ, подъ заглавіемъ „Объ опредѣленіяхъ названій въ Геометріи и Стереометріи“ (Περὶ τῶν τῆς γεωμετρίας καὶ στερεωμετρίας ὀνομάτων).

ненiй Герона; отрывки эти принадлежатъ библiотекамъ: Парижа, Лейдена, Неаполя, Ватикана, Мюнхена и др. городовъ. Изслѣдованiя Мартена сводятся къ слѣдующему: оставшiеся отрывки принадлежатъ сочиненiю Герона „Метрика", которое состояло изъ четырехъ частей. Въ первой части было изложено введенiе въ Ариѳметику, на которое вѣроятно и ссылается Евтокiй въ своихъ комментарiяхъ. Но эта часть совершенно утеряна. Вторая часть составляла введенiе къ „Началамъ" Евклида, отъ которой сохранились только нѣкоторые отрывки и содержанiемъ которой служитъ опредѣленiе точки, различныхъ прямыхъ, поверхностей, тѣлъ и соотношенiя между ними по величинѣ, формѣ и положенiю. Въ этой же части были изложены различныя теоретическiя воззрѣнiя на Геометрiю двухъ и трехъ измѣренiй. Въ третьей части были изложены слѣдствiя, вытекающiя изъ предложенiй „Началъ" Евклида, относящихся къ Планиметрiи. Слѣдствiя эти состояли изъ цѣлаго ряда вопросовъ какъ, по извѣстнымъ величинамъ, въ плоской Геометрiи найти неизвѣстныя величины. Въ этой же части заключался цѣлый рядъ предложенiй, относящихся къ треугольникамъ и четыреугольникамъ, вписаннымъ въ кругъ, а также выраженiе для площади треугольника въ функцiи его сторонъ. Четвертая часть содержала цѣлый рядъ стереометрическихъ вопросовъ. Геометровъ сильно занимало выраженiе для площади треугольника въ функцiи его сторонъ; предложенiе это доказано Герономъ на основанiи предложенiй „Началъ" Евклида. Затѣмъ онъ прилагаетъ его къ разностороннему треугольнику, коего стороны 13, 14 и 15; числа эти такъ подобраны вѣроятно потому, что площадь треугольника выражается рацiональнымъ числомъ 84, которое есть точный корень полнаго квадрата 7056. Для прямоугольнаго треугольника взяты числа 5, 12 и 13; площадь равна 30. Говоря объ Индусахъ, мы уже упомянули, что выраженiе для площади треугольника въ функцiи его сторонъ находится въ сочиненiяхъ индусскихъ математиковъ. Рейно положительно утверждаетъ, что индусскiе математики заимствовали это предложенiе изъ сочиненiй Герона, онъ указываетъ на отрывокъ изъ астрономическаго трактата индусскаго астронома Варага-Мигира (Varaha-Mihira), жившаго въ VI в., изъ котораго видно, что индусскимъ ученымъ были извѣстны труды Грековъ; въ этомъ отрывкѣ сказано: „Хотя Греки нечистые, но они заслуживаютъ нашего уваженiя, за услуги, оказанныя ими наукамъ" *).

На основанiи сказаннаго въ комментарiяхъ Прокла на I-ю книгу „Началъ" Евклида можно заключить, что Геронъ занимался разборомъ „Началъ". Укажемъ на мѣста въ комментарiи, которыя подтверждаютъ та-

---

*) *Reinaud.* Sur l'Inde anterieurement au XI siécle de l'ère chrétienne. Mémoires de l'Institut, Académie des inscriptions et belles-lettres. T. XVI.

кое мнѣніе: 1) разбирая замѣчаніе Филипна на 16 предложеніе I-й книги „Началъ" Проклъ говоритъ, что это замѣчаніе сохранилъ намъ Геронъ; 2) въ другомъ мѣстѣ, Проклъ упрекаетъ Герона за то, что этотъ послѣдній ограничилъ число аксіомъ тремя; 3) далѣе сказано, что Геронъ и Порфирій доказываютъ 20-е предложеніе I-й книги „Началъ", не продолжая одну изъ сторонъ треугольника; 4) указано доказательство, данное Герономъ для доказательства 25-го предложенія той же книги и наконецъ 5) онъ говоритъ, что Геронъ и Паппусъ напрасно и преждевременно занимаются предложеніями VI-й книги, они думали прибавить нѣчто къ сказанному Евклидомъ относительно площадей квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ прямоугольнаго треугольника; вѣроятно дѣло идетъ о 31-мъ предложеніи VI-й книги, которое относится къ площадямъ подобныхъ фигуръ, построенныхъ на сторонахъ прямоугольнаго треугольника. Вентури положительно утверждаетъ, что Проклъ заимствовалъ эти ссылки изъ сочиненія Герона по элементарной Геометріи. Было-ли это сочиненіе „Метрика" нельзя сказать утвердительно. Болѣе вѣроятно предположеніе, что вышеприведенныя мѣста Прокла, были имъ заимствованы изъ комментарія Герона на „Начала" Евклида; такое предположеніе еще тѣмъ вѣроятно, что въ Лейденской библіотекѣ существуетъ арабская рукопись, содержаніе которой первыя шесть книгъ „Началъ" Евклида съ комментаріями Саиди-бенъ-Масуда (**Saidi-ben-Masoud**), а также *схоліи* Герона на нѣкоторыя предложенія.

На основаніи вышесказаннаго можно почти съ достовѣрностью сказать, что Геронъ написалъ комментаріи на „Начала" Евклида; приведенныя мѣста изъ комментарія Прокла суть выписки изъ сочиненія Герона.

Разсмотримъ теперь вкратцѣ содержаніе другихъ сочиненій, написанныхъ Герономъ.

„Механика" (*Μηχανικά*). Это элементарное сочиненіе по механикѣ, до насъ не дошедшее, но Паппусъ, въ своихъ „Математическихъ коллекціяхъ" сохранилъ намъ весьма цѣнныя выдержки изъ него. Свое сочиненіе Геронъ начинаетъ съ того, что устанавливаетъ различіе между механикой теоретической и практической. Въ этомъ сочиненіи Геронъ занимается центромъ тяжести, излагаетъ общую теорію и условія равновѣсія и движенія пяти простыхъ машинъ именно: рычага, клина, винта, ворота и блока, теорію которыхъ онъ сводитъ на теорію одной, вѣроятно на рычагъ или зубчатое колесо. Въ этомъ же сочиненіи онъ разбираетъ системы зубчатыхъ колесъ и кромѣ того касается многихъ практическихъ вопросовъ. Вѣроятно сочиненіе это исключительно занималось твердыми тѣлами.

„**Barulcus**" (Βαρουλκος). Въ этомъ сочиненіи, Геронъ, по словамъ Паппуса, на основаніи доказательства даннаго имъ въ „Механикѣ", показываетъ какъ

можетъ быть рѣшена, различными пріемами, при помощи пяти простыхъ машинъ, именно при помощи системы зубчатыхъ колесъ, задача Архимеда: „двигать данную тяжесть при помощи данной силы". Сочиненіе это состоитъ изъ трехъ книгъ, и дошло до насъ.

„О катапультахъ" (Καταπελτικά); содержаніе этого сочиненія приготовленіе стрѣлъ. По словамъ Паппуса, въ этомъ сочиненіи было помѣщено доказательство, предложенное Герономъ для нахожденія двухъ средне-пропорціональныхъ. Рѣшеніе этой задачи, по словамъ Герона Младшаго, было необходимо Герону Старшему при вычисленіи размѣровъ и скорости полета снарядовъ. Сочиненіе это также до насъ дошло и извѣстно кромѣ того, подъ именемъ „Βελοποιητικά".

„Χειροβαλίστρα"—это прибавленіе къ „Καταπελτικα". Отъ этого сочиненія сохранились только незначительные отрывки

„Καμαρικά"—предметъ этого сочиненія устройство καμαρικά По словамъ Евтокія, оно было комментировано Исидоромъ Милетскимъ, учителемъ Евтокія. Отъ этого сочиненія дошли только ничтожныя отрывки, притомъ они такъ искажены, что нельзя даже составить себѣ понятія: что такое были καμβέστρια и какое было ихъ назначеніе.

„Автоматы" (Αὐτόματα). Сочиненіе это состоитъ изъ двухъ книгъ, предметомъ которыхъ служитъ устройство автоматовъ. Сочиненіе это дошло до насъ въ цѣлости.

„Ζύγια"—предметъ этого сочиненія, по словамъ Паппуса, устройство забавныхъ машинокъ.

„Περὶ ὑδρίων" въ четырехъ книгахъ, содержаніе которыхъ составляетъ описаніе водяныхъ часовъ, ихъ устройство и примѣненіе въ астрономіи для измѣренія времени. Оно утеряно, но о немъ упоминаетъ Паппусъ.

„Пневматика" (Πνευματικα). Содержаніе этого сочиненія дошедшаго до насъ составляетъ механика газовъ и жидкостей. Въ немъ находится описаніе многихъ интересныхъ приборовъ. „Пневматика" знакомитъ насъ съ состояніемъ механики въ I в. до Р. Х. Въ этомъ сочиненіи описаны: устройство эолипила, перемежающійся фонтанъ, механическія банки, различнаго рода спринцовки, лампы различнаго устройства, сифоны, пожарные насосы, водяной органъ и мн. др. интересные приборы.

Кромѣ поименованныхъ сочиненій, Геронъ написалъ еще „Катоптрику", „Діоптрику" и нѣсколько другихъ сочиненій, содержаніе которыхъ намъ неизвѣстно.

Теодосій жилъ около 50 г. до Р. Х., онъ родомъ изъ Витиніи (Триполи въ Африкѣ). Теодосій написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ болѣе извѣстно сочиненіе по Геометріи: „О сферикахъ", въ трехъ книгахъ. Оно состоитъ изъ цѣлаго ряда предложеній, каковы напр.: всякое сѣченіе

шара плоскостью есть кругъ; плоскость касается шара только въ одной точкѣ; радіусъ, проведенный въ точку касанія перпендикуляренъ плоскости; сѣченіе шара плоскостью, проходящею черезъ центръ, есть большой кругъ; малые круги, параллельные большому кругу и лежащіе отъ него на равномъ разстояніи, равны между собою; разстояніе какой нибудь точки окружности большаго круга отъ его полюса есть сторона вписаннаго квадрата и др.

Большая часть изъ предложеній этого сочиненія находятся въ настоящее время въ сочиненіяхъ по элементарной Геометріи.

Сочиненіе „О сферикахъ" дошло до насъ только въ переводѣ на арабскій языкъ. Въ первый разъ оно было переведено на латинскій языкъ въ 1529 г. въ Парижѣ. Кромѣ этого сочиненія, Теодосій написалъ еще два астрономическихъ сочиненія, именно: „О жилищахъ" и „О дняхъ и ночахъ". Содержаніе перваго изъ нихъ небесная перспектива. Второе касается того же предмета это собраніе предложеній безъ доказательствъ.

Діонисодоръ, современникъ Теодосія, полагаютъ, былъ родомъ изъ Емессы въ Сиріи. Онъ извѣстенъ рѣшеніемъ задачи: „раздѣлить полушаръ плоскостью, параллельною его основанію, въ данномъ отношеніи", которое сохранилъ намъ Евтокій въ своихъ комментаріяхъ на сочиненіе Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ". Извѣстно, что эта задача можетъ быть рѣшена только при помощи коническаго сѣченія.

По словамъ Плинія, Діонисодоръ былъ свѣдущій геометръ. Плиній передаетъ, что въ гробницѣ Діонисодора было найдено письмо Діонисодора къ живымъ, въ которомъ онъ пишетъ, что онъ достигъ центра земли, который находится на разстояніи 42000 стадій отъ его гробницы. Число, приписываемое Діонисодору, есть самое точное изъ чиселъ данныхъ древними для величины радіуса земли.

Вторая Александрійская школа.

Послѣ паденія династіи Птоломеевъ, царствовавшей слишкомъ триста лѣтъ, Египетъ былъ обращенъ въ римскую провинцію; мѣсто отжившаго свой вѣкъ язычества заняло христіанство; эти великія событія, имѣвшія такое большое вліяніе на судьбу народовъ, отразились и на научномъ развитіи Александрійской школы. Старыя ученія Пиѳагора и Платона были замѣнены новыми, создавшими новое направленіе—*вторую Александрійскую школу.* Оно было слѣдствіемъ господства Римлянъ и введенія христіанства въ Египтѣ. Представителями второй Александрійской школы были: Птоломей, Теонъ Александрійскій, Діофантъ, Паппусъ и др.

Діофантъ былъ послѣдній въ ряду великихъ греческихъ математиковъ;

съ нимъ прекращается творческій духъ, отличавшій его предшественниковъ, онъ жилъ во время комментаторовъ и собирателей, появленіе которыхъ всегда указываетъ на упадокъ научной дѣятельности народовъ. Развитіе математики послѣ него прекратилось; Паппусъ и Теонъ были послѣдними изъ замѣчательныхъ греческихъ математиковъ, но они уже не обладали духомъ творчества, а были только собиратели и толкователи. Упадку развитія математическихъ наукъ и наукъ вообще, много способствовало истребленіе знаменитой Александрійской библіотеки, императоромъ Θеодосіемъ; этимъ отняты были у ученыхъ пособія для ихъ занятій. Императоръ Θеодосій въ 392 году издалъ указъ истребить языческіе храмы во всемъ государствѣ; жертвою этого распоряженія сдѣлался знаменитый храмъ *Сераписа*, въ которомъ помѣщалась громадная библіотека, основанная Птоломеями и обогащенная пожертвованіями римскихъ императоровъ, она была перенесена въ храмъ Сераписа во время осады Александріи Юліемъ Цезаремъ; знаменитая библіотека и собранныя въ ней неоцѣнимыя сокровища памятниковъ наукъ, были расхищены и сдѣлались жертвою грубой черни, предводимой фанатическимъ духовенствомъ *). Впослѣдствіи времени христіане истребленіе Александрійской библіотеки приписали Арабамъ, взявшимъ въ 640 году Александрію; говорятъ, что на вопросъ, что дѣлать съ громадной библіотекой, Омаръ будто-бы отвѣчалъ извѣстной дилеммой. Но этотъ разсказъ незаслуживаетъ довѣрія, такъ какъ писатель V столѣтія Орозій утверждаетъ, что онъ видѣлъ пустые шкафы нѣкогда знаменитой библіотеки.

Къ сожалѣнію, это не единственный примѣръ истребленія книгъ и памятниковъ наукъ христіанами, стоитъ припомнить византійскаго императора Льва Исаврянина (717—741), который сожигалъ не только книги, но и читателей ихъ.

Перечислимъ вкратцѣ геометровъ второй Александрійской школы.

Менелай жилъ около 80 г. по Р. Х. въ Александріи, онъ занимался Геометріей и Астрономіей. Свои астрономическія наблюденія Менелай производилъ въ Римѣ въ царствованіе императора Траяна. Менелай написалъ нѣсколько сочиненій, но до насъ дошло только одно, именно: „Сферика" въ трехъ книгахъ. Сочиненіе это дошло до насъ только въ переводахъ на еврейскій и арабскій языкъ, подлинный же греческій текстъ утерянъ **).

*) Библіотека Брухіума еще ранѣе сгорѣла, во время осады Александріи флотомъ Юлія Цезаря въ 47 г. до Р. Х.

**) Сочиненіе Менелая „Сферика" было переведено съ арабскаго Мавролико и напечатано вмѣстѣ съ „Сферикой" Теодосія въ 1558 г. in-fol. въ Мессинѣ. Сочиненіемъ этимъ также много занимался Галлей, желавшій его издать, но оно было издано только послѣ смерти Галлея Костаромъ (Costard), подъ заглавіемъ: „Menelai Sphaericorum libri tres, quos olim, collatis Mss., hebraeis et arabicis, typis exprimendos curavit E. Hallejus", въ Оксфордѣ въ 1758 г. in-8.

Самое важное изъ всѣхъ предложеній „Сферики“ Менелая есть первое, въ третьей книгѣ, которое служило основаніемъ всей Сферической Тригонометріи древнихъ Грековъ. Предложеніе это относится къ свойству шести отрѣзковъ, на сторонахъ сферическаго треугольника *), полученныхъ отъ пересѣченія его сторонъ дугою большаго круга. Для доказательства этого предложенія, Менелай пользуется, какъ леммой, подобнымъ же предложеніемъ для плоскаго треугольника. Оно получило громадное значеніе въ новѣйшей Геометріи, гдѣ легло въ основаніи теоріи сѣкущихъ Карно.

Изъ другихъ предложеній этого сочиненія укажемъ еще на два слѣдующія: 1) дуга большаго круга, дѣлящая пополамъ уголъ сферическаго треугольника, дѣлитъ противолежащую сторону на такія двѣ части, отношеніе хордъ которыхъ равно отношенію хордъ двухъ прилежащихъ сторонъ; и 2) три дуги, дѣлящія пополамъ три угла сферическаго треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Кромѣ этого сочиненія Менелая написалъ еще нѣсколько другихъ, но они до насъ не дошли. Теонъ упоминаетъ сочиненіе Менелая „О хордахъ“ въ шести книгахъ; а Монтукла полагаетъ, что въ этомъ сочиненіи было показано устройство тригонометрическихъ таблицъ. Другое сочиненіе Менелая упоминаетъ Паппусъ въ 4-й книгѣ своихъ „Математическихъ коллекцій“, содержаніе котораго теорія кривыхъ линій. Паппусъ говоритъ, что „такую линію, полученную отъ пересѣченія двухъ поверхностей, Менелай называлъ *чудною*“. Вѣроятно это была кривая двойной кривизны.

Никомахъ. Для полноты нашего историческаго очерка намъ необходимо сказать нѣсколько словъ о Никомахѣ, написавшемъ Ариѳметику. Онъ былъ родомъ изъ города Геразы въ Аравіи; время когда онъ жилъ въ точности неизвѣстно, по этому поводу существуетъ полнѣйшее разногласіе; нѣкоторые полагаютъ, что онъ жилъ до Р. Х., Монтукла же говоритъ, что между III в. до Р. Х. и IV по Р. Х.; но болѣе всего заслуживаетъ довѣрія мнѣніе Нессельмана **), который утверждаетъ, что Никомахъ жилъ около 100 г. по Р. Х. Мнѣніе свое Нессельманъ основываетъ на словахъ *Апулея Мадурскаго* (см. Римлянс), который перевелъ „Ариѳметику“ Никомаха на латинскій языкъ во II в. по Р. Х. и на ссылку Никомаха въ своемъ сочиненіи по музыкѣ, въ которомъ онъ упоминаетъ о Трасилосѣ, жившимъ въ царствованіе Тиверія.

Имя Никомаха пользовалось большою извѣстностью въ древности, бла-

---

*) Предложеніе это пользовалось извѣстностью у Арабовъ, комментировавшихъ его въ нѣсколькихъ сочиненіяхъ, и называлось у нихъ *правиломъ пересѣченія*.

**) Nesselmann, Die Algebra der Griechen. Berlin. 1842.

годаря его сочиненію „Ариѳметика" (Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή)*), состоящему изъ двухъ книгъ. Оно прекрасно показываетъ состояніе Ариѳметики во время процвѣтанія александрійскихъ школъ. Никомахъ принадлежалъ къ числу пиѳагорейцевъ **). Кромѣ Ариѳметики Никомахъ написалъ еще другое сочиненіе, въ которомъ онъ разбираетъ мистическія свойства чиселъ; оно носитъ заглавіе „Ариѳметическія изслѣдованія о богѣ и божественныхъ предметахъ" (Θεολογούμενα ἀριθμητικῆς). Сочиненіе это до насъ не дошло, но по отзыву Фотія, оно не заключало ничего замѣчательнаго ***).

Изложимъ вкратцѣ содержаніе „Ариѳметики" Никомаха.

Книга I. Въ началѣ этой книги помѣщено введеніе философскаго содержанія, затѣмъ авторъ переходитъ къ опредѣленію *числа.* Числа онъ раздѣляетъ на *четныя и нечетныя.* Затѣмъ Никомахъ говоритъ, что „всякое число равно половинѣ суммы, равноотстоящихъ отъ него съ обѣихъ сторонъ чиселъ; правило это не относится къ единицѣ, которая только по одну сторону имѣетъ близлежащее число, она равна его половинѣ". Изъ этого видно, что древніе математики не имѣли понятія о рядѣ чиселъ слѣдующихъ за единицей, въ противоположномъ направленіи. Также не существовало и понятіе о нулѣ, такъ какъ если-бы оно было, то для единицы Никомаху не надо было дѣлать исключенія изъ общаго правила. Четныя числа онъ снова дѣлитъ на: *четно-четныя, четно нечетныя* и *нечетно-четныя.* Подобное дѣленіе существовало уже у Евклида. Затѣмъ онъ дѣлитъ

---

*) Сочиненіе это носило названіе не „Ариѳметика", а „Двѣ книги введенія въ Ариѳметику".

**) Воззрѣнія Никомаха на числа и на ихъ свойства напоминаютъ понятія Пиѳагора, который свойства чиселъ доказывалъ геометрически. Кромѣ того числамъ Пиѳагоръ приписывалъ мистическія свойства. Дѣленіе чиселъ на различные классы также имѣетъ пиѳагорейскій характеръ, такъ какъ намъ извѣстно изъ „Метафизики" Аристотеля, что въ пиѳагорейской школѣ существовало десять основныхъ понятій, именно, конечное и безконечное, прямое и непрямое (или четное и нечетное), единица и множество, правое и лѣвое, мужеское и женское, покой и движеніе, прямое и кривое, свѣтлое и темное, доброе и злое, квадратъ и гетеромекія. Послѣднія два понятія не вполнѣ еще объяснены.

Пиѳагорейцы разсматривали числа съ геометрической точки зрѣнія, такъ напр. *Тимаридъ,* ученикъ Пиѳагора, утверждалъ, что простыя числа всегда суть числа прямолинейныя, такъ какъ ими нельзя выразить ни площади, ни произведенія. Числа, которыя можно разложить на два множителя они называли площадными числами, если оба множителя числа прямолинейныя, то данное число разлагается на два множителя только однимъ образомъ. Подобнымъ образомъ они разсматривали и тѣлесныя числа. Особенное вниманіе было обращено пиѳагорейцами на фигурныя числа. Подобныя воззрѣнія на числа раздѣлялъ также *Тимей,* современникъ Сократа.

***) Монтукла, а также Клюгель приписываютъ Никомаху сочиненіе подъ заглавіемъ „Praxis Arithmetica", но такое мнѣніе несправедливо.

числа на *простыя* и *сложныя*. Четныя числа онъ снова дѣлитъ на *сверхполныя*, *полныя* и *несовершенно-полныя*. Затѣмъ слѣдуютъ еще другія дѣленія чиселъ и указаны многія ихъ свойства.

Книга II. Въ этой книгѣ показанъ способъ нахожденія кратныхъ чиселъ даннаго числа и какъ изъ даннаго ряда кратныхъ чиселъ находить числа, находящіяся въ одномъ и томъ же отношеніи съ даннымъ числомъ. Изложивъ еще нѣкоторыя свойства чиселъ Никомахъ переходитъ къ *полигональнымъ числамъ*, которыя онъ разбираетъ весьма подробно. Хотя многія свойства полигональныхъ чиселъ были извѣстны еще пиѳагорейцамъ, которые изученію ихъ придавали важное значеніе, но Никомахъ первый сталъ о нихъ писать; такъ по крайней мѣрѣ утверждаютъ нѣкоторые древніе авторы. Числа онъ раздѣляетъ на *линейныя*, *плоскія*, *треугольныя*, *четыреугольныя*, *пятиугольныя*, *шестиугольныя* и т. д., на *тѣлесныя*, *пирамидальныя*, *кирпичеподобныя*, *клиноподобныя*, *шароподобныя*, *параллелепипеды квадратныя и кубическія*. Всѣ эти числа онъ изслѣдуетъ обстоятельно и излагаетъ ихъ свойства. Послѣ этого Никомахъ переходитъ къ пропорціямъ; позднѣйшіе писатели, какъ напримѣръ Теонъ Смирнскій излагали ихъ въ теоріи музыки. Пропорціи Никомахъ дѣлитъ на три класса, на: *ариѳметическія*, *геометрическія* и *гармоническія*. Эти три вида пропорціи были уже извѣстны Пиѳагору, Платону и Аристотелю. Примѣрами этихъ пропорцій могутъ служить пропорціи вида: $a-b=c-d$, $a:b=c:d$ и $a:c=a-b:b-c$. Затѣмъ Никомахъ доказываетъ свойства этихъ пропорцій. Кромѣ этихъ трехъ видовъ пропорцій, у него приведены еще семь другихъ видовъ, такъ что всѣхъ видовъ пропорцій, у Никомаха числомъ десять.

Вотъ краткое содержаніе этого замѣчательнаго сочиненія. Укажемъ на его особенности. Въ сочиненіи Никомаха Ариѳметика въ первый разъ является наукой о числахъ, безъ геометрическихъ представленій, какъ у Евклида. Въ первый разъ въ этомъ сочиненіи изложена теорія полигональныхъ чиселъ, а также болѣе подробно разобраны пропорціи. Опредѣленія у Никомаха строже чѣмъ у Евклида, за то часто онъ выражается не вполнѣ точно. Мы выше сказали, что отъ Евклида до Никомаха мы не знаемъ ни одного автора, написавшаго сочиненіе по Ариѳметикѣ, но тѣмъ не менѣе этимъ предметомъ занимались многіе *). Самъ Никомахъ часто ссылается на труды ученыхъ, къ сожалѣнію онъ не упоминаетъ ихъ именъ, а просто говоритъ *другіе*, *иные* и т. д.

Благодаря „Ариѳметикѣ", имя Никомаха получило громкую извѣст-

*) Мы выше упомянули, что Эратосѳену приписываютъ сочиненіе по Ариѳметикѣ, но оно до насъ не дошло.

ность въ древности, оно вошло даже въ пословицу *). Сочиненіе его было не только самымъ важнымъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ почти единственнымъ источникомъ для изученія Ариѳметики въ продолженіи многихъ столѣтій.

„Ариѳметика“ Никомаха была много разъ комментирована въ древности, а въ школьномъ преподаваніи она занимала одно изъ видныхъ мѣстъ. Самые извѣстные изъ комментаторовъ „Ариѳметики“ Никомаха были: упомянутый нами, *Апулей* изъ Мадуры; *Анатолій* **), написавшій около 280 г. „Ариѳметику“ въ 10 книгахъ; *Ямвлихъ*, жившій въ IV в. ***), *Боэцій* и *Асклепій Траллскій*—въ VI в.; *Іоаннъ грамматикъ*, извѣстный подъ именемъ *Филопонуса*, очевидецъ взятія Александріи Арабами въ 640 г., написалъ подробный комментарій на „Ариѳметику“ Никомаха; *Проклъ* также написалъ комментаріи, но время когда жилъ этотъ Проклъ неизвѣстно, хотя во всякомъ случаѣ это не знаменитый комментаторъ „Началъ“ Евклида Проклъ Діадохъ ****). „Ариѳметика“ Никомаха была также извѣстна Арабамъ, она была переведена ими въ IX в. *Табитъ-бенъ-Корра* *****).

---

*) Лукіанъ говоритъ „ἀριθμέεις ὡς Νικόμαχος ὁ Γερασηνός“, а Ямвлихъ на двухъ страницахъ распространяется о необыкновенныхъ и замѣчательныхъ особенностяхъ Никомаха.

**) Анатолій прелатъ Александрійскій, епископъ Лаодикійскій (въ Сиріи), кромѣ упомянутой нами Ариѳметики, написалъ еще сочиненіе „De cyclo paschale“.

***) Ямвлихъ переработалъ „Ариѳметику“ Никомаха и включилъ ее въ 4-ю часть своего сочиненія „О философіи Пиѳагора“. Заглавіе этой части: Ἰαμβλίχου Χαλκιδέως τῆς κοίλης Συρίας, περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς, λογος τεταρτος. Комментарій этотъ былъ напечатанъ Сам. Теннулiусомъ, на греческомъ и латинскомъ языкахъ, подъ заглавіемъ: In Nicomachi Geraseni arithmeticam introductio, gr. et latine. Arnheim, 1667—68, 2 vol. in 4. Къ сожалѣнію Теннулiусъ во многихъ мѣстахъ не понялъ Ямвлиха, а потому его переводъ заставляетъ желать многаго.

****) По словамъ Евтокія, комментаріи на „Ариѳметику“ Никомаха были написаны *Геронасомъ*, учителемъ Прокла, жившимъ въ первой половинѣ V в. Летронъ невѣрно называетъ Геронаса Герономъ и приписываетъ ему сочиненіе по Ариѳметикѣ. Маринусъ также упоминаетъ объ учителѣ Прокла Геронѣ, который по его словамъ былъ человѣкъ благочестивый и весьма свѣдущій и опытный преподаватель.

*****) Болѣе извѣстны слѣдующія изданія сочиненія Никомаха:

Νικομάχου Γερασινοῦ ἀριθμητικῆς βιβλία δύο. Nicomachi Gerasini arithmeticae libri duo. Nunc primum typis excusi in lucem eduntur. Parisiis. 1538. in-4.

Theologumena Arithmeticae etc. Accedit Nicomachi Gerasini institutio arithmetica ad fidem codicum Monacensium emendata. Edidit F. Astius. Lipsiae. 1817. in-8.

Specimen Arithmeticae Nicomacheae. При этомъ изданіи приложены схоліи, прибавленныя издателемъ Нобе (Nobbe). Lipsiae 1828. in-8.

Въ послѣднее время „Ариѳметика“ Никомаха была издана Гохомъ подъ заглавіемъ: Ἰωάννου Γραμματικοῦ Ἀλεξανδρέως τοῦ Φιλοπόνου εἰς τὸ δεύτερον τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς. Primum edidit Ricardus Hoche. Berolini. 1867. in-8. Изданіе это есть „Ариѳметика“ Никомаха съ комментаріями Филопонуса.

Коснувшись „Ариѳметики" Никомаха мы считаемъ необходимымъ вкратцѣ разсмотрѣть, что понимали древніе греческіе математики подъ именемъ Ариѳметики.

Часть математики, извѣстная у насъ подъ именемъ *Ариѳметики* у Грековъ составляла двѣ совершенно различныя науки. Подъ именемъ *Ариѳметики* (Ἀριθμητική) они понимали науку о числахъ, предметъ которой изслѣдованіе свойствъ чиселъ и раздѣленіе ихъ на классы, какъ то на четныя и нечетныя, простыя и составныя и т. д. Ариѳметика у Грековъ есть собственно наука теоретическая. Въ такомъ духѣ написаны почти всѣ Ариѳметики древнихъ Грековъ, и въ томъ числѣ самая извѣстная изъ нихъ— „Ариѳметика" Никомаха. Во всѣхъ этихъ сочиненіяхъ нѣтъ и помину о какихъ либо практическихъ примѣненіяхъ. Практическая Ариѳметика составляла совершенно отдѣльную науку и была извѣстна подъ именемъ *Логистики* (Λογιστική, а также Λογισμός). Подобное раздѣленіе Ариѳметики было принято Платономъ и вѣроятно было установлено еще до него. Проклъ еще опредѣленнѣе устанавливаетъ различіе между теоретическими науками: Геометріей и Ариѳметикой съ одной стороны, и практическими: Геодезіей и Логистикой съ другой стороны; Проклъ говоритъ: „первыя (науки) разсматриваютъ фигуры и числа относительно ихъ самихъ; вторыя же разсматриваютъ фигуры и числа только по отношенію ихъ къ виду и численности дѣйствительно существующихъ предметовъ". Дѣленіе математическихъ наукъ на *теоретическія* (νοητά) и на *практическія* (αἰσθητά), на сколько намъ извѣстно, было предложено въ первый разъ Геминусомъ, жившемъ за 70 л. до Р. Х. Проклъ, въ своихъ комментаріяхъ, говоритъ: „Многіе полагаютъ, въ томъ числѣ и Геминусъ, что математическія науки слѣдуетъ раздѣлить на отдѣлы инымъ образомъ; мнѣніе свое они основываютъ на томъ, что предметъ однихъ изъ наукъ—понятія доступныя нашему уму, а другихъ—изслѣдованіе и изученіе свойствъ дѣйствительно существующихъ предметовъ. Подъ именемъ понятій, доступныхъ нашему уму, они понимаютъ всѣ такія представленія, которыя доступны уму, не принимая въ соображе-

---

Изъ сочиненій написанныхъ по поводу „Ариѳметики" Никомаха особеннаго вниманія заслуживаютъ:

Joachim Camerarius. De Graecis latinisque numerorum notis et praeterea Saracenicis seu Indicis. Explicatiunculae Arithmetices doctrinae Nicomachi. 1556. Lipsiae. Вновь напечатано въ изданіи сочиненій Ямвлиха, данномъ Геннуліусомъ подъ заглавіемъ: Explicationes J. Camerarii Papeberg. in duos libros Nicomachi Geraseni Pythagorei deductionis ad scientiam numerorum. Daventriae. 1667. in-4.

Th. Taylor theoric arithmetic in three books, containing the substance of all that has been written on this subject by Theo Smyrna, Nicomachus, Jamblichus and Boetius. London. 1816. in-8. Послѣднее сочиненіе есть одна изъ рѣдчайшихъ книгъ.

ніе матеріальныхъ формъ. Науки, предметъ которыхъ составляютъ понятія, доступныя нашему уму, раздѣляются на два главныхъ и основныхъ отдѣла: Ариѳметика и Геометрія. Науки-же, содержаніе которыхъ составляютъ дѣйствительно существующіе предметы, дѣлятся на шесть отдѣловъ: Механика, Астрономія, Оптика, Геодезія, Музыка и Логистика". Затѣмъ Проклъ говоритъ, что Геометрія дѣлится на два отдѣла: Планиметрію и Стереометрію. Далѣе Проклъ продолжаетъ: „Подобнымъ образомъ Ариѳметика раздѣляется на теорію линейныхъ чиселъ, плоскихъ чиселъ и тѣлесныхъ чиселъ; она разсматриваетъ составъ чиселъ, какъ происшедшихъ отъ единицы, затѣмъ она разсматриваетъ происхожденіе плоскихъ чиселъ, какъ подобныхъ, такъ и неподобныхъ; далѣе она разсматриваетъ происхожденіе чиселъ третьяго измѣренія. Науки, соотвѣтствующія упомянутымъ выше, Геодезія и Логистика, занимаются не фигурами и числами, доступными нашему уму, а дѣйствительно существующими предметами. Въ самомъ дѣлѣ, измѣреніе цилиндра и конуса не есть предметъ Геодезіи, напротивъ, предметъ ея—измѣреніе конусообразныхъ кучъ и цилиндрическихъ колодцевъ..... Съ другой стороны, логистикъ разсматриваетъ свойства чиселъ не по отношенію ихъ къ дѣйствительно-существующимъ предметамъ; а потому онъ даетъ имъ наименованія по отношенію къ измѣренному, называя ихъ μηλίτας и φιαλίτας".

Изъ сказаннаго видно, что подъ *Ариѳметикой* понимали въ древности теоретическую науку, а подъ *Логистикой*—практическую. Подобное различіе сохранили и Арабы, а послѣ нихъ Персы. Въ одной изъ парафразъ „Киласатъ-аль-Гисаба" (**Khilasat-al-Hisâb**—эссенція искусства считать) *), сочиненія, написаннаго Магомедомъ-Бега-Еддиномъ (**Mohamed-Beha-Eddin**), жившаго въ XVI в., находится слѣдующее раздѣленіе Ариѳметики: „Наука о числахъ бываетъ двухъ родовъ: одна спекулятивная, предметъ которой изслѣдованіе свойствъ присущихъ самимъ числамъ, на греческомъ языкѣ наука эта носитъ названіе Ариѳметики. Другая наука—практическая, это наука, которая учитъ какъ при помощи извѣстныхъ чиселъ отыскиваются неизвѣстныя".

Теонъ Смирнскій жилъ въ началѣ II в. по Р. Х. **) и много занимался теоріей чиселъ. Теонъ написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ

*) The Khoolasut-ool-Hisab, a compendium of arithmetic and geometry in the arabic language by Buhae-ood-Deen of Amool in Syria, with a translation into Persian and commentary by the late Muolawee Ruoshun Ulee of Juonpoor; to which is added a treatise on Algebra by Nujm-ood-deen Ulee Khan, head Qazee, to the Sudr Deewanee and Nizamut Udalut ect. Calcutta. 1812. in-8.

**) Птоломей упоминаетъ о наблюденіяхъ Теона надъ Меркуріемъ и Венерой, произведенныхъ между 129 и 132 гг. по Р. Х.

дошли до насъ слѣдующія: „О предметахъ въ математикѣ, полезныхъ при чтеніи Платона“ (Τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν). оно состоитъ изъ пяти книгъ, содержаніе которыхъ. ариѳметика и музыкальное соотношеніе между числами, Геометрія. Стереометрія, астрономія и музыка *). Другое сочиненіе Теона носитъ заглавіе: „Малый астрономъ“ (μικρὸς Ἀστρονόμος)—это сборникъ, которымъ пользовались въ Александрійской школѣ. Сборникъ этотъ состоялъ изъ „Сферики“ Теодосія въ трехъ книгахъ; „Данныхъ“. „Оптики“ и „Феноменъ“ Евклида; „Книги о жилищахъ“ и „О дняхъ и ночахъ“ Теодосія въ двухъ книгахъ; сочиненій Автолика „О восхожденіи и захожденіи“ и „Движущейся сферы“: сочиненіе Аристарха Самосскаго „О величинахъ и разстояніяхъ“, сочиненіе Гипсикла „О восхожденіяхъ“ и наконецъ трехъ книгъ „Сферики“ Менелая. Всѣ эти сочиненія, исключая послѣднея книги сочиненія Менелая, дошли до насъ. Послѣднее сочиненіе Теона имѣетъ интересъ, какъ указывающее на состояніе Астрономіи въ Александрійской школѣ въ I в. по Р. Х. Сочиненіе это заключаетъ много данныхъ для исторіи Астрономіи, въ немъ заключается много весьма цѣнныхъ отрывковъ изъ сочиненій Пиѳагора, Эратосѳена и др. Въ этомъ же сочиненіи упоминаются имена астрономовъ, труды и дѣятельность которыхъ намъ совершенно неизвѣстны, какъ напр. Адрастъ, Деркиллидъ, Александръ Этолійскій и мн. др.

Теона Смирнскаго часто смѣшиваютъ съ Теономъ Александрійскимъ, жившимъ въ IV в. объ этомъ послѣднемъ мы скажемъ въ свое время. Теона Смирнскаго также иногда называютъ Теономъ Старшимъ.

Птоломей былъ вмѣстѣ астрономъ и геометръ. Время когда жилъ и мѣсто рожденія Клавдія Птоломея въ точности неизвѣстны, нѣкоторые полагаютъ, что онъ родился въ Птолемаидѣ или же въ Пелузіи, въ Египтѣ. Ученую его дѣятельность относятъ къ промежутку времени между 125 г. и 160 г. по Р. Х. Извѣстно только, что Птоломей производилъ астрономическія наблюденія въ Александріи въ 139 г.

Познанія его были громадны. Большая часть сочиненій, написанныхъ

*) До насъ дошли только первая и четвертая книги этого интереснаго сочиненія. Ариѳметика и ученіе о интервалахъ были изданы Бульо (Boulliau) въ 1644 г. съ латинскимъ переводомъ. Впослѣдствіи, въ 1827 г., сочиненіе это было снова издано голландцемъ Гельдеромъ (De Gelder); изданіе это заключаетъ пропуски и вообще неудовлетворительно. Астрономія впервые была издана въ 1849 г. Мартеномъ (H. Martin) съ весьма хорошими комментаріями. Въ своемъ сочиненіи Мартенъ указываетъ, что Астрономія Теона была извѣстна еще въ древности, такъ какъ философъ Халкидій (Chalcidius) принадлежавшій къ платоновской школѣ и жившій между IV и VI вв., включилъ сочиненіе Теона въ свои комментаріи на „Тимей“ Платона не упоминая даже имени автора. Подлогъ этотъ былъ открытъ Мартеномъ.

Птоломеемъ относится къ Астрономіи. Онъ собралъ въ одно цѣлое все извѣстное по этому предмету, прибавилъ свои собственныя открытія и написалъ сочиненіе, названное имъ: „Математическій синтаксисъ“ (Μαθηματικὴ σύνταξις), впослѣдствіи названіе это замѣнили другимъ, именно „большое сочиненіе“. Но сочинение это болѣе извѣстно подъ именемъ „Альмагеста“, названіе это произошло отъ арабскаго члена *ал* и греческаго слова μέγιστος— *очень большой*, отсюда и произошло названіе Almagisti *). Сочиненіе это впервые стало извѣстно въ переводѣ на арабскій языкъ, переводъ этотъ относится къ IX в.; затѣмъ въ XIII в. оно было переведено на еврейскій языкъ испанскими евреями. Греческій текстъ Альмагеста вѣроятно былъ-бы потерянъ, если бы не понадобилось опредѣлить болѣе точно время праздника Пасхи и другихъ подвижныхъ праздниковъ, вопросъ же этотъ издавна былъ предметомъ многихъ споровъ между представителями духовенства. Боэцій первый перевелъ Альмагестъ на латинскій языкъ, а императоръ Фридрихъ II приказалъ, около 1230 г., сдѣлать новый переводъ на латинскій языкъ съ арабскаго текста **).

*) Арабскій писатель X вѣка Масуди Masoudi) названіе Альмагестъ объясняетъ иначе: онъ полагаетъ, что содержаніе этого сочиненія заимствовано изъ индусскаго сочиненія Almagist, нынѣ утеряннаго, но такое объясненіе не заслуживаетъ вниманія.

**) Впервые переводъ „Альмагеста“ съ греческой рукописи на латинскій языкъ былъ сдѣланъ Георгіемъ Трапезунтскимъ, около 1474 г., по приказанію папы Николая V. Греческій текстъ былъ принесенъ въ Италію византійскими учеными, искавшими тамъ убѣжища послѣ взятія Константинополя Турками въ 1453 г. Первое печатное изданіе „Альмагеста“ появилось въ Венеціи въ 1496 г., на латинскомъ языкѣ. Это есть извлеченіе изъ латинскаго перевода Герарда Кремонскаго, сдѣланное Пурбахомъ и Региомонтанусомъ. Переводъ Герарда есть извлеченіе изъ арабскаго комментарія на Альмагестъ, сдѣланный Геберомъ Севильскимъ въ XII в. Переводъ Региомонтануса былъ снова напечатанъ въ Нюренбергѣ въ 1550 г. и затѣмъ еще нѣсколько разъ. Переводъ Георгія Трапезунтскаго былъ напечатанъ только въ 15 7 г. въ Венеціи. Первое печатное изданіе „Альмагеста“ въ переводѣ на латинскій языкъ, съ арабскаго текста, было напечатано въ Венеціи въ 1515 г. in-fol. у Петра Лихтенштейна. До сихъ поръ извѣстенъ только одинъ экземпляръ этого изданія, принадлежащій библіотекѣ Парижской Академіи Наукъ. Самая древняя изъ дошедшихъ до насъ греческихъ рукописей Альмагеста относится къ VI в.; въ настоящее время она принадлежитъ Парижской Національной Библіотекѣ. Рукопись эта написана на 50½ кожахъ, она была привезена изъ Константинополя, послѣ взятія этого города Турками, родственникомъ византійскаго императора Іоанномъ Ласкарисомъ и подарена Лоренцо Медичи. На первомъ листѣ рукописи находится надпись, изъ которой видно, что рукопись эта была подарена Ласкарису Аттаромъ Кипрскимъ. Впослѣдствіи рукопись эту перевезла во Францію Екатерина Медичи.

Въ 1538 г. въ первый разъ появился въ печати, въ Базелѣ, подлинный греческій текстъ „Альмагеста“, съ комментаріями Теона, благодаря заботамъ Гринеуса. Греческая рукопись, которою пользовался Гринеусъ при своемъ изданіи „Альмагеста“, была подарена Нюренбергской библіотекѣ Региомонтанусомъ. Региомонтанусу она была завѣщана кардиналомъ Вес-

Изложимъ вкратцѣ содержаніе этого замѣчательнаго сочиненія. „Альмагестъ" это трактатъ по Астрономіи. Въ немъ изложено то, что въ настоящее время извѣстно подъ именемъ *системы Птоломея*. Въ основаніи этой системы принято, что въ центрѣ вселенной находится неподвижное тѣло—земля, около которой вращаются, вокругъ одной оси, но въ различныхъ сферахъ, всѣ прочія небесныя тѣла, въ слѣдующемъ порядкѣ: Луна, Меркурій, Венера, Солнце, Марсъ, Юпитеръ, Сатурнъ и наконецъ неподвижныя звѣзды. Система эта господствовала въ теченіи многихъ столѣтій, до самаго Коперника. Въ началѣ своего сочиненія Птоломей говоритъ: „мы попытаемся объяснить небесныя явленія, принявъ въ основаніе только то, что очевидно, дѣйствительно и вѣрно". Птоломей желаетъ придерживаться метода геометрическаго—метода самаго точнаго и слѣдовать путемъ доказательствъ, но къ сожалѣнію онъ весьма часто слѣдуетъ этому методу, выходя изъ совершенно ложныхъ основаній, ни на чемъ не основанныхъ.

„Альмагестъ" Птоломея состоитъ изъ тринадцати книгъ, мы только укажемъ вкратцѣ, что содержитъ каждая изъ нихъ, такъ какъ болѣе подробное разсмотрѣніе этого сочиненія относится къ Астрономіи.

I-я книга состоитъ изъ двухъ частей, въ первой изложена система Птоломея, предложенная имъ для объясненія явленій небесныхъ; во второй части изложены необходимыя, при изученіи Астрономіи, начала прямолинейной и Сферической Тригонометріи. Въ основаніи своей Тригонометріи Птоломей положилъ предложеніе относительно свойствъ шести отрѣзковъ на сторонахъ сферическаго треугольника; для доказательства этого предложенія, впервые предложеннаго, какъ мы замѣтили уже выше, Менелаемъ, Птоломей пользуется аналогичнымъ предложеніемъ для треугольника на плоскости, именно, что сѣкущая, проведенная въ плоскости треугольника, разсѣкаетъ его стороны такъ, что произведеніе трехъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общихъ оконечностей, равно произведенію трехъ остальныхъ. Предложеніе это есть обобщеніе основнаго предложенія пропорціональныхъ линій, именно, что прямая, проведенная параллельно основанію треугольника, разсѣкаетъ стороны его на части пропорціональныя. Въ этой же книгѣ находится также предложеніе, впослѣдствіи извѣстное подъ именемъ *теоремы Птоломея*, что произведеніе

саріономъ, умершимъ въ 1472 г. Разсказываютъ, что Бессаріонъ рукопись эту цѣнилъ болѣе цѣлой провинціи; изъ этого можно заключить какое значеніе придавали сочиненію Птоломея въ эпоху возрожденія наукъ въ Европѣ. Въ настоящее время рукопись эта утеряна. Полагаютъ, что рукопись эта заключала не „Альмагестъ", а только комментаріи Теона на это сочиненіе. Впослѣдствіи было много другихъ изданій „Альмагеста". Однимъ изъ лучшихъ изданій считаютъ переводъ на французскій, съ греческимъ текстомъ, изданный Halma, въ Парижѣ, въ 1813 и 1816 годахъ, въ двухъ томахъ.

діагоналей, вписаннаго въ кругъ, четыреугольника равно суммѣ произведеній его противоположныхъ сторонъ. Въ этой же части показано устройство *таблицъ хордъ*, при чемъ Птоломей поступаетъ такимъ образомъ: съ помощію нѣкоторыхъ предложеній относительно четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, между которыми находится и теорема Птоломея, и зная стороны, вписанныхъ въ кругъ—треугольника, четыреугольника, пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника, онъ вычисляетъ стороны всѣхъ прочихъ многоугольниковъ, въ 120-хъ доляхъ діаметра, при чемъ окружность дѣлитъ на 360 частей. Такимъ путемъ Птоломей строитъ таблицы хордъ для дугъ отъ 0° до 180°, отъ 30 до 30 минутъ.

Это суть *первыя* тригонометрическія таблицы. Устройство такихъ таблицъ было необходимо, такъ какъ безъ нихъ невозможно произвести ни одного астрономическаго вычисленія, которыя необходимы въ практической Астрономіи.

II-я книга почти вся содержитъ опредѣленіе угловъ, составленныхъ пересѣченіями эклиптики съ меридіаномъ, съ горизонтомъ и съ вертикальнымъ кругомъ.

III-я книга трактуетъ о продолжительности года, на основаніи данныхъ, найденныхъ Гиппархомъ; въ этой же книгѣ изложена теорія эксцентрикъ и эпициклъ.

IV-я и V-я книги посвящены движеніямъ луны.

VI-я книга разсматриваетъ параллаксы солнца и луны, а также показанъ способъ вычислять затмѣнія.

VII-я книга посвящена *звѣздамъ*; въ этой книгѣ помѣщенъ каталогъ неподвижныхъ звѣздъ, при чемъ даны ихъ положенія, въ видѣ долготы и широты.

VIII-я книга продолженіе звѣзднаго каталога и описаніе Млечнаго пути. Въ этой книгѣ показано устройство небеснаго глобуса.

IX, X, XI, XII и XIII-я книги трактуютъ о планетахъ, ихъ орбитахъ, величинѣ, періодическомъ ихъ возвращеніи, ихъ эксцентрикахъ и эпициклахъ.

Изъ другихъ сочиненій Птоломея нѣкоторыя пользуются такою же извѣстностью, какъ и его „Альмагестъ". Въ числѣ такихъ сочиненій упомянемъ его „Трактатъ по Географіи" (Γεωγραφικὴ ὑφήγησις), въ восьми книгахъ; сочиненіе это состоитъ изъ простаго перечета болѣе 2500 мѣстъ на земномъ шарѣ, при чемъ даны широты и долготы этихъ мѣстъ. До XVI вѣка сочиненіе это служило путеводителемъ всѣмъ путешественникамъ *). Кромѣ поименованныхъ двухъ сочиненій Птоломея упомянемъ еще слѣдующія:

*) „Географія" Птоломея впервые была издана въ Римѣ въ 1462 г. на латинскомъ языкѣ. Самымъ лучшимъ изданіемъ считаютъ изданіе Монтануса, съ картами Меркатора. Оно состоитъ изъ латинскаго и греческаго текстовъ и было напечатано въ 1605 г., въ Амстердамѣ.

„De Planispherio“, дошедшее до насъ въ переводѣ на арабскiй языкъ; содержание этого сочиненія—проложеніе на плоскость всѣхъ сѣченій шара плоскостью.

„De Analemmate“ также дошло до насъ только въ переводѣ на арабскій языкъ; содержание его составляетъ также проложеніе шара на плоскость. Терминъ *аналемма* почти тоже что *лемма;* аналемма относительно графическаго построенія тоже, что лемма относительно геометрическаго предложенія. Въ этомъ сочиненіи показанъ способъ *стереографической проэкціи* и ея примѣненіе. Изъ этого мы можемъ заключить, что Птоломей одинъ изъ первыхъ положилъ основаніе въ Геометріи *методу проэкцій*, который онъ примѣнилъ къ устройству географическихъ картъ. Сочиненіе „Аналеммы“ по мнѣнію Деламбра принадлежитъ не Птоломею, а Гиппарху.

Птоломею приписываютъ также сочиненіе „О трехъ измѣреніяхъ тѣлъ“, въ которомъ онъ первый упоминаетъ о трехъ прямоугольныхъ осяхъ, къ которымъ новѣйшіе геометры относятъ положеніе точки въ пространствѣ— *объ осяхъ координатъ*. Кромѣ упомянутыхъ нами сочиненій Птоломей написалъ еще нѣсколько другихъ, изъ нихъ нѣкоторыя относятся къ „Альмагесту“, въ томъ числѣ „О восхожденіи и захожденіи свѣтилъ“ и „Предсказанія“. Другія же относятся скорѣе къ астрологіи, какъ напр. „*Тетрабибліонъ*“ (Τετράβιβλος συντάξις) или „*Четырехкнижіе*“ *) и маленькій сборникъ, состоящій изъ ста афоризмовъ, подъ заглавіемъ „Centiloquium“ или „Κάρπος“. Птоломей написалъ также „Начала музыки“ и „Оптику“, въ которой рѣшена чисто геометрическая задача, занимавшая многихъ первоклассныхъ геометровъ, именно: найти на сферическомъ зеркалѣ положеніе изображенія, для даннаго положенія глаза наблюдателя и свѣтящейся точки. Кромѣ того Птоломей составилъ хронологическую таблицу подъ заглавіемъ „Канонъ царствованій“ (Κανὼν βασιλέων), въ которой перечислены всѣ ассирійскіе, мидійскіе, персидскіе, греческіе и римскіе цари, начиная отъ Набонассара, жившаго за 746 до Р. Х., до Антонина Пія; сочиненіе это имѣетъ важное значеніе для историковъ. По словамъ Паппуса и Евтокія Птоломей написалъ сочиненія по Механикѣ; а Проклъ упоминаетъ сочиненіе Птоломея „à minoribus quàm duo recti productas coincidere“; въ этомъ сочиненіи Птоломей стремился доказать основы „Началъ“ Евклида и защитить его отъ упрековъ, дѣлаемыхъ ему за принятіе этихъ основъ. Въ особенности подробно была разобрана одиннадцатая аксіома—извѣстный постулатъ Евклида. Нѣ-

*) *Порфирій*, ученикъ Плотина, жившій въ срединѣ III в., написалъ введеніе къ „Четырехкнижію“ Птоломея. Кромѣ того Порфирій написалъ „Очерки Ариѳметики, „О мистическихъ свойствахъ чиселъ“, эти сочиненія до насъ не дошли. Кромѣ этихъ сочиненій онъ написалъ много другихъ.

которые отрывки изъ этого сочиненія сохранилъ намъ Проклъ въ своихъ комментаріяхъ на первую книгу „Началъ" Евклида.

„Алмагестъ" Птоломея комментировали многие ученые, изъ древнихъ— Теонъ и Паппусъ, а изъ новѣйшихъ ученыхъ Герардъ Кремонскій и Регіомонтанусъ.

Гипсиклъ преподавалъ Астрономію въ Александрійской школѣ. Время когда онъ жилъ въ точности неизвѣстно, но болѣе вѣроятія заслуживаетъ мнѣніе, по которому онъ жилъ около 180 г. по Р. Х. Гипсиклъ авторъ астрономическаго сочиненія „О прямыхъ восхожденіяхъ звѣздъ въ зодіакѣ". Нѣкоторые приписываютъ ему также XIV и XV книги „Началъ" Евклида, но такое мнѣніе едва-ли заслуживаетъ довѣрія

Серенусъ, родомъ съ острова Лесбоса, написалъ двѣ книги „О сѣченіяхъ цилиндра и конуса" *); онъ стремился показать, вопреки распространенному мнѣнію, что эллипсъ, полученный отъ сѣченія конуса, ничѣмъ не отличается отъ эллипса, полученнаго отъ пересѣченія цилиндра. Кромѣ того, онъ произвелъ интересныя изслѣдованія надъ сѣченіями конуса, проходящими чрезъ его вершину. Время въ которое жилъ Серенусъ точно неизвѣстно, полагаютъ во II столѣтіи послѣ Р. Х.

Филонъ изъ Гадары. Время, когда онъ жилъ въ точности неизвѣстно, нѣкоторые полагаютъ, что онъ жилъ около I в. по Р. Х. По словамъ Евтокія, въ его комментаріяхъ на сочиненіе Архимеда „Объ измѣреніи круга", Филонъ довелъ до десятитысячныхъ приближенное выраженіе отношенія окружности къ діаметру, данное Архимедомъ.

Пор (Πόρος), или какъ его называетъ Монтукла *Сгоръ* (Sporus), ученикъ Филона, извѣстенъ рѣшеніемъ задачи „о двухъ средне-пропорціональныхъ". Рѣшеніе это сохранилъ намъ Евтокій; оно почти не отличается отъ рѣшенія, предложеннаго Паппусомъ. Евтокій въ своихъ комментаріяхъ на сочиненіе Архимеда „Объ измѣреніи круга" говоритъ, что Поръ написалъ сочиненіе „Κηρία". Въ другомъ мѣстѣ того же комментарія Евтокій сочиненіе это приписываетъ Аристотелю.

Зенодоръ жилъ по предположенію Кантора, во II в. по Р. Х. Онъ написалъ сочиненіе о изометрахъ и изопериметрахъ, подъ заглавіемъ „Περὶ ἰσομέτρων σχημάτων". Теонъ въ своихъ комментаріяхъ на „Альмагестъ" Птоломея приводитъ отрывки изъ этого сочиненія. Въ своемъ сочиненіи Зенодоръ доказываетъ, что изъ всѣхъ изопериметрическихъ фигуръ, наибольшая та, которая имѣетъ наибольшее число сторонъ и угловъ. Изъ этого слѣдуетъ, что кругъ есть наибольшая изъ всѣхъ такихъ фигуръ. Туже теорему

*) Сочиненіе Серенуса было издано Галлеемъ при „Коническихъ Сѣченіяхъ" Аполлонія.

Зенодоръ доказываетъ для шара и соотвѣтствующихъ ему тѣлъ. Далѣе онъ доказываетъ, что изъ всѣхъ изопериметрическихъ фигуръ наибольшая та, которой всѣ стороны равны между собою.

Отрывки изъ сочиненія Зенодора изданы Гультшемъ подъ заглавіемъ: „Zenodori commentarius de figuris isometris cum Pappi libro V collatus" и помѣщены въ III-мъ томѣ его изданія „Математическихъ Коллекцій" Паппуса.

Въ этомъ же томѣ помѣщено другое сочиненіе о изопериметрахъ, написанное неизвѣстнымъ авторомъ и неизвѣстно когда. Заглавіе этого сочиненія: „Anonymi commentarius de figuris planis isoperimetris. Accedit fragmentum de figuris solidis aequalem superficiem habentibus"

Діофантъ принадлежитъ къ числу самыхъ видныхъ представителей *второй* Александрійской школы; хотя по Геометріи онъ ничего не написалъ, но мы считаемъ необходимымъ вкратцѣ познакомится съ содержаніемъ его сочиненій, указавъ предварительно на состояніе, въ которомъ находилась до Діофанта та часть математики, которая извѣстна нынѣ подъ именемъ *Алгебры* и творцемъ которой многіе считаютъ Діофанта, называя его *отцемъ Алгебры*. Мы сначала разсмотримъ, что было сдѣлано по этому предмету до IV в., т. е. до Діофанта, а потомъ уже коснемся содержанія его сочиненій и укажемъ на ихъ характеристическія особенности.

Такое отступленіе для насъ важно сдѣлать еще въ томъ отношеніи, что когда мы будемъ разбирать развитіе Геометріи въ XVI столѣтіи, то намъ прійдется коснуться чисто алгебраическихъ вопросовъ, какъ напр рѣшенія уравненій 3-й и 4-й степеней, вычисленія корней уравненій и т. п. Дальнѣйшее развитіе Геометріи такъ тѣсно связано съ вопросами подобнаго рода, что разсмотрѣніе ихъ для насъ необходимо.

Въ исторіи развитія Алгебры извѣстный знатокъ математической литературы древнихъ Нессельманъ *), различаетъ три существенно-отличные другъ отъ друга періода:

1) *Алгебра риторическая*—это первая и самая низкая ступень, когда всѣ дѣйствія и всѣ величины выражаются словами, въ этотъ періодъ никакихъ символовъ не существуетъ. Между древними математиками слѣдовавшими по этому пути можно указать на *Тимарида*, *Ямвлиха*, а также на арабскихъ и персидскихъ математиковъ. Къ числу послѣдователей этого періода можно отнести первыхъ италіанскихъ математиковъ и ихъ ученика Региомонтануса.

Древніе греческіе математики еще во время Платона прилагали геометрическій анализъ къ вычисленіямъ—это собственно и нужно признать за *начало* Алгебры. Приложить подобный анализъ къ числамъ для древ-

*) Nesselmann Die Algebra der Griechen. 1842.

нихъ геометровъ было дѣломъ нелегкимъ, они не могли, для нихъ было слишкомъ труднымъ слѣдовать пути, по которому они шли въ Геометріи, гдѣ они разсматривали извѣстную фигуру, напр. треугольникъ, не обращая вниманія на всѣ тѣ различныя значенія и случаи гдѣ мы можемъ этой фигурѣ приурочивать то тѣ, то другія значенія. Въ Геометріи они съумѣли производить свои разсужденія надъ вполнѣ абстрактными фигурами, лишенными всякихъ постороннихъ свойствъ и не ограниченныхъ различными условіями. Совершенно другое представляли числа: здѣсь они не могли разсматривать совершенно абстрактныя отвлеченныя численныя представленія, понятіе о числѣ сопровождалось всегда неизбѣжными понятіями о количествѣ и родѣ единицъ. Буквы алфавита не могли также служить имъ для обобщеній, потому что съ представленіемъ буквы соединялось всегда понятіе о числѣ, такъ какъ буквы греческаго алфавита играли роль нашихъ цифръ *). Справедливость подобнаго предположенія можно видѣть еще въ томъ, что единственная буква греческаго алфавита ς, которая не служила обозначеніемъ числа, была принята греческими математиками для обозначенія неизвѣстной величины. Кто первый придалъ ей такое значеніе — неизвѣстно, такъ какъ по этому предмету нѣтъ никакихъ положительныхъ указаній. На сколько намъ извѣстно *Тимаридъ*, одинъ изъ учениковъ Пиѳагора **), первый сталъ отличать неизвѣстныя величины отъ извѣстныхъ. Къ сожалѣнію сочиненія Тимарида до насъ не дошли, все что намъ извѣстно о немъ, мы знаемъ изъ комментарій Ямвлиха на „Ариѳметику" Никомаха. Онъ говоритъ, что Тимариду принадлежитъ методъ, названный Ямвлихомъ *эпантема* (ἐπάνθημα) ***), при помощи этого пріема можно

*) Цифры греки обозначали рядомъ буквъ греческаго алфавита: α, β, γ, δ, ...; которыя соотвѣтствовали ряду 1, 2, 3, 4, ...

**) Нессельманъ считаетъ Тимарида современникомъ Ямвлиха, но мнѣніе свое онъ ни на чемъ не основываетъ.

***) Пріемъ, предложенный Тимаридомъ и названный Ямвлихомъ *эпантема* (ἐπάνθημα) или *цвѣтокъ* (Теннеліусъ перевелъ этотъ терминъ florida sententia) состоитъ по его словамъ въ слѣдующемъ: „если извѣстныя и неизвѣстныя величины, вмѣстѣ взятыя, равны данной, и одна изъ нихъ съ каждой изъ остальныхъ составляетъ суммы, то сумма всѣхъ этихъ паръ по вычитаніи первоначальной суммы, равна неизвѣстному числу, если дано три величины; равна удвоенной неизвѣстной если ихъ четыре, утроенной неизвѣстной если ихъ пять, учетверенной неизвѣстной если ихъ шесть и т. д.". Въ переводѣ на нынѣшній алгебраическій языкъ эпантема Тимарида заключается въ слѣдующемъ правилѣ: если извѣстна S сумма n величинъ $x+y_1+y_2+y_3+\dots+y_{n-1}$ и также извѣстны $x+y_1=s_1$, $x+y_2=s_2$, $x+y_3=s_3$, ..., $x+y_{n-1}=s_{n-1}$, то если изъ суммы всѣхъ этихъ суммъ вычтемъ сумму S, то неизвѣстная величина опредѣлится, т. е.

$$s_1+s_2+s_3+\dots+s_{n-1}-S=(n-2)x.$$

было найти при посредствѣ извѣстныхъ величинъ неизвѣстныя. Нѣкоторые видятъ въ этомъ начало алгебраическихъ уравненій. Эпантема Тимарида начинается слѣдующими словами: „если извѣстныя и неизвѣстныя величины равны данному числу". Тимаридъ единицу называлъ *конечнымъ* числомъ (περαίνουσα ποσότης), а простыя числа *линейными* или *прямолинейными*, такъ какъ они не могутъ выражать площадь. Въ комментаріи Ямвлиха мы встрѣчаемъ рѣшеніе двухъ вопросовъ, которые приводятся къ тремъ уравненіямъ первой степени съ четырьмя неизвѣстными. При рѣшеніи этихъ вопросовъ дѣйствія всѣ производятся словами - риторически.

2) *Алгебра синкопическая*—сокращенныхъ словъ—это вторая ступень въ развитіи Алгебры, въ этотъ періодъ начинаютъ сокращать слова и появляются нѣкоторые знаки. Къ послѣдователямъ этого періода принадлежитъ Діофантъ; такому направленію слѣдуютъ до половины XVII столѣтія, хотя уже прежде Віетъ полагаетъ первыя основы третьей ступени въ развитіи Алгебры, именно:

3) *Алгебръ символической*, въ которой всѣ дѣйствія и обозначенія производятся при помощи однихъ только символовъ, которые совершенно замѣняютъ словесныя толкованія и риторическія представленія. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что еще задолго до XVII столѣтія символическій пріемъ достигъ уже довольно высокой степени развитія въ Алгебрѣ индусскихъ математиковъ; этого вопроса мы коснемся послѣ.

Перейдемъ теперь къ *Діофанту*. Время когда жилъ Діофантъ намъ въ точности неизвѣстно, по этому поводу существуетъ между учеными разногласіе, а съ достовѣрностью можно сказать, что Діофантъ жилъ въ концѣ IV в. не задолго до Теона. Ни Проклъ, ни Паппусъ, не упоминаютъ ни его имени, ни его сочиненій. Болѣе вѣроятія заслуживаетъ указаніе Абульфараги *), который говоритъ, что Діофантъ жилъ въ царствованіе Юліана Отступника (361—363 гг.) Кромѣ того есть указанія на Діофанта въ 1-й книгѣ комментарій Теона и въ сочиненіи Іерусалимскаго патріарха Іоанна „Жизнь Іоанна Дамаскина". Въ своихъ сочиненіяхъ Діофантъ не упоминаетъ именъ математиковъ, кромѣ Гипсикла; къ сожалѣнію когда жилъ Гипсиклъ намъ также неизвѣстно съ достовѣрностью, мы отнесли его ко II в. по Р. Х. Нѣкоторые ученые ссылаются еще на „Лексиконъ" Свиды, въ которомъ сказано, что Гипатія написала комментаріи къ астрономиче-

---

Давая n значенія 3, 4, 5, 6, ... легко повѣрить правило данное Тимаридомъ. Изъ сказаннаго видно, что эпантема есть способъ для рѣшенія уравненій 1-й степени.

*) *Абульфарагъ* (Abulfaraj) крещеный еврей, родомъ изъ Арменіи, жилъ отъ 1226 г. по 1286 г. Онъ авторъ сочиненія „Chronicon Syriacum", содержаніе котораго всеобщая исторія. Кромѣ этого сочиненія Абульфарагъ оставилъ автобіографію.

скимъ таблицамъ Діофанта; мы ничего не знаемъ о подобныхъ таблицахъ, и весьма вѣроятно, что такихъ таблицъ никогда не было, такъ какъ ни одинъ писатель не упоминаетъ о нихъ. Филологи даже находятъ, что это мѣсто въ „Лексиконѣ" Свиды вѣроятно вставлено послѣ. Изъ всего выше сказаннаго можно отнести Діофанта къ концу IV в. и положить, что онъ жилъ около 365 г. Жизнь его намъ также неизвѣстна, мы знаемъ только, что онъ принадлежалъ къ числу ученыхъ александрійской школы и жилъ въ Александріи. Мы не знаемъ навѣрное даже какъ было имя Діофанта—Діофантосъ (Διόφαντος) или же Діофантесъ (Διοφάντης), болѣе вѣроятія заслуживаетъ первое, такъ какъ намъ извѣстны изъ исторіи нѣкоторыя лица, носившія имя Діофантосъ. Въ „Anthologia Graeca" находится эпиграмма, приписываемая Метродору, жившему неизвѣстно когда, въ которой сказано, что „Діофантъ провелъ шестую часть своей жизни въ дѣтствѣ, двѣнадцатую—въ юности; послѣ седмой части своей жизни, проведенной въ бездѣтномъ супружествѣ, и еще пяти лѣтъ у него родился сынъ, который умеръ, достигнувши половины числа лѣтъ отца, отецъ же жилъ послѣ него только четыре года" *). Рѣшивъ эту задачу находимъ, что Діофантъ умеръ 84 лѣтъ. Вотъ и все извѣстное о жизни Діофанта.

---

*) Предлагать задачи въ видѣ эпиграммъ форма часто встрѣчаемая у древнихъ. Въ „Anthologia Graeca" находится цѣлое собраніе подобныхъ задачъ. Задачи подобнаго рода были собраны въ сборникѣ Константиномъ Кефаласомъ (живш. въ X в.) и Максимомъ Планудомъ (живш въ XIV в.) Вышеприведенная эпиграмма, въ которой требуется найти число лѣтъ Діофанта, слѣдующая:

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ἇ μέγα θαῦμα,
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
Δωδεκάτη δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν.
Τῇ δ' ἄρ ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
Ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἴ αἴ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρός,
Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
Τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Эпиграмма эта сводится на рѣшеніе уравненія:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

откуда

$$x = 84.$$

Въ своемъ изданіи сочиненій Діофанта Баше помѣстилъ многія изъ такихъ эпиграммъ. Укажемъ на нѣкоторыя изъ нихъ, чтобы дать понятіе о родѣ задачъ, предлагаемыхъ въ этой формѣ:

Діофантъ авторъ трехъ сочиненій: „Ариѳметики", „О полигональныхъ числахъ" и „Поризмы". Третье изъ этихъ сочиненій до насъ не дошло. Самое замѣчательное изъ этихъ сочиненій безъ сомнѣнія первое; благодаря „Ариѳметикамъ" Діофанта мы можемъ себѣ представить состояніе Алгебры у древнихъ Грековъ. Мы разсмотримъ всѣ эти три сочиненія Діофанта, каждое отдѣльно. Начнемъ съ перваго.

„Ариѳметики" (Ἀριθμητικά) *) дошли до насъ въ шести книгахъ. Обыкновенно полагаютъ, что всѣхъ книгъ было тринадцать, но такое мнѣніе едва-ли справедливо, гораздо болѣе вѣроятно предположеніе, что утерянная часть заключалась между первой и второй книгами, гдѣ должно было находиться рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени и опредѣленныхъ уравненій 2-й степени, именно этихъ отдѣловъ недостаетъ въ сочиненіи Діофанта.

Діофантъ одинъ изъ первыхъ между математиками понималъ Алгебру и Ариѳметику такъ какъ ихъ понимаютъ новѣйшіе математики; онъ одинъ изъ первыхъ сталъ производить вычисленія безъ посредства геометрическихъ представленій, при помощи однихъ только правилъ четырехъ первыхъ дѣйствій, возвышенія въ степень и извлеченія корней. Вычисленія и дѣйствія надъ величинами, равно какъ и самыя величины Діофантъ обозначаетъ словами, но какъ мы выше замѣтили, обозначенія эти являются у него большею частью уже въ сокращенной формѣ.

Въ сочиненіяхъ Діофанта мы встрѣчаемъ, главнымъ образомъ, три рода знаковъ, во первыхъ *для обозначенія* неизвѣстнаго и его степеней, во вторыхъ *для обозначенія* абсолютнаго члена уравненія и въ третьихъ *для* обозначенія дѣйствія вычитанія въ уравненіяхъ. Неизвѣстное Діофантъ обозначаетъ чрезъ букву ς со знакомъ, ς′ или ς°, въ самомъ текстѣ онъ называетъ ее *ὁ ἀριθμός—число*, если коэфиціентъ больше единицы, то значокъ удвоивается ςς. Квадратъ неизвѣстной величины носитъ названіе δύναμις, выраженіе это употреблялъ еще Евклидъ для обозначенія квадрата

Скажи мнѣ знаменитый Пиѳагоръ, сколько учениковъ посѣщаютъ *твою школу и слушаютъ твои бесѣды?* Вотъ сколько, *отвѣтилъ* философъ: *половина изучаетъ математику*, четверть музыку, *седьмая часть пребываетъ въ молчаніи*, и кромѣ того есть еще три женщины.

Найти три числа, изъ которыхъ первое прибавленное къ третьей части третьяго, равно второму, а второе, прибавленное къ третьей части перваго равно третьему, третье же больше перваго на десять?

Бассейнъ получаетъ воду изъ четырехъ трубъ, первая труба наполняетъ его въ одинъ день, вторая въ два, третья въ три, а четвертая въ четыре. Требуется найти во сколько времени наполнится бассейнъ если всѣ четыре трубы открыты одновременно?

*) Сочиненіе это Діофантъ посвящаетъ какому-то Діонисію. Въ предисловіи къ своему сочиненію онъ убѣждаетъ Діонисія серьезно заняться изученіемъ этого сочиненія.

числа; при вычисленіи квадратъ неизвѣстнаго сокращенно выражается чрезъ δῦ, кубъ неизвѣстнаго носитъ названіе κύβος или сокращенно κῦ. Названія высшихъ степеней составляются изъ словъ δύναμις и κύβος, смотря потому, какъ составлена высшая степень изъ произведенія квадратовъ и кубовъ. На основаніи такого обозначенія четвертая степень носитъ названіе δυναμοδύναμις, пятая —δυναμόκυβος, шестая — κυβόκυβος; знаки соотвѣтствующія этимъ степенямъ слѣдующія: δδῦ, δκῦ, κκῦ. Далѣе Діофантъ не идетъ Этими знаками Діофантъ обозначаетъ квадратъ, кубъ, биквадратъ и т. д величины, коей корень неизвѣстная ς′. Само слово δύναμις употребляется только при обозначеніи квадрата неизвѣстной величины, во всѣхъ же другихъ случаяхъ квадратъ носитъ названіе τετράγωνος. Но слова κύβος и другихъ высшихъ степеней обозначаютъ кубы и т. д. и другихъ величинъ, кромѣ неизвѣстныхъ. Знаки δῦ, κῦ вполнѣ соотвѣтствуютъ нашимъ теперешнимъ обозначеніямъ x^2, x^3, но они включаютъ въ себѣ не только величину корня, но и саму степень. Подобное обозначеніе представляетъ не мало неудобствъ, такъ какъ видимой связи между степенями и корнями нѣтъ. Замѣтимъ, впрочемъ, что подобный недостатокъ существовалъ до самаго Віета, такъ какъ математики неизвѣстную величину обозначали *R (radix* или *res)*, ея квадратъ *Z (census)*, ея кубъ *C* и т. д. Подобное обозначеніе сохранили, послѣ Віета, также Ферма и Ваше, съ тою только разницею, что вмѣсто *R* они писали *N (numerus)*, а вмѣсто *Z* букву *Q (quadratum)*. Такъ напр. Ваше писалъ уравненіе

$$1Q + 5N \textit{ sint aequales } 24$$

которое въ настоящее время пишутъ

$$x^2 + 5x = 24$$

Віетъ первый устранилъ этотъ недостатокъ тѣмъ, что различныя степени *A* обозначалъ рядомъ *Aq.*, *Ac.*, *Aqq.* соотвѣтствующимъ значеніямъ *Aquadr.*, *Acub.* и т. д. Подобное обозначеніе кромѣ своей систематичности, представляло еще ту выгоду, что при его помощи можно было въ уравненія вводить нѣсколько неизвѣстныхъ, чего при обозначеніи Діофанта и другихъ старыхъ методовъ совершенно невозможно.

Коэфиценты Діофантъ ставитъ за неизвѣстнымъ, рядомъ съ нимъ, при чемъ пишетъ и коэфиціентъ единицу, такъ напр. онъ пишетъ: ς′ᾱ, ςς′δ̄, δῦᾱ, δῦγ̄, κῦβ̄. Для дѣйствія умноженія у Діофанта нѣтъ символа, такъ какъ знаки у него существуютъ только для главной величины, а коэфиціенты всегда числа. Умноженіе является всегда уже выполненнымъ, а также дѣленіе, если только оно выполнимо, въ противномъ случаѣ оно является въ видѣ дроби. Сложеніе Діофантъ обозначаетъ тѣмъ, что числа

ставитъ рядомъ, такъ напр. δῦαςς̄δ соотвѣтствуетъ выраженію x^2+4x. Вслѣдствіи такого обозначенія, часть формулы, не содержащая неизвѣстной величины, является въ видѣ абсолютнаго числа, такъ какъ въ противномъ случаѣ величины эти сливались бы съ коэфиціентами предшествующихъ имъ величинъ. На основаніи этого данное число Діофантъ называетъ *μονάδες—единицы*, въ своихъ формулахъ онъ обозначаетъ его знакомъ μ̊, къ этому числу, подобно какъ къ неизвѣстному, приставляются коэфиціенты соотвѣтствующіе ему. Для выраженія дѣйствія вычитанія Діофантъ употребляетъ слово λεῖψις—*недостатокъ*. Вмѣсто употребляемаго нами символа minus Діофантъ употребляетъ слово λεῖψει или же символъ ⋔, соотвѣтствующій обороченной буквѣ ψ. Отрицательныя члены онъ ставитъ всегда позади положительныхъ. Однихъ отрицательныхъ членовъ безъ положительныхъ у Діофанта нигдѣ не встрѣчается, такъ какъ понятія объ отрицательныхъ числахъ у него несуществуетъ. Приведемъ для примѣра нѣсколько уравненій въ формѣ какъ ихъ писалъ Діофантъ, а затѣмъ напишемъ эти уравненія въ той формѣ какъ ихъ пишутъ нынѣ:

δῦα. μ̊ ιβ λεῖψει ςς̄ ζ

δδῦθ̄. δῦσ̄ μ̊ ᾱ ⋔ κ̊ δ̄ ςς̄ ιβ̄

κ̊ β δ̊ α ἴση ςς δ̄ ⋔ μ̊ ιβ

уравненіямъ этимъ соотвѣтствуютъ уравненія:

$$x^3+12-7x=0$$

$$9x^4+6x^3+1-4x^3-12x=0$$

$$2x^3+x^2=4x-12$$

Обѣ части уравненія Діофантъ соединяетъ словами ἴσος или ἴσος ἐστὶ; подобное обозначеніе существовало у европейскихъ математиковъ до XVII в. Употребленіе алгебраическихъ символовъ, въ видѣ сокращенныхъ словъ, было вѣроятно введено если не Діофантомъ, то не задолго до него, такъ какъ въ его сочиненіяхъ на ряду съ символами постоянно встрѣчаются и слова, такъ напримѣръ въ одномъ и томъ же предложеніе встрѣчаются знаки ς̄, ςς̄, и сейчасъ же на ряду съ ними слова ἀριθμός, ἀριθμοί и т. п. Подобная смѣсь словъ со знаками показываетъ, что символы для Діофанта были явленіемъ новымъ, а потому не были имъ вполнѣ усвоены *).

---

*) Символическое обозначеніе дѣйствій надъ величинами находится также въ одномъ древнемъ греческомъ папирусѣ, о которомъ упоминаетъ Бругшъ (Brugsch); къ сожалѣнію неизвѣстно время и мѣсто гдѣ написанъ этотъ папирусъ. Дѣйствие сложенія обозначено въ немъ знакомъ /, а дѣйствіе вычитанія—знакомъ ך.

Діофантъ первый съумѣвшій привесть произведенія вида $(x+1)(x+2)$ къ виду x^2+3x+2; для произведеній вида $(x-1)(x-2)$, онъ даетъ слѣдующее правило: „произведеніе двухъ отрицательныхъ чиселъ (λεῖψις) равно всегда положительному числу (ὕπαρξις)“; но подъ отрицательными числами Діофантъ разумѣетъ всегда разность, а не то, что въ настоящее время понимають подъ этимъ словомъ. Равенства вида $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ у Діофанта являются просто какъ слѣдствія разъ принятыхъ правилъ; мы знаемъ, что Евклидъ подобнымъ выраженіемъ давалъ геометрическое значеніе.

При производствѣ сложныхъ вычисленій Діофантъ высказываетъ необыкновенное умѣніе, это заслуживаетъ вниманія, такъ какъ мы выше видѣли, что символическія обозначенія у Діофанта являются въ самомъ первобытномъ видѣ.

Сочиненіе свое Діофантъ начинаетъ съ опредѣленія *чиселъ*, которыя онъ называетъ слагаемыми, состоящими изъ извѣстнаго количества единицъ (συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός), рядъ чиселъ можетъ быть продолженъ до безконечности. Послѣ этого онъ переходитъ къ квадрату числа, кубу, квадрату-квадрата, квадрату-куба, кубу-куба чиселъ, которыя онъ получаетъ умножая число само на себя одинъ разъ (вторая степень), два раза (третья степень), три раза (четвертая степень), четыре раза (пятая степень), пять разъ (шестая степень). Далѣе Діофантъ показываетъ какъ рѣшать уравненія первой и второй степеней, *биквадратныя уравненія*, но какъ онъ рѣшаетъ эти послѣднія неизвѣстно. Рѣшеніе опредѣленныхъ уравненій второй степени также до насъ не дошло. Діофантъ первый между математиками рѣшившій уравненія второй степени, хотя нѣкоторыя предложенія „Началъ“ и „Данныхъ“ Евклида сводятся къ геометрическому построенію уравненій второй степени, но о алгебраическомъ рѣшеніи нѣтъ и помину. Это заслуживаетъ еще особеннаго вниманія потому, что способы данные Діофантомъ ничѣмъ не отличаются отъ принятыхъ нынѣ; рѣшенія свои Діофантъ нигдѣ не основываетъ на геометрическихъ построеніяхъ, между тѣмъ извѣстно, что до самаго XVIII столѣтія алгебраическія рѣшенія безъ геометрическихъ построеній считались неполными. Въ одинадцатомъ столѣтіи одинъ изъ арабскихъ математиковъ приводитъ алгебраическія рѣшенія уравненій, способъ этотъ онъ называетъ „способомъ Діофанта“, но онъ даетъ предпочтеніе геометрическимъ построеніямъ.

Отрицательные, ирраціональные и мнимые корни уравненій Діофантъ отбрасываетъ, а также изъ двухъ положительныхъ корней уравненія второй степени онъ бралъ только одинъ. Это можетъ съ перваго разу показаться страннымъ, но необходимо припомнить, что греческіе математики совер-

менно не имѣли понятія о многозначности рѣшеній геометрическихъ вопросовъ; понятія этого они были такъ сказать—лишены, даже и въ томъ случаѣ когда двойственность рѣшенія была очевидна. Сказанное можетъ служить подтвержденіемъ того, что мы воспринимаемъ только то, понятие о чемъ заключается въ насъ самихъ. Это происходило еще и отъ того, что при рѣшеніи извѣстной геометрической задачи греки имѣли дурное обыкновеніе часто чертить только половину окружности

Еще важнѣе заслуга Діофанта, обезсмертившая его имя, это впервые созданный имъ отдѣлъ математики, извѣстный прежде подъ именемъ „analysis indeterminata", т. е неопредѣленный анализъ, состоящій въ томъ, чтобы опредѣлить въ *раціональныхъ* числахъ неизвѣстныя изъ системы уравненій, число которыхъ меньше числа неизвѣстныхъ.

Въ сочинени „Ариѳметика" рѣшено около 130 неопредѣленныхъ уравненій, въ рѣшеніи которыхъ не видно никакого метода, нѣтъ системы, сами задачи подобраны и расположены безъ всякой системы, рѣшеніе ихъ независитъ одно отъ другаго. Задачи эти принадлежатъ болѣе чѣмъ къ 50 различнымъ классамъ. Діофантъ не слѣдуетъ какимъ нибудь заранѣе установленнымъ приемамъ, въ рѣшеніи каждой задачи онъ слѣдуетъ путемъ самымъ близкимъ, найскорѣе ведущимъ къ цѣли Иногда мы съ удивленіемъ замѣчаемъ, что онъ сразу перестаетъ слѣдовать избранному имъ пути въ рѣшеніи задачи, а слѣдуетъ совершенно иному, часто весьма сложному, но за то сразу ведущему къ рѣшенію, задуманнаго вопроса. Можно сказать, что Діофантъ поражаетъ насъ своимъ искусствомъ въ рѣшеніи задачъ на неопредѣленныя уравненія, но въ немъ нѣтъ ни глубины изслѣдованія, ни чисто научныхъ методовъ, пріемы его остроумны, поразительны по быстротѣ съ которой они ведутъ къ цѣли. Совершенно справедливо выразился Ганкель*), сказавъ: „Діофантъ блестящій виртуозъ въ созданномъ имъ искусствѣ, въ отдѣлѣ неопредѣленныхъ задачъ, но наука ничемъ почти не обязана этому блестящему таланту, она не заимствовала отъ него почти никакихъ методовъ, потому что онъ былъ лишенъ того спекулятивнаго направленія, которое слѣдуетъ болѣе истинному, чѣмъ вѣрному".

Мы выше уже сказали, что до насъ дошли только шесть книгъ „Ариѳметикъ" Діофанта, изъ нихъ первая содержитъ только опредѣленныя уравненія, при чемъ недостаетъ рѣшенія опредѣленныхъ уравненій 2-й степени.

Книги II, III, IV, V и VI почти исключительно содержатъ неопредѣленныя уравненія второй степени. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій 1-й

*) H. Hankel. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipz. 1874.

степени до насъ не дошло. Изъ числа задачъ подобнаго рода укажемъ на нѣкоторыя задачи II-й и III-й книгъ, именно:

Найти три числа такихъ свойствъ, что квадратъ каждаго изъ нихъ, сложенный съ суммою этихъ чиселъ, оставался бы также квадратомъ. Рѣшеніе этого вопроса приводится къ рѣшенію уравненій вида:

$$x^2+(x+y+z)=a^2$$
$$y^2+(x+y+z)=b^2$$
$$z^2+(x+y+z)=c^2$$

Подобнымъ же образомъ рѣшается задача:

$$x^2-(x+y+z)=a^2$$
$$y^2-(x+y+z)=b^2$$
$$z^2-(x+y+z)=c^2$$

А также задача:

$$(x+y+z)-x^2=a^2$$
$$(x+y+z)-y^2=b^2$$
$$(x+y+z)-z^2=c^2$$

Изъ числа задачъ IV книги укажемъ на 20, которая состоитъ въ слѣдующемъ: найти три числа, такихъ свойствъ, чтобы произведеніе двухъ изъ нихъ сложенное съ единицей было бы число квадратное. Числа, найденныя Діофантомъ, будучи переведены на нашъ алгебраическій языкъ, слѣдующія x, $x+2$, $4x+4$.

Въ V книгѣ заключается цѣлый рядъ задачъ въ видѣ эпиграммъ, написанныхъ гексаметрами; мы уже выше сказали, что подобная форма вопросовъ была въ ходу у древнихъ грековъ. Изъ такихъ задачъ укажемъ на 33-ю этой книги, она состоитъ въ слѣдующемъ. нѣкто купилъ вина двухъ сортовъ, изъ коихъ мѣра перваго стоитъ пять драхмъ, а втораго—восемь. За все количество вина онъ заплатилъ извѣстное число драхмъ, которое есть число квадратное, число это будучи прибавлено къ извѣстному данному числу (60) само дѣлается снова квадратомъ, корень квадратный изъ этого послѣдняго числа равенъ числу купленныхъ мѣръ вина. Требуется найти сколько было заплачено за одно и за другое вино?

Въ VI книгѣ разсматриваются прямоугольные треугольники съ ариѳметической точки зрѣнія, при этомъ берутся такія стороны, коихъ линейныя или квадратныя функціи могутъ быть сдѣланы полнымъ квадратомъ или полнымъ кубомъ.

Кромѣ рѣшенія вышеупомянутыхъ вопросовъ у Діофанта находится рѣшеніе одного кубическаго уравненія. Къ рѣшенію такого уравненія онъ

приходитъ при слѣдующей задачѣ. „отыскать число, коего кубъ былъ-бы на 2 болѣе другаго числа, взятаго въ квадратѣ" *). Дѣлая произвольное положеніе, что корень кубическаго числа есть $x-1$, а корень квадратнаго числа $x+1$, Діофантъ приходитъ къ кубическому уравненію, рѣшить которое не представляетъ никакихъ затрудненій. На основаніи принятыхъ положеній:

$$(x-1)^3=(x+1)^2+2$$

или

$$x^3-3x^2+3x-1=x^2+2x+3$$

Приведя уравненіе къ такому виду, Діофантъ непосредственно даетъ корень уравненія $x=4$, о двухъ другихъ корняхъ, вида $x=\pm\sqrt{-1}$, нѣтъ и помину.

Кромѣ рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій 2-й степени Діофантъ рѣшаетъ еще неопредѣленныя уравненія высшихъ степеней; это во 1) рѣшеніе уравненій, въ которыхъ неизвѣстное въ степени высшей квадрата, при чемъ требуется выразить данную функцію полнымъ квадратомъ, какъ примѣръ можетъ служить рѣшеніе уравненія вида:

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots Mx^2+Nx+P=y^2$$

во 2) такія уравненія, въ которыхъ функцію неизвѣстныхъ необходимо выразить въ степени выше второй, при чемъ Діофантъ рѣшаетъ примѣры не выше кубической степени. Вопросъ сводится къ рѣшенію уравненій вида:

$$Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+Mx^2+Nx+P=y^3$$

Въ вопросахъ перваго рода n не превышаетъ 6, а въ вопросахъ втораго рода n не превышаетъ 3.

Мы выше сказали, что Діофантъ въ своемъ сочиненіи „Ариѳметики" совершенно чуждъ геометрическихъ представленій. Какъ примѣръ этого можно привесть то, что когда онъ говоритъ о прямоугольномъ треугольникѣ, то онъ подъ этимъ разумѣетъ 3 числа a, b, c, между которыми существуетъ зависимость $a^2+b^2=c^2$; площадь $\frac{ab}{2}$ такого треугольника онъ складываетъ съ однимъ изъ катетовъ, вводитъ условіе, чтобы катетъ былъ кубъ и т. п. Линейный методъ Евклида, заключающійся въ VII книгѣ „Началъ", онъ ни разу не примѣняетъ, а всѣ дѣйствія производитъ на числахъ, съ помощью основныхъ четырехъ правилъ, которыя подробно изложены въ началѣ его сочиненія.

---

*) Задача эта (кн VI, зад. 19) дана у Діофанта въ слѣдующей формѣ: „найти прямоугольный треугольникъ, коего бы площадь сложенная съ гипотенузой дали бы число квадратное, а периметръ былъ-бы число кубическое".

Мы выше сказали, что обыкновенно предполагають, что „Ариөметики“ состояли изъ тринадцати книгъ, и что въ недостающихъ книгахъ заключались дальнѣйшія алгебраическія изслѣдованія Діофанта. Но такое предположеніе едва-ли заслуживаетъ довѣрія, такъ какъ сочиненіе Діофанта представляетъ довольно опредѣленный и законченный трудъ Если чего не достаетъ, то недостающее слѣдуетъ предполагать между первой и второй книгами, гдѣ какъ мы сказали, замѣтенъ пробѣлъ. Во всякомъ случаѣ большая часть „Ариөметикъ“ дошла до насъ, и предположеніе, что изъ тринадцати книгъ до насъ дошли только шесть, невѣрно. Что „Ариөметики“ Діофанта дошли до насъ въ довольно полномъ видѣ можно заключить изъ того, что всѣ извѣстныя рукописи этого сочиненія мало отличаются другъ отъ друга, но противъ этого Баше *) возражаетъ, что съ такою же вѣроятностью можно предположить, что всѣ извѣстныя намъ рукописи этого сочиненія суть переписки съ одного и того же древнѣйшаго списка, нынѣ утеряннаго.

Къ числу математиковъ, которые полагали, что Діофантъ въ недошедшихъ книгахъ „Ариөметикъ“ трактуетъ о совершенно новыхъ вопросахъ, принадлежалъ итальянскій математикъ XVI столѣтія Рафаель Бомбелли (Bombeli). Онъ предполагалъ, что въ утерянныхъ книгахъ заключались новые методы для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій, а также рѣшеніе уравненій 3-й и 4-й степеней. Бомбелли, занимавшійся въ теченіи всей своей жизни рѣшеніемъ уравненій 3-й и 4-й степеней, видѣлъ гдѣ только возможно осуществленіе своихъ завѣтныхъ идей.

Гораздо болѣе близко къ истинѣ предположеніе Кольбрука и Нессельмана, которые полагають, что другія два сочиненія Діофанта, именно его „Поризмы“ и „О полигональныхъ числахъ“ составляли часть „Ариөметикъ“, въ подтвержденіи чего между прочими доводами Нессельманъ указываетъ на само заглавіе сочиненія „Ариөметики“, которое во множественномъ числѣ.

---

*) *Баше* (Bachet de Meziriac) жилъ отъ 1581 по 1638 гг. Кромѣ перевода сочиненій Діофанта написалъ „Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Lyon. 1613“.

Изданіе сочиненій Діофанта представляло много затрудненій, какъ по новизнѣ содержанія, такъ и по испорченности и неточностямъ, вкравшимися въ рукописи. Всѣ эти затрудненія Баше удалось преодолѣть, не смотря на мучительную лихорадку, благодаря своей усидчивости и всестороннему ознакомленію съ изслѣдуемымъ имъ вопросомъ. Монтукла въ своей „Histoire des mathèmatiques“ (T. I, pag. 323), говоритъ: „L'historien de l'Académie Françoise nous apprend que M. Bachet y travailla durant le cours d'une fièvre quarte, et qu'il disoit lui même que, rebuté de la difficulté de ce travail, il ne l'auroit jamais achevé sans l'opiniâtreté melancolique que sa maladie lui inspiroit“.

„Ариѳметики“ изложены аналитически. Мы выше указали на недостатки этого сочиненія, но не смотря на это оно принадлежитъ къ числу замѣчательнѣйшихъ сочиненій, написанныхъ древними математиками. Пріемы, предложенные Діофантомъ вполнѣ оригинальны и самостоятельны.

Разсмотримъ теперь другія два сочиненія, написанныя Діофантомъ.

„О полигональныхъ числахъ“, предметъ этого сочиненія сходенъ съ содержаніемъ главнаго сочиненія Діофанта, но форма изложенія совершенно отлична, оно изложено синтетически. Предложенія даны и послѣ каждаго изъ нихъ слѣдуетъ доказательство. Доказательства предложеній этого сочиненія совершенно такія же какъ доказательства въ VII, VIII и IX книгахъ „Началъ“ Евклида, которыя Кассали*) (Cassali) называетъ *линейной ариѳметикой*, потому что въ нихъ пропорціи и свойства чиселъ доказываются наглядно на линіяхъ. Подобный пріемъ Діофантъ примѣняетъ только однажды въ своихъ „Ариѳметикахъ“, для того, чтобы сдѣлать очевиднымъ, что когда требуется, чтобы $x+y=1$, $x+2$ и $y+6$ были полными квадратами, то вопросъ сводится на разложеніе числа 9 на два квадратныхъ числа, изъ коихъ одно больше 2 и меньше 3. Изъ этого единственнаго примѣненія и изъ предложеній о фигурныхъ числахъ, мы видимъ, что линейныя представленія въ Геометріи еще во время Діофанта имѣли у Грековъ преимущество, какъ пріемы наглядные.

„Поризмы“ до насъ не дошли, все извѣстное объ этомъ сочиненіи мы знаемъ изъ предложеній 3, 5 и 19 V-й книги „Ариѳметикъ“. Изъ указаній въ этихъ предложеніяхъ можно заключить, что „Поризмы“ имѣли предметомъ разсмотрѣніе свойствъ чиселъ и ихъ образованіе изъ квадратовъ и т. п. Изложеніе этого сочиненія нужно полагать было синтетическое. Въ указанныхъ предложеніяхъ Діофантъ ясно указываетъ на нѣкоторыя предложенія изъ теоріи чиселъ, онъ говоритъ „ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν“. Діофанту были извѣстны многія весьма интересныя свойства чиселъ, такъ напр. въ 22 предложеніи III книги „Ариѳметикъ“ доказано, что произведеніе двухъ чиселъ, состоящихъ каждое изъ двухъ квадратовъ, можетъ быть разбито двояко снова на сумму двухъ квадратовъ, т. е. иначе, Діофанту извѣстно алгебраическое тождество:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

На основаніи того, что Діофанту были извѣстны многія предложенія теоріи чиселъ, въ родѣ приведеннаго нами выше, многіе думали, что Діофанту

*) *P. Cossali.* Origine, transporto in Italia, primi progressi in essa, dell' Algebra, Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arrichita. 2 vol. Parma. 1797 — 99 in-4.

были извѣстны многія замѣчательныя свойства чиселъ, которыя и были изложены въ его „Поризмахъ", они полагали, что сочиненіе это содержало весьма тонкія и глубокія изслѣдованія Діофанта въ теоріи чиселъ. Но такое мнѣніе не заслуживаетъ вниманія, такъ какъ хотя Діофанту были извѣстны, многія теоремы изъ теоріи чиселъ, но многія изъ нихъ не доказаны. Предполагать, что въ „Поризмахъ" заключались изслѣдованія, которыя впослѣдствіи были предметомъ ученыхъ работъ: Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Якоби и другихъ математиковъ, занимавшихся теоріей чиселъ, слишкомъ смѣло и ни на чемъ положительномъ не основано.

Мы выше сказали, что первыя извѣстія о Діофантѣ находятся въ комментаріяхъ Теона *), затѣмъ въ теченіи тысячи лѣтъ имя Діофанта не встрѣчается ни въ одномъ сочиненіи, причину этого надо искать въ томъ, что сочиненія Діофанта появились въ то время, когда развитіе математики у Грековъ почти прекратилось, Діофантъ принадлежалъ къ числу послѣднихъ ученыхъ Александрійской школы. Только въ половинѣ XIV в. сочиненія Діофанта снова дѣлаются извѣстными, благодаря комментаріямъ греческаго монаха Максима Плануда, написаннымъ на первыя двѣ книги „Ариѳметикъ". Послѣ того какъ началось возрожденіе наукъ въ Европѣ на сочиненія Діофанта начинаютъ обращать вниманіе, около 1462 года Регіомонтанусъ упоминаетъ о сочиненіяхъ Діофанта, въ своей вступительной лекціи въ Падуанскомъ университетѣ, но содержанія ихъ онъ не касается. Черезъ сто лѣтъ Іоахимъ Камераріусъ упоминаетъ **), что сочиненія Діофанта находятся въ Ватиканской библіотекѣ, но онъ совершенно невѣрно говоритъ, что содержаніе ихъ Логистика. Также имя Діофанта упоминаетъ Яковъ Пелетаріусъ въ своей Ариѳметикѣ ***), написанной въ 1571. Знаменитые

*) Въ недавнее время Таннери высказалъ мнѣніе, что Діофантъ жилъ во второй половинѣ III в. Еще Бомбелли полагалъ, что Діофантъ современникъ Антонина Пія (138 г. по Р. Х.), но мнѣніе свое онъ ни на чемъ не основываетъ. Въ статьѣ Tannery „A quelle époque vivait Diophante?", помѣщенной въ „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. T. III, Juin 1879", разобранъ, довольно обстоятельно вопросъ, когда жилъ Діофантъ и различныя мнѣнія, существующія по этому поводу. Таннери полагаетъ, что „Ариѳметики" написаны не Діофантомъ, а что Діофантъ только собралъ въ одно цѣлое, написанное до него.

Гипсикла, о которомъ упоминаетъ Діофантъ въ своихъ сочиненіяхъ, Таннери относитъ ко II в. до Р. Х., мы же помѣстили его во II в. по Р. Х. Бретшнейдеръ также полагаетъ, что Гипсиклъ жилъ во II в. до Р. Х. Къ тому же времени онъ относитъ и Серенуса, котораго мы отнесли ко II в. по Р. Х. Въ заключеніи, замѣтимъ, что относительно времени когда жили Гипсиклъ и Серенусъ положительныхъ указаній нѣтъ.

**) De Graecis [illegible] que numerorum notis et praeterea Saracenicis seu Indicis ect. Studio Joachimi Camerarii [illegible]peberg. 1556.

***) Arithmeticae practicae methodus facilis, per Gemmam Frisium ect. Huc acc. Jacobi Peletarii annotationes. Coloniae. 1571.

италіанскіе математики, какъ напр. Лука Пачіоли, Тарталія, Карданъ нигдѣ не упоминаютъ въ своихъ сочиненіяхъ имени Діофанта, изъ чего можно заключить, что они не были съ нимъ знакомы. Первый изъ италіанскихъ математиковъ, который познакомился съ сочиненіями Діофанта, былъ Рафаель Бомбелли; совмѣстно съ учителемъ математики въ Римѣ, Пацци (Pazzi), онъ задумалъ перевести сочиненія Діофанта на италіанскій языкъ. Изъ *семи* книгъ, которыя они отыскали въ Ватиканской библіотекѣ они перевели первыя пять, но переводъ ихъ не былъ напечатанъ вслѣдствіи различныхъ обстоятельствъ, впрочемъ Бомбелли всѣ задачи первыхъ четырехъ книгъ, и нѣкоторыя изъ пятой книги, „Ариѳметикъ“ помѣстилъ въ своей Алгебрѣ, изданной въ 1572 г. Къ этому же времени относится первый печатный переводъ, сдѣланный Ксиландеромъ *).

Арабы познакомились съ сочиненіями Діофанта гораздо раньше Европейцевъ, именно въ X в.; намъ извѣстенъ переводъ, сдѣланный и коммен-

---

*) Въ первый разъ сочиненія Діофанта были изданы на латинскомъ языкѣ *Ксиландеромъ* (Holzmann) подъ заглавіемъ: Diophanti Alexsandrini Rerum Arithmeticarum libri sex, quorum primi duo adjecta habent scolia Maximi (ut conjectura est) Planudis. Item liber de numerus polygonis seu multangulis. Opus incomparabile, verae arithmeticae Logisticae perfectionem continens, paucis adhuc visum. A *Guil. Xylandro* cet. Basileae. 1571 in-fol. Въ концѣ же XVI столѣтія сочиненія Діофанта были переведены на латинскій неаполитанскимъ математикомъ *Аоріа* (Josepho Auria), но переводъ этотъ не былъ напечатанъ; рукопись хранится въ библіотекѣ св. Амвросія въ Миланѣ. Затѣмъ сочиненія Діофанта были изданы на греческомъ и латинскомъ языкахъ *Баше* подъ заглавіемъ: Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numerus multangulis liber unus. Nunc primum Graece et Latine editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati. Auctore *Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco* Sebusiono. Lutetiae Parisiorum. 1621 in-fol. Это изданіе есть *первое* и *единственное* съ греческимъ текстомъ. Изданіе Баше было вновь напечатано въ 1670 г. съ примѣчаніями знаменитаго математика *Ферма*, примѣчанія котораго заключаютъ много весьма интересныхъ вещей. Къ сожалѣнію изданіе это, напечатанное подъ редакціей сына Ферма, исполнено весьма небрежно. Изданіе съ греческимъ текстомъ сочиненій Діофанта было еще прежде задумано Ксиландеромъ, но онъ умеръ прежде чѣмъ привелъ въ исполненіе свое намѣреніе. Первыя четыре книги „Ариѳметики“ были переведены Стевиномъ, а другія двѣ Жираромъ и напечатаны въ Парижѣ въ 1625 г. Первыя три книги „Ариѳметикъ“ Діофанта помѣщены также въ сочиненіи *Oughtredi*, Opusculis mathematicis Oxoniae. 1677 г. Послѣ этого сочиненія Діофанта не издавались и только въ настоящемъ столѣтіи было вновь обращено на нихъ вниманіе; вотъ эти изданія: Diophantus von Alexandrien über die Polygon-Zahlen. Übersetzt von Poselger Berlin. 1810, при этомъ сочиненіи приложены весьма цѣнныя примѣчанія. Наконецъ послѣднее изданіе, на нѣмецкомъ языкѣ, принадлежитъ *Шульцу*: Diophantus von Alexsandria arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon-Zahlen. Aus dem Griechischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von Otto Schultz. Berlin. 1822. Изданіе это исполнено весьма удачно, свой переводъ Шульцъ сопровождаетъ весьма обстоятельными комментаріями. Другихъ изданій сочиненій Діофанта мы не встрѣчали.

тированный Могамедомъ-Абулъ-Вефа, около 970 г.; этотъ переводъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и единственный извѣстный до сихъ поръ переводъ сочиненій Діофанта на арабскій языкъ.

Въ заключеніе сказаннаго о Діофантѣ прибавимъ еще слѣдующее: предметъ сочиненій Діофанта и методъ его изслѣдованій напоминаютъ направленіе математическихъ наукъ у Грековъ во время Пиѳагора и первыхъ греческихъ философовъ; направленіе и методы которыхъ напоминаютъ направленіе и методы математиковъ Востока—Индусовъ. Направленіе, которому слѣдовалъ Діофантъ вполнѣ самостоятельно и оригинально, его изслѣдованія, часто весьма глубокія, были результатомъ иныхъ воззрѣній на величины и соотношенія между ними. Но новое направленія и новыя воззрѣнія были лишены того эстетическаго взгляда на пространственныя формы и того строго-систематическаго метода изслѣдованій, который, какъ мы видѣли, принадлежалъ ученымъ первой Александрійской школы—Евклиду, Архимеду и Аполлонію, сочиненія которыхъ до сихъ поръ считаются образцами—классическими, какъ по формѣ изложенія, такъ и по содержанію

Мы выше сказали, что съ Діофантомъ математическія науки у грековъ начинаютъ слѣдовать новому направленію, математики начинаютъ придавать менѣе значенія изученію Геометріи и всѣ ихъ усилія направлены къ другой отрасли—къ Алгебрѣ. Подобное измѣненіе направленія повторялось нѣсколько разъ въ исторіи развитія математическихъ наукъ. Первоначально Пиѳагоръ одинъ изъ первыхъ изслѣдуетъ свойства чиселъ. Геометрическую теорему, которая носитъ его имя онъ прилагаетъ къ числамъ, т. е. онъ находитъ выраженіе для прямоугольнаго треугольника въ раціональныхъ числахъ, или что тоже, ищетъ два числа коихъ сумма квадратовъ была-бы равна также числу квадратному. Формула эта получила, какъ мы видѣли, громадное значеніе. Пиѳагорейцы не много способствовали дальнѣйшему развитію науки о числахъ, они были слишкомъ углублены въ розысканія мистическихъ свойствъ чиселъ; такому же направленію слѣдовалъ отчасти и Платонъ. Начиная съ Евклида Ариѳметика принимаетъ уже характеръ науки, но чисто геометрической, всѣ свойства чиселъ Евклидъ старается объяснить геометрически, на линіяхъ, площадяхъ и т. п.; даже сами числа носятъ названія: *линейныхъ, плоскихъ, тѣлесныхъ* и т. п. Такое направленіе и такой характеръ Ариѳметика сохраняетъ въ теченіи четырехъ сотъ лѣтъ, т. е. отъ Евклида до Никомаха. Никомахъ первый, по крайней мѣрѣ мы не знаемъ ни одного сочиненія по Ариѳметикѣ до него кромѣ „Началъ" Евклида, сталъ излагать Ариѳметику безъ посредства геометрическихъ представленій, она является у него вполнѣ наукой о числахъ, предложенія онъ доказываетъ на числахъ, а не на линіяхъ, подобно Евклиду. Появленіе сочиненія Никомаха оказываетъ громадное вліяніе на развитіе математическихъ

наукъ вообще, чему служатъ доказательствомъ многочисленныя изданія и комментаріи „Ариѳметики". Вся математическая литература принимаетъ ариѳметическое направленіе, если можно такъ выразится, этому направленію она слѣдуетъ до начала XIII столѣтія, когда Фибоначи, впервые знакомитъ Европейцевъ съ Алгеброй, заимствованной имъ у Арабовъ; всѣ усилія математиковъ начинаютъ обращаться въ этомъ направленіи,—математическая литература принимаетъ алгебраическое направленіе. Такому направленію она слѣдуетъ до XVI столѣтія, въ это время математики впервые знакомятся съ трудами Діофанта, изученіе этихъ сочиненій дѣлаетъ переворотъ въ Алгебрѣ, до этого математики занимались рѣшеніемъ опредѣленныхъ вопросовъ, а теперь на первомъ планѣ стоитъ неопредѣленный анализъ; самые замѣчательные математики, каковы: Ферма, Ваше, Пель *), Френиклъ **) и мн. др. рѣшаютъ задачи Діофанта и продолжаютъ, начатыя имъ изслѣдованія. Но вскорѣ появляется новый методъ—дифференціальное исчисленіе, умы всѣхъ математиковъ слишкомъ заняты имъ и неопредѣленный анализъ забытъ. Этимъ вопросомъ снова начинаетъ заниматься Эйлеръ. Начиная съ Эйлера неопредѣленный анализъ и изслѣдованія по теоріи чиселъ дѣлаются любимымъ занятіемъ первокласныхъ математиковъ первой половины XIX столѣтія: Лагранжа, Лежандра, Гаусса, Якоби и мн. др.

Подобное измѣненіе направленій можно прослѣдить въ развитіи всѣхъ наукъ.

Паппусъ ***) жилъ, обыкновенно полагаютъ, въ Александріи, въ концѣ IV в. по Р. Х., по Гультшъ ****) полагаетъ, что Паппусъ современникъ Діоклетіана (284—305 гг.). Мнѣніе свое онъ основываетъ на довольно вѣс-

---

*) *Пель* (Pell) англійскій математикъ XVII в. Изучалъ науки въ Оксфордѣ и Кембриджѣ, а впослѣдствіи былъ профессоромъ математики въ Амстердамѣ, умеръ въ 1685 г. Онъ написалъ много сочиненій, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстны. „An idea of mathematics. Lond. 1650", „Rhonius' Algebra, translated by Th. Branker, much altered and augmented, Lond. 1668", „A table of 10000 square numbers. Lond. 1672", „Controversy with Longomontanus concerning the quadrature of the circle, Amst. 1646". Въ 1658 Пель принялъ духовный санъ и получилъ мѣсто ректора въ Фоббингѣ (Fobbing).

**) *Френиклъ* (Frenicle de Bessy) извѣстный французскій математикъ, родился въ 1675 г. въ Парижѣ. Онъ извѣстенъ былъ своимъ умѣніемъ рѣшать различныя задачи на числа, чему очень удивлялся Ферма, занимавшійся теоріей чиселъ. Послѣ смерти Френикла найдены были въ его бумагахъ пріемы при помощи которыхъ онъ рѣшалъ задачи. Онъ авторъ сочиненій: „Traité des triangles rectangles en nombres. 1676. Paris"; „Traité des carrés magiques" и др.

***) Паппусъ по гречески Πάππος. На русскомъ языкѣ болѣе употребительно названіе *Паппъ*, мы же вездѣ употребляемъ болѣе извѣстное, латинизированное Pappus.

****) Подобное мнѣніе было высказано уже Усенеромъ (Usener) на основаніи словъ одного схоліаста. Статья Усенера помѣщена въ Musei Rhenani Vol. XXVIII.

кихъ соображеніяхъ, кромѣ того онъ обѣщалъ сообщить по этому поводу положительныя данныя *). Паппусъ авторъ драгоцѣннаго памятника для исторіи математическихъ наукъ—это его сочиненіе „Математическія Коллекціи“ (Συναγωγαὶ μαθηματικαί). Сочиненіе это состоитъ изъ восьми книгъ, изъ которыхъ, къ сожалѣнію, дошли до насъ только послѣднія шесть и маленькій отрывокъ изъ второй, вѣроятно конецъ этой книги, найденный Валлисомъ въ XVII ст. **).

Въ „Математическихъ Коллекціяхъ“ изложены всѣ замѣчательныя открытія, сдѣланныя въ области Геометріи и Ариѳметики, а потому сочиненіе это показываетъ намъ состояніе математическихъ наукъ у древнихъ Грековъ до Паппуса. Паппусъ собралъ въ немъ въ одно цѣлое разбросанныя открытія замѣчательнѣйшихъ математиковъ, и множество любопытныхъ предложеній и леммъ, служащихъ къ облегченію чтенія математическихъ сочиненій различныхъ авторовъ. Паппусъ не довольствуется простымъ и сухимъ перечнемъ именъ авторовъ и заглавій ихъ сочиненій, онъ вникаетъ въ сущность каждаго сочиненія, приводитъ болѣе замѣчательныя изъ предложеній, указываетъ на ихъ значеніе и приводитъ содержаніе многихъ сочиненій, изъ которыхъ большая часть въ настоящее время утеряны. При этомъ содержаніе самыхъ сочиненій Паппусъ передаетъ съ такою ясностью и съ такимъ знаніемъ дѣла, что, на основаніи его указаній, многія изъ этихъ сочиненій были возстановлены новѣйшими математиками. Въ этомъ отношеніи сочиненіе Паппуса незамѣнимо, и если бы оно не дошло до насъ, то многое, извѣстное намъ теперь о трудахъ древнихъ греческихъ геометровъ пропало бы безслѣдно. Весьма жаль, что первыя двѣ книги „**Collectiones Mathematicae**“ до насъ не дошли, и потеря ихъ для насъ еще тѣмъ чувствительнѣе, что въ нихъ вѣроятно заключался обзоръ греческой ариѳметики, подобный обзору Геометріи—заключающемуся въ послѣднихъ шести книгахъ.

*) Въ предисловіи къ своему прекрасному изданію сочиненій Паппуса.

**) Въ первый разъ „Математическія Коллекціи“ были изданы Коммандиномъ подъ заглавіемъ: Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Federico Commandino in lat. converrae et commentariis illustratae. Venet. 1589. in-fol. Переводъ этотъ былъ снова напечатанъ въ Болоньѣ въ 1600 г. Отрывокъ, найденный Валлисомъ былъ имъ напечатанъ въ греческомъ текстѣ въ 1688 г. въ Оксфордѣ. Греческій текстъ начала VII-й книги былъ изданъ Галлеемъ при сочиненіи Аполлонія „De sectionis ratione“. Начало V-й книги было издано въ греческомъ текстѣ въ 1824 г. въ Парижѣ Эйзенманомъ. Только въ послѣднее время сочиненіе Паппуса было издано съ греческимъ текстомъ Гультшемъ подъ заглавіемъ: Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. I—III. 1875—78. Berolini. Весьма жаль, что „Математическія Коллекціи“ Паппуса не были оцѣнены должнымъ образомъ математиками, только этимъ можно объяснить малое число изданій этого сочиненія.

Такое мнѣніе подтверждается еще тѣмъ, что содержаніе отрывка, изданнаго Валлисомъ, имѣетъ отношеніе къ ариѳметикѣ.

Въ „Математическихъ Коллекціяхъ“ мы находимъ также много чрезвычайно важныхъ свѣдѣній о различныхъ методахъ, употребляемыхъ древними математиками; интересныя указанія на свойства коническихъ сѣченій, конхоиды, квадратриксы и другихъ кривыхъ. Въ этомъ сочиненіи помѣщена также исторія развитія задачъ: удвоеніе куба и трисекція угла; при этомъ Паппусъ предлагаетъ рѣшеніе первой задачи, которое онъ сводитъ на рѣшеніе задачи „о двухъ средне-пропорціональныхъ“. Рѣшеніе, предложенное Паппусомъ, почти ничѣмъ не отличается отъ рѣшенія, предложеннаго Діоклесомъ.

Мы уже выше сказали, что Паппусъ былъ не только комментаторъ и простой собиратель фактовъ, но онъ почти всегда сопровождаетъ свои указанія различными замѣчаніями, часто весьма цѣнными, такъ напр. замѣчанія Паппуса и леммы, приведенныя въ его сочиненіи для облегченія чтенія сочиненій: „Поризмы“ Евклида, „De locis planis“ и „De sectione determinata“ Аполлонія, почти единственныя указанія, на основаніи которыхъ эти сочиненія были возстановлены новѣйшими математиками. Читая внимательно „Математическія Коллекціи“ Паппуса и вникая въ ихъ содержаніе, вполнѣ дѣлается понятнымъ, почему Декартъ ставитъ Паппуса на ряду съ величайшими математиками древности — Евклидомъ, Архимедомъ и Аполлоніемъ.

Мы вкратцѣ укажемъ, что содержали дошедшія до насъ книги „Математическихъ Коллекцій“.

Книга II. Содержаніе дошедшаго до насъ отрывка этой книги относится къ свойствамъ чиселъ 10, 100, 1000, и т. д. Особеннаго отрывокъ этотъ ничего не заключаетъ, а важенъ онъ только въ томъ отношеніи, что въ немъ Паппусъ ссылается на предложенія изъ утеряннаго ариѳметическаго сочиненія Аполлонія, о которомъ мы уже выше упоминали.

Книга III. Въ этой книгѣ изложены рѣшенія задачъ „о двухъ средне пропорціональныхъ“, предложенныя Эратосѳеномъ и Никомедомъ, а также описанъ инструментъ, придуманный Герономъ для рѣшенія этой задачи. Далѣе, Паппусъ показываетъ, какъ построить между двумя данными прямыми третью средне-пропорціональную и по даннымъ двумъ прямымъ, какъ построить третью пропорціональную.

Въ концѣ книги онъ излагаетъ построеніе пяти правильныхъ тѣлъ, вписанныхъ въ шаръ.

Книга IV. Въ этой книгѣ доказано на основаніи предложеній, найденныхъ Архимедомъ, слѣдующее замѣчательное предложеніе: если точка начинаетъ свое движеніе отъ вершины полушара и пройдетъ четверть окруж-

ности, и если одновременно съ движеніемъ точки эта четверть окружности сдѣлаетъ полный оборотъ около своей оси, то площадь, заключенная между окружностью основанія и спиралью двойной кривизны, описанной точкой на сферической поверхности, будетъ равна площади квадрата, построеннаго на діаметрѣ. Рѣшеніе этого вопроса есть первый примѣръ *квадратуры поверхностей.*

Далѣе, послѣ этого предложенія, мы узнаемъ изъ введенія къ задачѣ о трисекціи угла, что ученіе о кривыхъ поверхностяхъ и кривыхъ двойной кривизны, на нихъ начерченныхъ, было предметомъ изслѣдованій древнихъ геометровъ. Паппусъ указываетъ на два сочиненія, написанныя по этому предмету: первое изъ нихъ принадлежитъ Димитрію Александрійскому *), это его „Линейныя разысканія"; второе—Филону Тіанскому **), предметъ его—кривыя, происшедшія отъ поверхностей, извѣстныхъ подъ именемъ *плектоидальныхъ.*

Что нужно понимать подъ именемъ плектоидальныхъ поверхностей намъ точно неизвѣстно. Монтукла полагаетъ невозможнымъ рѣшить этотъ вопросъ за недостаткомъ указаній, но Шаль обращаетъ вниманіе геометровъ на 29-е предложеніе IV книги сочиненія Паппуса, въ которомъ сказано, что поверхность четырехграннаго винта есть поверхность плектоидальная; на основаніи этого Шаль полагаетъ, что подъ именемъ плектоидальныхъ поверхностей надо понимать *развертывающіяся поверхности* вообще; или же это были поверхности, извѣстныя въ настоящее время подъ именемъ *коноидальныхъ*, образованныхъ движеніемъ прямой по кривой и неподвижной прямой, остающейся постоянно параллельною одной и той же плоскости; или же наконецъ Паппусъ подъ именемъ плектоидальныхъ поверхностей подразумѣвалъ вообще гелисоидальныя поверхности или же только скользящую гелисоидальную поверхность, т. е. поверхность четырехграннаго винта.

Неаполитанскій геометръ *Флоти* (Flauti) названіе плектоидальныхъ поверхностей относитъ ко всѣмъ поверхностямъ образованнымъ движеніемъ

*) Время когда жилъ *Димитрій Александрійскій* неизвѣстно, сочиненіе, написанное имъ извѣстно также подъ заглавіемъ: „Lineares aggressiones".

**) *Филонъ Тіанскій* полагаютъ современникъ Менелая. По словамъ Паппуса поверхности, извѣстныя подъ именемъ плектоидальныхъ (complicatae) и кривыя, полученныя отъ ихъ пересѣченія, сильно занимали древнихъ геометровъ. Одну изъ такихъ кривыхъ Менелай назвалъ *чудной.* Изъ этого и заключаютъ, что Филонъ или современникъ Менелая, или же жилъ до него.

Кромѣ того Паппусъ упоминаетъ еще о геометрѣ *Эрицемѣ* (Ericeme), написавшемъ сочиненіе „Paradoxa Mathematica". Онъ приводитъ нѣсколько предложеній изъ этого сочиненія, но они не заключаютъ ничего интереснаго.

прямой линіи. Коммандинъ въ своихъ комментаріяхъ на сочиненіе Паппуса полагаетъ, что плектоидальныя поверхности суть поверхности цилиндрическія, но такое предположеніе невѣрно.

По поводу квадратриксы Дейнострата Паппусъ указываетъ на два свойства гелисоидальной скользящей поверхности, которыя заключаютъ въ себѣ средство строить квадратриксу и могутъ служить прекраснымъ примѣромъ геомотрическихъ изслѣдованій древнихъ геометровъ, относительно кривыхъ поверхностей и кривыхъ двойной кривизны.

Указавъ на образованіе квадратриксы, называемое Паппусомъ механическимъ, отъ пересѣченія радіуса круга, вращающагося около своего центра и діаметра, перемѣщающагося параллельно самому себѣ (кн. 4, пред. 25), Паппусъ говоритъ, что кривая эта можетъ быть образована при помощи *мѣстъ на поверхности* или при помощи спирали Архимеда.

Взглядъ Паппуса на кривыя поверхности и на кривыя двойной кривизны, которыми онъ воспользовался для построенія плоскихъ кривыхъ, заслуживаетъ вниманія, такъ какъ подобные вопросы въ настоящее время принадлежатъ къ области Начертательной Геометріи.

Книга V раздѣлена на двѣ части. Въ первой части Паппусъ излагаетъ объ изопериметрахъ плоскихъ фигуръ и поверхностей. Таковы напримѣръ теоремы:

Теорема 1. Изъ двухъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ равные периметры, площадь многоугольника съ большимъ числомъ сторонъ больше площади многоугольника съ меньшимъ числомъ сторонъ.

Теорема 2. Площадь правильнаго многоугольника, имѣющаго периметръ равный окружности круга, меньше площади круга

Теорема 3. Площадь прямоугольника, имѣющаго сторонами окружность круга и радіусъ того же круга, вдвое больше площади круга. Эта теорема принадлежитъ Архимеду.

Далѣе, въ 5-й теоремѣ Паппусъ показываетъ, что изъ всѣхъ изопериметрическихъ треугольниковъ, построенныхъ на одномъ основаніи, наибольшую площадь имѣетъ равнобедренный треугольникъ.

Въ 13-й теоремѣ онъ показываетъ, что въ кругахъ площади подобныхъ сегментовъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ основаній, т. е. хордъ. Далѣе слѣдуютъ подобныя же теоремы.

Во второй части V-й книги Паппусъ говоритъ объ Архимедовыхъ правильныхъ тѣлахъ (полуправильныхъ), о которыхъ мы уже упоминали, говоря объ Архимедѣ.

Книга VI содержитъ комментаріи на сочиненія: „Сферика" и „О дняхъ и ночахъ" Теодосія; теоремы, относящіяся къ сочиненіямъ „Движущаяся сфера" Автолика и „О величинахъ и разстояніяхъ" Аристарха Самосскаго;

и наконецъ комментаріи на сочиненія Евклида: „Оптика" и „Феномены". Содержаніе VI-й книги относится вообще къ астрономіи.

Книга VII—самая обширная. Введеніе къ VII книгѣ „Collectiones Mathematicae" Паппуса содержитъ подробное опредѣленіе *синтеза* и *анализа* и указываетъ на отличительныя особенности каждаго изъ этихъ методовъ; въ самомъ текстѣ этой книги Паппусъ даетъ примѣры обоихъ этихъ методовъ и прилагаетъ ихъ къ однимъ и тѣмъ же вопросамъ. За этимъ опредѣленіемъ Паппусъ перечисляетъ заглавія сочиненій, написанныхъ древними геометрами о такъ называемыхъ „*рѣшенныхъ мѣстахъ*"; подъ этимъ именемъ они подразумѣвали нѣкоторыя геометрическія данныя, познаніе которыхъ необходимо для рѣшающихъ задачи. Большая часть изъ этихъ сочиненій суть примѣры изъ *геометрическаго анализа* древнихъ математиковъ. Мы приведемъ заглавія этихъ сочиненій, какъ они указаны въ сочиненіи Паппуса, а именно: „*Данныя*" Евклида; „*Дѣленіе въ отношеніи*", въ двухъ книгахъ, Аполлонія; „*Дѣленіе пространства*"—Аполлонія, въ двухъ книгахъ; „*О соприкосновеніяхъ*"—его же, также въ двухъ книгахъ; „*Поризмы*" Евклида въ трехъ книгахъ; „*О наклоненіяхъ*" Аполлонія—въ двухъ книгахъ; „*Плоскія мѣста*" въ двухъ книгахъ и „*Коническія сѣченія*" въ восьми книгахъ, также Аполлонія; „*Тѣлесныя мѣста*" стараго Аристая, въ пяти книгахъ; „*Мѣста на поверхности*" Евклида въ двухъ книгахъ; „*О среднихъ отношеніяхъ*"—Эратосѳена въ двухъ книгахъ; и наконецъ „*Объ опредѣленномъ сѣченіи*" Аполлонія въ двухъ книгахъ. Изъ всѣхъ этихъ сочиненій до насъ дошли только „Данныя" Евклида, первыя семь книгъ „Коническихъ сѣченій" Аполлонія, а также его сочиненіе „Дѣленіе въ отношеніи". На основаніи замѣчаній Паппуса къ этимъ сочиненіямъ всѣ они были возстановлены, геометрами XVI и XVII столѣтій, въ духѣ древнихъ математиковъ.

Во введеніи къ VII книгѣ „Collectiones Mathematicae" помѣщена также знаменитая задача древнихъ: „ad tres aut plures lineas", которая, по словамъ Паппуса, была камнемъ преткновенія древнихъ геометровъ. Задачей этой занимались также Евклидъ и Аполлоній. Но только въ новѣйшее время она снова пріобрѣла извѣстность, послѣ того какъ Декартъ помѣстилъ ее въ началѣ своей „Геометріи". Задача эта можетъ быть отнесена къ теоріи сѣкущихъ. По словамъ Монтуклы ее пытались рѣшить древніе геометры, но они ее рѣшили только до извѣстной степени, общаго же рѣшенія они не съумѣли найти, такъ какъ оно зависило отъ новаго метода, именно алгебраическаго анализа и умѣнія выразить алгебраически основное и отличительное свойство кривой. Задача эта состояла въ слѣдующемъ: „дано нѣсколько прямыхъ, найти геометрическое мѣсто такой точки, чтобы перпендикуляръ, или еще общѣе, наклонныя, проведенныя изъ этой точки къ даннымъ прямымъ подъ данными углами, удовлетворяли бы условію, что

произведеніе однѣхъ изъ нихъ было бы въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ остальныхъ изъ нихъ". Задачу эту Декартъ назвалъ *„проблемой Паппуса"*. Древніе геометры прекрасно знали, что если дано только три или четыре линіи, то геометрическое мѣсто или кривая, на которой находятся всѣ эти точки есть одно изъ коническихъ сѣченій, хотя не умѣли опредѣлить его для всякаго случая. По поводу этого Паппусъ упрекаетъ Аполлонія въ хвастливости, за то, что послѣдній утверждалъ, что онъ многое прибавилъ къ рѣшенію, данному Евклидомъ; Паппусъ это опровергаетъ. Если же задача была предложена для большаго числа прямыхъ, чѣмъ четыре, то древніе ограничивались тѣмъ, что говорили, что требуемое мѣсто есть кривая, не указывая ея вида, за исключеніемъ одного случая, для котораго они могли найти кривую; но какой это былъ случай, къ сожалѣнію, Паппусъ не упоминаетъ.

Въ этомъ же введеніи Паппусъ говоритъ о затрудненіи, которое останавливало многихъ геометровъ, именно, что выражаетъ произведеніе нѣсколькихъ прямыхъ, напр. четырехъ или большаго числа, въ виду несуществованія протяженія болѣе трехъ измѣреній? Паппусъ отвѣчаетъ на этотъ вопросъ тѣмъ, что эти произведенія можно разсматривать какъ простыя сочетанія отношеній; выраженіе это часто встрѣчается въ сочиненіяхъ по Геометріи древнихъ авторовъ.

Въ VII-й книгѣ нѣсколько предложеній относятся къ вопросу о maximum'ѣ и minimum'ѣ. Вопросъ этотъ является у Паппуса при изслѣдованіи свойствъ системы двухъ сопряженныхъ точекъ и двойной точки, свойство это заключается въ слѣдующемъ: отношеніе произведеній разстояній двойной точки отъ сопряженныхъ точекъ есть maximum или minimum. Паппусъ, при помощи геометрическаго построенія, даетъ выраженіе для этого отношенія, но онъ только указываетъ на свойства maximum'а и minimum'а, которыя были доказаны въ сочиненіи Аполлонія, но къ сожалѣнію это геометрическое доказательство до насъ не дошло; было-бы весьма интересно знать, какъ поступали древніе геометры при изслѣдованіи этого случая maximum'а и minimum'а. Въ новѣйшее время подобные вопросы рѣшаются весьма просто и не представляютъ затрудненій. Изъ новѣйшихъ математиковъ Ферма одинъ изъ первыхъ рѣшалъ подобные вопросы.

Въ концѣ введенія къ VII-й книгѣ находится первая идея, впослѣдствіи столь извѣстной, теоремы Гюльдена. Паппусъ говоритъ, что „отношенія между собою фигуръ, происшедшихъ отъ вращенія линіи или поверхности, находятся между собою какъ произведенія образующихъ фигуръ и окружностей, описанныхъ ихъ центрами тяжести" *).

*) Теорема Гюльдена состоитъ въ слѣдующемъ: „величина объема или поверхность

Около сорока леммъ VII-й книги относятся къ сочиненію Аполлонія: „De sectione determinata", въ настоящее время предложенія эти вошли въ область новѣйшихъ ученій Геометріи; теоремы эти относятся къ соотношенію между отрѣзками, дѣлаемыми нѣсколькими точками на прямой. Съ перваго раза не видно связи между этими предложеніями и чтеніе ихъ довольно затруднительно. Но при болѣе внимательномъ ознакомленіи съ ними, Шаль находитъ, что всѣ они относятся къ теоріи *инволюціи* шести точекъ, основанной *Десаргомъ* (Desargues), и которая нашла такое громадное примѣненіе въ новѣйшей Геометріи.

Большая часть леммъ Паппуса относится, по предположенію Шаля, къ первой книгѣ „Поризмъ" Евклида; леммъ, относящихся къ этому вопросу, 38.

Симсонъ, возстанавливая „Поризмы" Евклида, „Опредѣленныя сѣченія" и „Плоскія мѣста" Аполлонія, доказалъ одну за другою всѣ многочисленныя леммы сочиненія Паппуса, которыя относятся къ вышеупомянутымъ тремъ сочиненіямъ.

Остальныя леммы VII-й книги не представляютъ особеннаго интереса; это отдѣльныя предложенія относительно круга, треугольника и коническихъ сѣченій, не представляющія особеннаго интереса. Большая часть изъ этихъ леммъ относятся къ сочиненіямъ Аполлонія: „De inclinationibus", „De tactionibus" и къ „Мѣстамъ на поверхности" Евклида. Изъ нихъ мы укажемъ на одну, относящуюся къ сочиненію „De tactionibus"; задача эта рѣшена Паппусомъ весьма просто; она состоитъ въ слѣдующемъ: чрезъ три точки, лежащія на одной прямой, провести стороны треугольника, вписаннаго въ кругъ. Паппусъ также рѣшаетъ эту задачу для нѣсколькихъ частныхъ случаевъ, именно, когда одна изъ точекъ лежитъ на безконечности. Задача эта впослѣдствіи была обобщена, точкамъ было дано совершенно произвольное положеніе, въ такомъ видѣ она представляла затрудненія и надъ ея рѣшеніемъ трудились многіе изъ геометровъ; но самое простое и самое общее рѣшеніе было дано шестнадцатилѣтнимъ геометромъ неаполитанцемъ *Оттаяно* (*Ottaîano*) *).

Книга VIII „Collectiones Mathematicae" Паппуса посвящена главнымъ образомъ описанію машинъ, употребляемыхъ въ практической механикѣ, а также говорится о примѣненіи машинъ къ органическому черченію кри-

---

...щенія равна производящей площади или линія, умноженной на путь, пройденный ея центромъ тяжести". Гюльденъ жилъ въ XVII ст., о немъ мы скажемъ ниже.

*) Рѣшеніе этой задачи также было дано италіанскимъ математикомъ Малфатти (...tti). Рѣшенія, предложенныя Оттаяно и Малфатти, помѣщены въ IV томѣ „Memorie della Societa italiana".

выхъ. Въ той же книгѣ *находится* много *предложеній*, относящихся къ Геометріи, изъ коихъ одно заслуживаетъ особеннаго вниманія, а именно: если три матеріальныя точки, помѣщенныя въ вершинахъ треугольника, начинають двигаться одновременно и проходятъ соотвѣтственно каждая три стороны, двигаясь въ одномъ и томъ же направленіи, со скоростями пропорціональными длинѣ сторонъ, то ихъ центръ тяжести останется неизмѣннымъ. Доказательство этого предложенія, данное Паппусомъ, основано на извѣстной теоремѣ Птоломея, относительно отрѣзковъ, дѣлаемыхъ сѣкущей на сторонахъ треугольника. Паппусъ вначалѣ предполагаетъ это предложеніе извѣстнымъ, но впослѣдствіи, въ концѣ книги, доказываетъ его.

Въ заключеніи, сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе: сочиненія, поименованныя во введеніи къ VII книгѣ „Collectiones Mathematicae" Паппуса составляютъ цѣлую систему *дополненій* къ Геометріи; безъ сомнѣнія, если бы всѣ эти сочиненія дошли бы до насъ въ настоящемъ своемъ видѣ, то они много способствовали бы развитію Геометріи въ эпоху до возрожденія наукъ. Новая Геометрія такихъ дополненій не имѣетъ; подобныя дополненія должны-бы были быть основаны на иныхъ началахъ, нежели дополненія древнихъ греческихъ геометровъ, а именно должны быть проникнуты духомъ простоты и общности, присущимъ новымъ ученіямъ Геометріи.

Паппусъ также написалъ комментаріи на первыя четыре книги „Альмагеста" Птоломея, но эти комментаріи до насъ не дошли, за исключеніемъ незначительнаго отрывка.

Теонъ, полагаютъ современникъ Паппуса, жилъ въ Александріи между 365 и 390 гг. по Р. Х. Онъ написалъ весьма цѣнные комментаріи на „Начала" Евклида и издалъ ихъ вновь съ нѣкоторыми добавленіями и измѣненіями. Кромѣ того Теонъ написалъ еще комментаріи къ „Альмагесту" Птоломея. Теонъ принадлежалъ къ ученымъ Александрійской школы.

Изданіе „Началъ", данное Теономъ, многіе ученые приписывали ему самому. Такъ напримѣръ Боэцій утверждалъ, что Евклидъ только привелъ въ порядокъ и собралъ предложенія, доказанныя другими, и что главный авторъ „Началъ" есть Теонъ. До насъ дошли даже рукописи „Началъ", которыя озаглавлены „Извлеченія изъ бесѣдъ Теона" (Ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν). Комментаріи Теона были напечатаны Коммандиномъ при его изданіи „Началъ" Евклида.

Гипатія. Сочиненія Діофанта, по словамъ нѣкоторыхъ писателей, были комментированы Гипатіей, дочерью Теона, но такое мнѣніе ничѣмъ не подтверждается. Кромѣ того ей приписываютъ еще нѣкоторыя другія сочиненія. Гипатія болѣе извѣстна своей красотой и трагической кончиной: двадцать три года спустя послѣ истребленія александрійской библіотеки, въ 415 г. она была растерзана на куски, среди Александріи, разсвирѣпѣв-

шею чернью, возбужденной епископомъ Кирилломъ, видѣвшимъ въ ней только язычницу.

Аѳинская и Византійская школы.

Распаденіе Западной Римской имперіи нанесло окончательный ударъ второй Александрійской школѣ—она перестала существовать. Центръ научной дѣятельности перемѣстился въ Аѳины—этотъ первоначальный центръ эллинской культуры, тамъ образовалась *Аѳинская школа*, существовавшая не болѣе столѣтія, т. е. до конца VI в.

Послѣ паденія Аѳинской школы, въ VIII в., въ Византіи образовалась новая школа -*Византійская*, существовавшая до XV столѣтія, когда Византія взята была Турками.

Ни одна изъ этихъ школъ не произвела ни одного сколько нибудь замѣчательнаго математика. Изъ числа ученыхъ Аѳинской школы болѣе извѣстны Проклъ и Евтокій, а изъ числа ученыхъ Византійской школы—Геронъ Младшій. Ученые Аѳинской школы занимались изученіемъ и толкованіемъ сочиненій древнихъ греческихъ писателей; ученые же Византійской школы были погружены въ богословскіе и грамматическіе споры; изученію точныхъ наукъ они почти не придавали никакого значенія.

Перечислимъ вкратцѣ ученыхъ, принадлежавшихъ къ этимъ школамъ, которые писали сочиненія по Геометріи.

Проклъ Діадохъ (наслѣдникъ), родомъ изъ Константинополя, жилъ отъ 412 по 485 гг. нашей эры; онъ получилъ образованіе во второй Александрійской школѣ и послѣ паденія послѣдней отправился въ Аѳины, гдѣ искали убѣжища послѣдніе представители языческихъ ученій. Проклъ стоялъ во главѣ Аѳинской школы, гдѣ преподавалъ неоплатоновскую философію. Своими работами онъ поддерживалъ еще нѣкоторое время угасавшее развитіе наукъ. Проклъ комментировалъ сочиненія Платона. Онъ имѣлъ обширныя познанія по математикѣ и астрономіи. Изъ сочиненій, написанныхъ Прокломъ, самое замѣчательное—„Комментаріи на первую книгу „Началъ" Евклида", содержащее весьма много любопытныхъ замѣчаній, относящихся къ исторіи и метафизикѣ Геометріи *). Комментаріи эти отличаются своею полнотою. Кромѣ этого сочиненія Проклъ написалъ еще сочиненіе „О шарѣ".

Прокла преслѣдовали христіане какъ одного изъ главныхъ послѣдо-

*) Сочиненіе это было издано въ греческомъ текстѣ Фридлейномъ въ 1873 г., въ Лейпцигѣ, подъ заглавіемъ: „Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii.

вателей платоновскихъ воззрѣній и ученій язычниковъ. Онъ часто говорилъ: „о тѣлѣ я не забочусь! ибо только душу я унесу съ собою, когда умру".

По словамъ Зонора Проклъ, подобно Архимеду, съ помощью зажигательныхъ стеколъ сжегъ флотъ Виталія, осаждавшаго Константинополь.

Маринусъ одинъ изъ философовъ, продолжавшихъ послѣ Прокла преподаваніе въ Аѳинской школѣ. Онъ написалъ введеніе къ „Даннымъ" Евклида, въ которомъ онъ указываетъ на характеръ и пользу этого сочиненія.

Исидоръ Милетскій, ученикъ Маринуса, извѣстенъ какъ свѣдущій механикъ и геометръ. Сочиненія его до насъ не дошли

Евтокій Аскалонскій, ученикъ Исидора, самый извѣстный изъ послѣдователей Прокла, жилъ около 550 г., въ царствованіе Юстиніана. Онъ написалъ: „Комментаріи на первыя четыре книги „Коническихъ Сѣченій" Аполлонія", а также комментаріи на сочиненія Архимеда: „О шарѣ и цилиндрѣ", „Квадратура параболы", „Объ измѣреніи круга" и „О равновѣсіи плавающихъ тѣлъ". Сочиненія Евтокія важны въ томъ отношеніи, что они содержатъ много драгоцѣнныхъ матеріаловъ для исторіи математическихъ наукъ, въ нихъ заключаются также отрывки по Геометріи, изъ недошедшихъ сочиненій самыхъ древнихъ изъ извѣстныхъ намъ писателей. Большая часть этихъ отрывковъ относится къ рѣшенію задачъ: „удвоені куба" и „нахожденіе двухъ средне-пропорціональныхъ". Такими отрыв въ особенности изобилуетъ комментарій ко второй книги сочиненія „О ша.. и цилиндрѣ".

Въ комментаріяхъ ко второй книгѣ сочиненія Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ" Евтокій излагаетъ всѣ одинадцать рѣшеній извѣстной задачи „удвоеніе куба", которыя даны были древними геометрами. Рѣшенія эти принадлежатъ: Платону, Герону, Филону Византійскому, Аполлонію, Діоклесу, Паппусу, Спору, Менайхму, Архиту (на основаніи указаній Евдема), Эратосѳену и Никомеду *).

Симпликій одинъ изъ послѣднихъ представителей неоплатоновской философіи жилъ въ Аѳинахъ, въ началѣ VI столѣтія. Изъ числа его сочиненій болѣе извѣстны его комментаріи на сочиненіе Аристотеля „О небѣ".

Геронъ Младшій принадлежалъ къ числу ученыхъ Византійской школы и жилъ въ X в. Мы уже выше замѣтили, говоря о Геронѣ Старшемъ, что

---

*) Комментаріи Евтокія на сочиненія Архимеда были изданы на греческомъ языкѣ въ Базелѣ, въ 1544 г., подъ заглавіемъ: „Eutocii Ascalonitae in Archimedis libros de sphaera et cylindro, atquae alios quosdam, Commentaria, nunc primum et Graece et Latine in lucem edita". Комментаріи эти помѣщены въ видѣ приложеній къ сочиненіямъ Архимеда: „Archimedis Syracusani philosophi ac geometrae excellentissimi opera ect. Basileae. 1544". in-4.

ученыхъ, носившихъ имя Герона, было нѣсколько, вслѣдствіе чего долгое время существовало недоразумѣніе какія именно сочиненія написаны тѣмъ или другимъ изъ Героновъ. Въ настоящее время вопросъ этотъ окончательно разъясненъ Мартеномъ, который доказалъ, что Геронъ Младшій, или какъ его иначе называютъ Геронъ III, жилъ въ X в., въ Константинополѣ. Прежніе писатели по исторіи математическихъ наукъ полагали, что Геронъ Младшій жилъ гораздо раньше, такъ напр. Монтукла относитъ его къ VIII в., а Гейлброннеръ и Летроннъ полагали, что онъ жилъ въ Александріи въ царствованіе Гераклія (610—641 гг.). Первый, высказавшій предположеніе, что Геронъ Младшій жилъ не ранѣе X в., былъ Иделеръ *).

Геронъ Младшій, авторъ нѣсколькихъ сочиненій, изъ которыхъ болѣе извѣстны: „Объ осадныхъ машинахъ" (Πολιορκητικά—De machinis bellicis), „Геодезія" и „Объ устройствѣ солнечныхъ часовъ". Изъ этихъ сочиненій до насъ дошли только первыя два. Укажемъ вкратцѣ на ихъ содержаніе.

„Геодезія" состоитъ изъ введенія и десяти задачъ; начало первой задачи утеряно. Въ этомъ сочиненіи Геронъ упоминаетъ имена Евклида, Архимеда и Герона (Старшаго). Во введеніи къ „Геодезіи" авторъ говоритъ о примѣненіи діоптръ въ военномъ искусствѣ и о другихъ приложеніяхъ этого инструмента. Затѣмъ онъ переходитъ къ рѣшенію задачъ. Предметъ первыхъ четырехъ задачъ составляетъ опредѣленіе разстоянія между двумя точками, при различныхъ условіяхъ, не подходя ни къ одной, ни къ другой. Задачи эти Геронъ рѣшаетъ на полѣ, при чемъ строитъ треугольникъ, въ которомъ одна изъ сторонъ была бы искомое разстояніе, затѣмъ онъ строитъ другой треугольникъ—меньшій, подобный первому. Изъ соотношеній между этими двумя треугольниками онъ опредѣляетъ искомое разстояніе. Задачи эти рѣшены геометрически, о тригонометрическомъ рѣшеніи нѣтъ и помину. Изъ численныхъ данныхъ этихъ задачъ Мартенъ заключаетъ, что измѣренія свои Геронъ производилъ въ Константинопольскомъ ипподромѣ.

Предметъ пятой задачи измѣреніе площадей многоугольниковъ. Въ этой же задачѣ Геронъ предлагаетъ, весьма простой способъ доказательства предложенія, что сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна $2d$. Доказательство этого предложенія слѣдуетъ изъ слѣдующихъ пяти предложеній: 1) прямоугольникъ есть четыреугольникъ, въ которомъ всѣ углы прямые, 2) всякій параллелограмъ образованъ изъ прямоугольника безъ измѣненія величины сторонъ и суммы угловъ, 3) во всякомъ параллелограммѣ сумма четырехъ угловъ равна $4d$, 4) всякій треугольникъ равенъ половинѣ па-

*) *Ideler*. Ueber die Laengen-und Flaechenmasse der Alten. Abhandlungen der Berlinischen Academie der Wissenschaften. 1812—1813.

раллелограмма и 5) сумма угловъ всякаго треугольника равна половинѣ суммы угловъ параллелограмма, состоящаго изъ двухъ такихъ треугольниковъ. Къ сожалѣнію второе изъ этихъ предложеній доказать трудно.

Въ шестой задачѣ Геронъ занимается измѣреніемъ круга, при чемъ слѣдуетъ Архимеду, но онъ довольствуется приближеніемъ, которое Архимедъ считаетъ недостаточнымъ. Изъ численныхъ примѣровъ этой задачи можно видѣть какъ Геронъ производилъ умноженіе.

Въ седьмой задачѣ авторъ занимается измѣреніемъ куба, шара, цилиндра, конуса, призмы и пирамиды, при чемъ слѣдуетъ „Началамъ" Евклида. Кромѣ того указаны вѣрно положенія центровъ тяжести послѣднихъ четырехъ тѣлъ.

Въ восьмой задачѣ Геронъ измѣряетъ емкость колодца. На основаніи нѣкоторыхъ указаній и числовыхъ данныхъ, Мартенъ заключаетъ, что колодезь этотъ есть *цистерна Аспара*, находящаяся около Константинополя.

Въ девятой задачѣ Геронъ вычисляетъ количество воды, получаемое источникомъ. По его словамъ, задачу эту онъ заимствовалъ у Герона, ученика Ктезибія. Къ задачѣ этой приложено нѣсколько численныхъ примѣровъ.

Въ десятой, послѣдней, задачѣ Геронъ опредѣляетъ угловое разстояніе между двумя звѣздами.

Познакомившись съ содержаніемъ этого сочиненія видно, что Геронъ былъ знакомъ весьма поверхностно съ практической Геометріи; астрономическія познанія его были также ничтожны и кромѣ того часто совершенно превратны. Самъ авторъ, въ предисловіи къ своему сочиненію говоритъ, что онъ стремился представить въ болѣе сокращенной и менѣе научной формѣ открытія древнихъ ученыхъ и сдѣлать ихъ болѣе доступными въ эпоху невѣжества.

Второе, изъ дошедшихъ до насъ сочиненій Герона Младшаго, это „Объ осадныхъ машинахъ", въ которомъ описаны различныя машины, употребляемыя во время войны, такъ напр. описаны: тараны, башни на колесахъ, осадныя лѣстницы и мн. др. Въ этомъ сочиненіи авторъ упоминаетъ о сочиненіяхъ, написанныхъ по тому же предмету, Аполлодоромъ, Битономъ и Атенеемъ, которые представили свои сочиненія, первый императору Адріану, второй—Атталу и третій—Марцеллу. Самъ авторъ говоритъ, что многое онъ заимствовалъ изъ сочиненія Аполлодора; кромѣ того онъ упоминаетъ объ Антеміѣ, строителѣ церкви Св. Софіи, въ Константинополѣ. Сочиненіе Герона, было написано имъ въ эпоху, когда Сарацины предпринимали походы на Византійскую имперію, написать сочиненіе объ осадныхъ машинахъ и средствахъ обороны являлось настоятельной необходимостью. Вѣроятно сочиненіе Герона было написано въ царствованіе Константина

Порфиророднаго, который самъ написалъ „Тактику". Изъ сочиненія Герона можно заключить, что онъ былъ христіанинъ.

Въ предисловіи къ своему сочиненію Геронъ весьма интересно характеризуетъ современныхъ ему ученыхъ, онъ говоритъ, что они болѣе обращаютъ вниманія на красоту слога, чѣмъ на содержаніе и мысль сочиненій; онъ указываетъ, по примѣру мудраго Порфирія, на *великаго* Плотина, который не обращалъ вниманія даже на правописаніе. Далѣе онъ говоритъ, что нужно снисходительно относиться къ неточностямъ въ словахъ, но строго относиться къ неточностямъ мысли, а еще болѣе дѣлній. Онъ нападаетъ на риторовъ, которые напрасно теряютъ труды и время на составленіе пустѣйшихъ сочиненій, предметомъ которыхъ служатъ перефразировка опредѣленій различныхъ неодушевленныхъ предметовъ, восхваленіе или порицаніе животныхъ. Къ этимъ риторамъ, по мнѣнію Герона, слѣдуетъ отнести упреки, которые дѣлалъ индусъ Калянусъ греческимъ философамъ за ихъ болтливость, приводя въ противоположность индусскихъ мудрецовъ, отличающихся краткостью и простотою своихъ изрѣченій *)

Свою „Геодезію" Геронъ, какъ полагаютъ, написалъ около 938 г., а „Объ осадныхъ машинахъ"—немного ранѣе. „Геодезія" составляла какъ-бы продолженіе послѣдняго сочиненія Герона. Оба поименованныя сочиненія были переведены на латинскій языкъ Вароціемъ (Barozzi) и напечатаны въ Венеціи, въ 1572 г.

Въ „Геодезіи" Герона находится нѣсколько интересныхъ указаній, изъ которыхъ видно, какія мѣры и монеты были въ ходу въ Византійской имперіи въ X в., а также данныя для топографіи Константинополя и его окрестностей въ то время.

Кромѣ поименованныхъ нами сочиненій, до насъ дошли отрывки еще нѣкоторыхъ другихъ, которыя приписываютъ Герону, это: „Объ оборонѣ крѣпостей", „Физика", „Агрономія" и „О леченіи животныхъ". На сколько вѣроятно такое предположеніе нельзя сказать утвердительно.

Долгое время сочиненія Герона Младшаго и Герона Старшаго смѣшивали одпѣ съ другими. Въ многочисленныхъ, дошедшихъ до насъ рукописяхъ сочиненій этихъ ученыхъ существуетъ путаница. Такъ напримѣръ въ нѣкоторыхъ рукописяхъ сочиненіе „О діоптрѣ", написанное Герономъ Старшимъ, приписывали Герону Младшему. Дошедшія до насъ отрывки „Метрики" также часто приписываютъ Герону Младшему. Мартенъ, не безъ основанія, вполнѣ справедливо замѣчаетъ, что можетъ быть сочиненіе „О діоптрѣ" (Περὶ διόπτρας) составляло *пятую* часть „Метрики" Герона,

*) Такое же замѣчаніе находится въ сочиненіи Атенея, но о немъ Геронъ не упоминаетъ.

въ этой послѣдней части были изложены практическія примѣненія Геометріи, на основаніи теоретическихъ данныхъ, заключающихся въ первыхъ четырехъ. Было-бы весьма интересно, чтобы были собраны и изданы, по возможностя всѣ, оставшеся отрывки изъ „Метрики" Герона Старшаго. Почти во всѣхъ большихъ библіотекахъ Западной Европы существуютъ рукописи, въ которыхъ находятся отрывки или же компиляціи этого сочиненія. Собравъ, уцѣлѣвшія отрывки можетъ можно-бы было возстановить замѣчательное сочиненіе Герона.

При различныхъ геометрическихъ компиляціяхъ, приписываемыхъ Геронамъ, находятся сочиненія и отрывки изъ сочиненій древнихъ геометровъ, неизвѣстно когда жившихъ. Въ числѣ такихъ сочиненій упомянемъ „О мѣрахъ мраморовъ и дерева" *) *Дидима*, александрійскаго ученаго, неизвѣстно когда жившаго. Въ этомъ сочиненіи рѣшено нѣсколько интересныхъ геометрическихъ задачъ. Изъ другихъ отрывковъ сочиненій, приписываемыхъ Геронамъ, укажемъ еще на отрывки изъ сочиненія, предметомъ котораго служитъ обозрѣніе различныхъ мѣръ и монетъ. На основаніи различныхъ соображеній полагаютъ, что авторъ этого сочиненія александрійскій еврей, но время когда онъ жилъ неизвѣстно. Въ нѣкоторыхъ геометрическихъ компиляціяхъ сочиненій Герона, находятся примѣчанія, сдѣланныя *Патриціемъ*, который, какъ полагаютъ, жилъ въ концѣ IV в. и былъ родомъ изъ Лидіи.

Мы остановились болѣе подробно на сочиненіяхъ, написанныхъ Геронами потому, что о нихъ, на сколько намъ извѣстно, до сихъ поръ во всѣхъ „Исторіяхъ математическихъ наукъ" говорится только мимоходомъ. Не только содержанія, но даже самаго заглавія, такого замѣчательнаго сочиненія какъ „Метрика", ни одинъ изъ извѣстныхъ намъ авторовъ не упоминаютъ.

Все изложенное нами о Геронѣ Старшемъ и Геронѣ Младшемъ мы заимствовали изъ замѣчательныхъ изслѣдованій Летрона, Мартена и Гультша, о которыхъ мы говорили выше.

---

*) Сочиненіе это было издано подъ заглавіемъ: Iliadis fragmenta antiquissima cum picturis, item scholiasta vetus ad Odysseam, et Didimi Alexandrini marmorum et lignorum mensurae, ed. A. Maio. Mediolani. 1819. in-fol.

Сочиненіе Дидима въ послѣднее время было напечатано при сочиненіи Герона: Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquae accendunt Didimi Alexandrini mensurae marmorum ect. Edidit F. Hultsch. Berlin. 1864.

Нѣкоторые ученые полагаютъ, что упомянутый нами Дидимъ и Дидимъ александрійскій грамматикъ, современникъ Августа, одно лицо. На сколько это вѣрно нельзя сказать. По словамъ Сенеки грамматикъ-Дидимъ написалъ болѣе 4000 сочиненій.

Изъ другихъ математиковъ Византійской школы упомянемъ еще слѣдующихъ:

Іоаннъ Педисіамусъ, жившій въ началѣ XIV в., написалъ сокращенную Геометрію.

Георгій Пахимеръ написалъ сочиненіе „О недѣлимыхъ линіяхъ“ (Περὶ ἀτόμων γραμμῶν) *).

Пселлусъ, жившій между X и XII вв., авторъ ничтожнаго сочиненія „О четырехъ частяхъ математики“ **).

Варлаамъ, греческій монахъ, написалъ около 1330 г. комментаріи на первыя книги „Началъ“ Евклида. Кромѣ того онъ авторъ сочиненія: „Λογιστικῆς“ ***), въ которомъ показаны способы дѣйствій надъ дробями и шестидесятичное дѣленіе, бывшіе въ употребленіи между Греками. Варлаамъ считался свѣдущимъ математикомъ. Онъ былъ посланъ императоромъ Андроникомъ къ папѣ въ Авиньонъ для переговоровъ относительно соединенія церквей. Варлаамъ давалъ уроки греческаго языка Петраркѣ.

Максимъ Планудъ, греческій монахъ, написалъ комментаріи на первыя двѣ книги „Ариѳметикъ“ Діофанта. Комментаріи эти были впервые напечатаны Ксиландеромъ при его изданіи сочиненій Діофанта. Кромѣ того Планудъ написалъ сочиненіе „Объ ариѳметикѣ Индусовъ“ (Ψηφοφορία κατὰ Ἰνδοὺς) ****) и другое сочиненіе „О пропорціяхъ“.

Максимъ Планудъ былъ посланникомъ Андроника II въ 1327 г. при Венеціанской республикѣ.

Исаакъ Аргирусъ, греческій монахъ, авторъ многихъ сочиненій, изъ которыхъ болѣе извѣстны слѣдующія: „Геодезія“—это сочиненіе по практической Геометріи, „Обращеніе непрямоугольныхъ треугольниковъ въ прямоугольные“; „Схоліи“ на первыя шесть книгъ „Началъ“ Евклида; „Пасхальный канонъ“ (Πασχάλιος Κανὼν), написанное около 1373 г. *****).

---

*) Сочиненіе это было издано въ 1629 г. въ Парижѣ Шегомъ (Schegk).

**) Сочиненіе это было напечатано въ 1556 г. подъ заглавіемъ „De quatuor disciplinis mathematicis“.

***) Сочиненіе это было издано съ греческимъ и латинскимъ текстомъ, подъ заглавіемъ: „Logisticae libri VI“ въ Страсбургѣ въ 1572 г., а затѣмъ въ Парижѣ въ 1600 г. со схоліями Шамбера (Chambers).

****) Сочиненіе это впервые было издано въ Галле въ 1865 г. Гергардомъ.

*****) Сочиненіе это было издано въ 1611 г. съ латинскимъ переводомъ Іакова Христіана. Во многихъ библіотекахъ Европы находятся рукописныя сочиненія Аргируса. Большая часть изъ нихъ астрономическаго содержанія.

Изъ рукописныхъ сочиненій Аргируса, математическаго содержанія, извѣстны слѣдующія: „De extractione radicis quadraticae quadratorum irrationalium“. „Compendium geodesiae seu de dimensione locorum methodus brevis ac tuta“. „Theoremata de triangulis“, „De

Римляне.

Мы видѣли, до какой высокой степени развитія достигла Геометрія у Грековъ; также прослѣдили состояніе этой науки у Индусовъ, тѣмъ болѣе намъ покажется теперь страннымъ, тотъ низкій уровень познаній по Геометріи и математическимъ наукамъ вообще, которымъ обладали Римляне; еще Цицеронъ говорилъ, что его соотечественники мало занимаются Геометріей *).

Математическими науками Римляне занимались только для практическихъ цѣлей; Геометріей они занимались только въ примѣненіи ея къ разграниченію и измѣренію полей. Отдѣльныхъ сочиненій по Геометріи, за исключеніемъ „Геометріи" Боэція, до насъ не дошло. Геометрія входила, какъ составная часть въ Энциклопедіи, предметомъ которыхъ были „artes liberales" **). Самыя древнія сочиненія, дошедшія до насъ, въ которыхъ мы находимъ геометрическія свѣдѣнія, это сочиненія римскихъ землемѣровъ ***),

---

dimensione triangulorum aliarumque figurarum". „De inventione quadrangularium laterum". „De figuris non rectangulis ad rectangulas reducendis".

*) Цицеронъ говоритъ: „In summo honore apud Graecos geometria fuit; itaque nihil mathematicis illustrius: at nos ratiocinandi metiendique utilitate hujus artis terminavimus modum". Cicero, tuscul. disput. lib. I. Какой взглядъ, на математическія науки вообще, существовалъ у Римлянъ, можно видѣть изъ заглавія одной изъ главъ (C. IX, 18) Кодекса Юстиніана, именно: „De maleficis et mathematicis et ceteris similibus", въ этой главѣ между прочимъ, говорится: „Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino". Впрочемъ, немного далѣе, въ той же главѣ, говорится: „Artem Geometriae discere atque exercere publice interest".

Лапласъ прекрасно охарактеризовалъ состояніе точныхъ наукъ у Римлянъ, слѣдующими словами: „Rome, pendant longtemps le séjour des vertus, de la gloire et des lettres, ne fit rien d'utile aux sciences. La considération attacheé, dans cette république, à l'éloquence et aux talents militaires, entraîna tous les ésprits. Les sciences, n'y présentant aucun avantage, durent être négligées au milieu des conquêtes que son ambition lui fit entreprendre, et de ses querelles intestines qui produisirent enfin les guerres civiles dans lesquelles son inquiète liberté expira, et fut remplacée par le despotisme souvent orageux de ses empereurs. Le déchirement de l'empire, suite inévitable de sa trop vaste étendue, amena sa décadence; et le flambeau des sciences, éteint par les irruptions des barbares, ne se ralluma que chez les Arabes". *Oeuvres de Laplace.* T. VI. Exposition du système du monde pag. 392.

**) Семь свободныхъ искусствъ составляли: грамматика, діалектика, риторика, геометрія, ариѳметика, астрономія и музыка.

***) Весьма интересныя свѣдѣнія о римскихъ землемѣрахъ находятся въ *Арцеріанской рукописи*, принадлежащей Вольфенбюттельской библіотекѣ. Рукопись эта написана полагаютъ въ VI или VII вѣкѣ. Первыя извѣстія о этомъ замѣчательномъ памятникѣ относятся къ 1000 г., когда рукопись эта принадлежала знаменитому монастырю Боббіо (Bobbio), находя-

носившихъ названіе—gromatici. Въ сочиненіяхъ этихъ изложены правила и пріемы при помощи которыхъ землемѣры измѣряли и разграничивали поля*). Объ опредѣленіяхъ и первоначальныхъ геометрическихъ понятіяхъ, въ этихъ сочиненіяхъ нѣтъ и помину. Правила формулированы безъ всякихъ доказательствъ, а читатель долженъ довольствоваться численнымъ примѣромъ, рѣшеннымъ безъ всякой точности и большею частью неясно. По своему содержанію, почти всѣ эти сочиненія могутъ быть раздѣлены каждое на двѣ части, въ одной изложены правила и пріемы для вычисленій, а въ другой изложено само измѣреніе полей. Правила и пріемы для измѣреній, даны для самыхъ простыхъ фигуръ; пиѳагорова теорема примѣняется весьма рѣдко. Сравнительно чаще, встрѣчаются формулы, данныя Герономъ, именно: выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ; приближенное выраженіе для площади равносторонняго треугольника; а также выраженіе для площади сегмента. Площадь равносторонняго треугольника римскіе геометры полагали ровной половинѣ площади квадрата, построеннаго на одной изъ его сторонъ, т. е. если a сторона такого треугольника, то его площадь равна $\frac{a^2}{2}$. Выраженіе данное Герономъ для площади равносторонняго треугольника въ сочиненіяхъ римскихъ землемѣровъ полагаютъ равнымъ $\frac{a^2}{4}\cdot\frac{26}{15}=\frac{13a^2}{30}$ **), вмѣсто точнаго выраженія $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; принимая выраженіе римлянъ, находимъ $\sqrt{3}=\frac{26}{15}$, а слѣдовательно $\sqrt{675}=26$***). Кромѣ этихъ выраженій для площади равносторонняго треугольника, мы находимъ еще одну формулу вполнѣ принадлежащую однимъ только римлянамъ, это выраженіе для этой площади въ видѣ $\frac{1}{2}(a^2+a)$; происхожденіе этого выраженія

щемуся въ Ломбардіи, недалеко отъ Піаченцы. Въ 1494 г. рукопись эта была перевезена въ Римъ; послѣ этого она переходила изъ рукъ въ руки; побывала въ Польшѣ, Гренингенѣ, Утрехтѣ и наконецъ была куплена Вольфенбюттельской библіотекой въ 1663 г. Наполеонъ въ 1807 г. перенесъ ее въ Парижъ; но въ 1814 г. она была возвращена Вольфенбюттельской библіотекѣ, гдѣ она находится и въ настоящее время и составляетъ одну изъ самыхъ драгоцѣнныхъ рукописей, тамошней коллекціи манускриптовъ. Рукопись эту подробно изслѣдовали Блуме и Лангъ; она состоитъ изъ 157 листовъ пергамента in-4.

Мы привели исторію этой рукописи для того, чтобы показать судьбу многихъ подобныхъ памятниковъ наукъ, которые во время подобныхъ странствованій пропали безслѣдно.

*) Интересныя свѣдѣнія о римскихъ землемѣрахъ находятся въ сочиненіи: Gromatici veteres. Die Schriften der römischen Feldmesser herausgegeben und erl. von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Bd. I—II. Berlin. 1848—52.

**) Выраженіе это встрѣчается въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ по практической Геометріи, написанныхъ въ XVI и XVII столѣтіяхъ.

***) Неточное выраженіе для площади треугольника встрѣчается также въ сочиненіи Колумелла (Columella) „De re rustica Libri XII“, жившаго въ I в. по Р. Х.

становится понятнымъ, когда мы находимъ подобное же выраженіе для площади правильнаго семиугольника, коего сторона равна a, именно $\frac{1}{2}(5a^2-3a)$. Выраженіе $\frac{a^2}{4}$ вѣроятно было заимствовано у египетскихъ землемѣровъ, которые пользовались формулой $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$, для вычисленія площади всякаго четыреугольника. Эти немногія геометрическія познанія были все извѣстное по Геометріи римскимъ землемѣрамъ. Заглавія сочиненій, написанныхъ римскими землемѣрами, равно какъ ихъ имена мы не станемъ приводить; сочиненія эти не заключаютъ ничего особеннаго и по своему содержанію крайне ничтожны.

Мы вкратцѣ перечислимъ имена нѣсколькихъ знаменитыхъ римлянъ, занимавшихся науками, написавшихъ сочиненія по Геометріи или въ сочиненіяхъ которыхъ видно ихъ знакомство съ этой наукой.

Варронъ (Marcus Terentius Varro) другъ Помпея, Цицерона и Цезаря жилъ между 116 и 27 гг. до Р. Х., по справедливости считался однимъ изъ самыхъ ученыхъ людей своего времени; современники называли его *вторымъ* Платономъ. Варронъ обладалъ одною изъ самыхъ большихъ библіотекъ и по своимъ собственнымъ словамъ написалъ болѣе 490 сочиненій. Большая часть этихъ сочиненій относится къ грамматикѣ и къ сельскому хозяйству. Онъ написалъ также сочиненія по Геометріи, астрономіи и ариѳметикѣ; къ сожалѣнію сочиненія эти до насъ не дошли *). По словамъ Кассіодора, въ

---

*) Въ дошедшемъ до насъ сочиненіи „Аттическія ночи“ (Noctes atticae), написанномъ въ началѣ II в. Авлу-Геллiемъ (Aulus Gellius), находятся выписки изъ математическихъ сочиненій Варрона; такъ напр. въ Гл. XIV, Т. III упомянутаго сочиненія, приведено опредѣленіе прямой линіи, данное Варрономъ; опредѣленіе это слѣдующее: „прямая линія есть извѣстная длина, не имѣющая ни ширины, ни глубины“. Въ этомъ сочиненіи приведены выписки изъ другихъ сочиненій Варрона, изъ которыхъ можно видѣть, что Варронъ приписывалъ числамъ мистическія свойства, подобно пиѳагорейцамъ. Говоря о числѣ семь (Гл. XVI, Т. III) Авлу-Геллій указываетъ на замѣчательныя свойства этого числа, при чемъ приводитъ слѣдующую выписку изъ сочиненія Варрона: „Недѣли или Картины“ (Hebdomades vel de Imaginibus), въ которой сказано: „у дѣтей зубы выростаютъ въ теченіи первыхъ семи мѣсяцевъ, недѣля имѣетъ семь дней, существуетъ семь чудесъ свѣта, семь мудрецовъ, семь общественныхъ игръ въ циркахъ, семь полководцевъ осаждали Ѳивы, на небѣ число это образовало Большую и Малую Медвѣдицы, а также Плеяды; наибольшій ростъ, до котораго достигаетъ человѣкъ, семь футовъ, отъ недостатка пищи умираютъ на седьмой день; число семь имѣетъ важное значеніе при кровообращеніи; во время болѣзней, самые опасные дни седьмой, четырнадцатый и двадцать первый; и т. д.“. Въ заключеніи главы „О числѣ семь“, въ сочиненіи Авлу-Геллія, приведены слова самаго Варрона: „я прожилъ семь разъ двѣнадцать лѣтъ, написалъ семь разъ семьдесятъ двѣ книги, изъ которыхъ большая часть погибла, съ тѣхъ поръ какъ назначено вознагражденіе за мою голову, я покинулъ свою библіотеку и всѣ книги мои разсѣяны“.

своемъ сочиненіи по астрономіи, Варронъ представлялъ себѣ землю, какъ имѣющую форму яйца.

Витрувій (Marcus Vitruvius Pollio), жившій во время Августа, обнаружилъ свои математическія познанія въ своемъ сочиненіи „Архитектура“ въ 10 книгахъ *). Сочиненіе это написано между 15 и 12 годами до Р. Х. Кромѣ этого Витрувій, по порученію Августа, устраивалъ машины для военныхъ дѣлей.

Фронтинъ (Sextus Julius Frontinus), жившій въ концѣ I в. по Р. Х., современникъ Веспасіана и Траяна. Фронтинъ написалъ сочиненіе „О водоснабженіи“ **), а также другое „О военномъ искусствѣ“ ***); императоръ Нерва сдѣлалъ Фронтина завѣдывающимъ всѣми водопроводами города Рима.

Шаль приписываетъ Фронтину сочиненіе по Геометріи, содержаніе котораго измѣреніе поверхностей. Предположеніе свое Шаль основываетъ на отрывкѣ изъ второй книги „Геометріи“ Боэція, содержащей измѣреніе площадей, въ которомъ говорится, что Фронтинъ былъ искусный землемѣръ и что имъ заимствовано изъ его сочиненія многое, заключающееся во второй части „Геометріи“. Подтвержденіе своихъ соображеній Шаль находитъ въ рукописи XI в., хранящейся въ Шартрской библіотекѣ; содержаніе этой рукописи близко подходитъ ко второй книгѣ „Геометріи“ Боэція. Рукопись эта есть самый лучшій памятникъ по Геометріи, а содержаніе ея показываетъ всѣ геометрическія познанія римлянъ. Вотъ вкратцѣ содержаніе этой рукописи:

---

*) Первыя семь книгъ этого сочиненія содержатъ архитектуру, VIII-я гидравлику, IX-я гномонику и X-я механику. „Архитектура“ Витрувія пользовалась большою извѣстностью въ концѣ Среднихъ Вѣковъ и въ началѣ эпохи возрожденія наукъ на Западѣ; она была переведена почти на всѣ европейскіе языки. Намъ извѣстно до 50 изданій этого сочиненія. Въ первый разъ сочиненіе это появилось въ Римѣ, около 1486 г., подъ заглавіемъ: Vitruvii Pollionis ad Caesarem Augustum de Architectura libri decem. in-fol. Издано оно Joa. Sulpicius'омъ. Изъ новѣйшихъ изданій самое лучшее слѣдующее: Les dix livres d'architecture de Vitruve; par Tardieu et Coussin. Paris. T. I—III. 1859. in-4. Также заслуживаетъ вниманія изданіе: Vitruvii de architectura libri decem. Ad antiquissimos codices nunc primum ediderunt Valen. Rose et Her. Müller-Strübing. Leipz. 1867. in-8.

Сочиненіе Витрувія было также издано на русскомъ языкѣ подъ заглавіемъ „Архитектура, Марка Витрувія Поліона, въ 10 книгахъ“; перевели съ французскаго Вас. Баженовъ и Өед. Каржавинъ. Спб. 1790—1797. in-4.

**) Сочиненіе это въ первый разъ было напечатано при „Архитектурѣ“ Витрувія, изданной въ Римѣ около 1486 г., подъ заглавіемъ: Sex. Julii Frontini de Aquis quae in urbem influunt libellus mirabilis. Изъ другихъ изданій этого сочиненія укажемъ еще на напечатанное въ 1496 г., во Флоренціи in fol.

***) Въ первый разъ сочиненіе это появилось въ печати въ 1487 г, in-fol., въ Римѣ, подъ заглавіемъ: Strategematicon libri IV.

1) Вычисленіе высоты треугольника, коего стороны даны; при чемъ для сторонъ даны числа 3, 4, 5.

2) Выраженіе площади треугольника въ функціи его высоты и выраженіе площади треугольника въ функціи его сторонъ.

3) Двѣ формулы, служащія къ построенію прямоугольнаго треугольника въ цѣлыхъ числахъ, при чемъ одна изъ сторонъ дана въ четныхъ или нечетныхъ числахъ, именно:

для нечетнаго числа, $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2+a^2$

для четнаго числа, $\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right]^2=\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2-1\right]^2+a^2$

4) Выраженіе діаметра круга, вписаннаго въ прямоугольный треугольникъ; выраженіе это равно суммѣ двухъ катетовъ безъ гипотенузы.

5) Вычисленіе площадей. квадрата, параллелограмма, ромба и трапеціи.

6) Вычисленіе площадей правильныхъ многоугольниковъ; вычисленіе это основано на ложномъ правилѣ.

7) Отношеніе окружности къ діаметру въ видѣ выраженія $\frac{44}{14}$ или $\frac{22}{7}$.

8) Выраженіе для поверхности шара, равное четыремъ площадямъ большаго круга.

Апулей (Appuleius) изъ Мадуры жилъ 50 лѣтъ спустя Фронтина; онъ воспитывался въ Аѳинахъ и перевелъ на латинскій языкъ сочиненіе по ариѳметикѣ, своего современника Никомаха; къ сожалѣнію сочиненіе это до насъ не дошло, а о немъ упоминаетъ Кассіодоръ. Апулей извѣстенъ какъ романистъ. Онъ авторъ повѣсти „О золотомъ ослѣ".

Андронъ, современникъ Апулея, считался однимъ изъ самыхъ ученыхъ людей своего времени, онъ былъ воспитателемъ императора Марка Аврелія. Нѣкоторые полагаютъ, что Андронъ былъ учителемъ *Зенодора*, который первый писалъ о изопериметрическихъ фигурахъ.

Римляне такъ мало писали сочиненій не только по Геометріи, но вообще по математическимъ наукамъ, что приходится упоминать имена авторовъ, имѣвшихъ самыя поверхностныя познанія по Геометріи; вотъ имена нѣкоторыхъ изъ нихъ: *Св Августинъ*, *Капелла*, *Кассіодоръ*, *Боэцій*, *Исидоръ Севильскій* и др. Разсмотримъ, что они написали:

Блаженный Августинъ, епископъ Гиппонійскій, жившій въ концѣ IV в., считается нѣкоторыми авторомъ сочиненія по Геометріи, но относительно этого сочиненія не существуетъ никакихъ указаній.

Капелла (Martianus Mineus Felix Capella), жившій въ половинѣ V вѣка, родился въ Карѳагенѣ и былъ римскимъ проконсуломъ. Онъ авторъ большаго энциклопедическаго сочиненія „Satira" въ 9 книгахъ; первыя двѣ части этого сочиненія озаглавлены: „Бракосочетаніе Филологіи съ Меркуріемъ", содержаніе ихъ философскій и аллегорическій романъ—введеніе къ остальнымъ семи книгамъ, предметъ которыхъ „septem artes liberales", именно: грамматика, діалектика и риторика съ одной стороны, и Геометрія, ариѳметика, астрономія и музыка—съ другой стороны *). Науки эти во все продолженіе Среднихъ вѣковъ, были основаніемъ схоластическаго ученія; первыя три составляли такъ называемый trivium, а остальныя четыре—quadrivium. Въ этомъ сочиненіи Геометрія состоитъ изъ простаго описанія и опредѣленій линій, фигуръ и тѣлъ. Опредѣленія сдѣланы по Евклиду. Шаль обратилъ вниманіе на то, что въ этомъ сочиненіи еще сохранены греческія названія и термины, тогда какъ въ позднѣйшихъ они замѣнены уже латинскими терминами. Сочиненіе Капеллы написано въ 470 г.

Кассіодоръ (Magnus Aurelius Cassiodorus) былъ министръ остготскаго короля Теодориха, онъ умеръ въ 566 г. Кассіодоръ написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ болѣе извѣстна его энциклопедія: „De institutione divinarum litterarum **)"; содержаніе этого сочиненія trivium и quadrivium и наставленія къ ихъ преподаванію. Геометрія состоитъ изъ перечета терминовъ и ихъ объясненій.

Боэцій (Anicius Manlius Torquatus Severinus Boetius), современникъ Кассіодора, былъ совѣтникомъ Теодориха; онъ родился около 475 г. Обвиненный въ измѣнѣ и въ сношеніяхъ съ греческимъ императоромъ Юстиніаномъ, Боэцій по приказанію Теодориха былъ посаженъ въ темницу въ Павіи (Ticinum), гдѣ въ 525 году былъ удавленъ. Впослѣдствіи христіане придали казни Боэція религіозный характеръ и причислили его къ числу святыхъ, между тѣмъ теперь достовѣрно извѣстно, что Боэцій былъ язычникомъ въ продолженіи всей своей жизни. Боэцій былъ одинъ изъ самыхъ замѣчательныхъ людей своего времени; первоначальное образованіе онъ получилъ въ Аѳинахъ, гдѣ учителемъ его былъ Фотій. Онъ первый познакомилъ своихъ соотечественниковъ съ сочиненіями Аристотеля; комментаріи сдѣланныя имъ, служили въ теченіи многихъ столѣтій къ преподаванію не-

*) Martiani Minei felicis Capellae, Carthaginensis, viri proconsularis, Satyricon, in quo de Nuptiis Philologiae et Mercurii libri duo et de septem artibus liberalibus libri singulares, ect. Въ первый разъ сочиненіе это было напечатано въ Vicentiae въ 1499 г. in-fol. Самое лучшее изданіе этого сочиненія появилось во Франкфуртѣ на Майнѣ, въ 1836 г. in-4.

**) Сочиненіе это помѣщено въ изданіи: M. Aur. Cassiodorus, Opera omnia ect. 1622 in-8. Allobr.

рипатетической философіи. Боэцій первый познакомилъ невѣжественныхъ христіанъ того времени съ сочиненіями по математикѣ и астрономіи ученыхъ, древняго языческаго міра. Изъ сочиненій Боэція для математиковъ заслуживаетъ наибольшаго вниманія его „Геометрія“, состоящая изъ двухъ книгъ *). Первая часть этого сочиненія это вольный переводъ первыхъ четырехъ книгъ „Началъ“ Евклида; въ этой части помѣщено также рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ не представляющихъ ничего замѣчательнаго. Содержаніе второй части -практическая Геометрія, въ ней заключается все то, что и въ рукописи Фронтина. Въ „Геометріи“ Боэція впервые встрѣчается *правильный звѣздный пятиугольникъ*, а въ нѣкоторыхъ спискахъ также и правильный, вписанный въ кругъ, звѣздный *восьмиугольникъ* **).

„Геометрія“ Боэція еще тѣмъ важна, что она впервые знакомитъ западныхъ ученыхъ съ „Началами“ Евклида и въ теченіи нѣсколькихъ столѣтій, до самаго XI в., была единственнымъ сочиненіемъ по Геометріи; всѣ познанія свои по Геометріи ученыя заимствовали изъ „Геометріи“ Боэція, имя же Евклида и его „Началъ“ было имъ неизвѣстно. Кромѣ этого въ „Геометріи“ Боэція находится нѣсколько данныхъ для исторіи Геометріи.

Изъ другихъ математическихъ сочиненій Боэція заслуживаетъ вниманія его „Ариѳметика“, въ двухъ книгахъ, которая почти вся заимствована изъ сочиненія Никомаха. Въ этомъ сочиненіи впервые употреблено слово quadrivium. Въ началѣ своего сочиненія Боэцій говоритъ: „еще древними пиѳагорейцами было установлено, что только изученіе quadrivium'а ведетъ къ основательному знакомству съ философіей“. Въ письмахъ своихъ къ Теодориху Боэцій называетъ: ариѳметику, Геометрію, астрономію и музыку четырьмя входами въ науку.

О геометрическихъ трудахъ *Исидора Севильскаго* мы скажемъ при обозрѣніи развитія Геометріи въ Средніе Вѣка.

---

*) „Геометрія“ въ первый разъ была напечатана при изданіи: Boethius Opera. 1492. in-fol. Въ послѣднее время „Геометрія“ Боэція была издана Фридлейномъ при сочинен. Boethii de instit. arithm., de instit. musica, geometria e mss. ed. Friedlein. Lips. 1867. in-12 Математическія сочиненія Боэція были предметомъ изслѣдованій многихъ ученыхъ, въ числѣ которыхъ назовемъ Кантора и Мартена.

**) Правильный звѣздный восьмиугольникъ былъ найденъ Канторомъ въ рукописи „Геометріи“ Боэція, написанной въ 1004 г. и хранящейся нынѣ въ Бернской библіотекѣ.

Средніе Вѣка.

Мы старались на сколько позволяетъ намъ объемъ предпринятаго нами краткаго историческаго очерка, показать, какъ постепенно Геометрія слагалась въ науку, прослѣдили ея развитіе, шагъ за шагомъ, съ самаго ея зародыша. Мы видѣли какого высокаго развитія достигла Геометрія во время процвѣтанія Александрійской школы, достигшей своего апогея въ эпоху Евклида, Архимеда, Аполлонія, Эратосѳена и др.

Завоеванія Римлянъ, и господство ихъ надъ большею частью государствъ древняго міра, принесли мало пользы для послѣдующаго развитія наукъ. Римляне, какъ мы видѣли, не отличались любовью къ наукамъ, военные подвиги, великолѣпныя постройки и стремленіе къ всемірному господству суть ихъ отличительныя черты.

Послѣ паденія Александріи, взятой въ 47 г. до Р. Х. Юліемъ Цезаремъ, творческій духъ Грековъ начинаетъ все болѣе и болѣе терять въ своей глубинѣ и силѣ; самостоятельныхъ писателей почти нѣтъ, начинаютъ *появлятся* комментаторы, которые всегда указываютъ на упадокъ въ развитіи наукъ. Распаденіе Западной Римской имперіи, нашествіе варваровъ, хаотическое броженіе, въ которомъ находилась почти вся Европа, безпрерывныя войны, религіозный фанатизмъ первыхъ христіанъ, вотъ главныя причины постепеннаго упадка не только математическихъ наукъ, но и всѣхъ наукъ вообще. Ненависть христіанъ къ язычникамъ, выразилась въ ихъ презрѣніи къ наукамъ древнихъ Грековъ; религіозный фанатизмъ и грубое невѣжество не позволяли имъ заимствовать что-либо изъ сочиненій язычниковъ—Евклида, Архимеда, Аристотеля и др. Желая утвердить господство новой религіи, христіане истребляли всѣ сочиненія язычниковъ, они предавали *пламени* сочиненія Аристотеля и другихъ великихъ мыслителей древняго міра; истребляя всѣ сочиненія они стремились къ одной цѣли—распространенію одной книги—Евангелія. Преслѣдованія противъ язычниковъ, начатыя въ IV в. при Ѳеодосіѣ Великомъ, сожженіе библіотекъ, и въ томъ

числѣ знаменитой александрійской библіотеки, нанесли окончательный ударъ александрійской школѣ и окончательно довершили безъ того уже потрясенное развитіе наукъ.

Напрасно язычники искали убѣжища въ Аѳинахъ, этомъ древнемъ центрѣ эллинской культуры, гдѣ они основали Аѳинскую школу, они не могли уже оправиться отъ нанесенныхъ имъ ударовъ и въ VI в. школа эта прекратила свое существованіе. На мѣсто ея возникла новая школа въ Византіи, но школа эта не произвела ни одного сколько-нибудь замѣчательнаго геометра или математика. Византія была погружена во внутренніе раздоры, иконоборство, борьба партій, все это не могло имѣть благотворнаго вліянія на развитіе наукъ. Ученые византійской школы были погружены въ догматическіе споры, грамматики поднимали прѣнія относительно значенія какихъ нибудь словъ, въ то время когда Турки стояли уже у воротъ Константинополя. Наконецъ съ паденіемъ Византіи, взятой Турками въ 1453 г., угасла политическая жизнь Грековъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ прекратила свое ничтожное существованіе и Византійская школа.

Во время этихъ религіозныхъ смутъ и раздоровъ погибли безвозвратно многіе замѣчательные памятники наукъ и искусствъ *). Множество замѣчательныхъ рукописей были обращены въ списки молитвъ и легендъ; написанное на древнихъ пергаментахъ вытравляли и на нихъ писали житія святыхъ. Духовные гимны, баснословныя легенды, комментаріи на Библію и нѣсколько сочиненій о времени празднованія Пасхи,—вотъ единственные памятники науки первыхъ временъ христіанства.

Въ теченіи многихъ столѣтій невѣжество христіанъ было таково, что они не были въ состояніи понимать прекрасныхъ поэтическихъ произведеній Виргилія и Горація, они довольствовались аскетическими стихами, написанными на плохой латыни. Наступаетъ время самаго грубаго невѣжества. Всѣ усилія тогдашнихъ ученыхъ, если только ихъ можно такъ назвать, обращены къ писанію сочиненій религіозно-схоластическаго характера; ре-

---

*) Къ сожалѣнію и въ новѣйшее время пропало не мало драгоцѣннѣйшихъ сочиненій совершенно безслѣдно; такъ напримѣръ, до насъ не дошли сочиненія Леонардо да-Винчи, сочиненіе Тартальи, въ которомъ онъ излагаетъ рѣшеніе уравненій 3-й степени, въ настоящее время совершенно неизвѣстно, хотя оно было напечатано, не существуетъ ни одного экземпляра. Сочиненіе Фибоначчи „О квадратныхъ числахъ", извѣстное еще въ концѣ прошлаго столѣтія, было затеряно и снова отыскано только въ концѣ 1850-хъ годовъ, благодаря стараніямъ Бонкомпаньи. Нѣкоторыя изъ сочиненій Ферма также пропали. Часть сочиненій Паскаля, которыми пользовался Лейбницъ, затеряны. Только благодаря случайности находятся нѣкоторыя изъ драгоцѣнныхъ сочиненій Галилея, докторъ Лами (Lami) въ 1789 г. находитъ ихъ въ лавкѣ колбасника, которому они служатъ вмѣсто обертокъ.

лигіозные споры и раздоры между церквями, вотъ отличительныя черты направленія того времени.

Неизвѣстно до чего достигло бы такое невѣжество, если-бы не появились въ VIII в. Арабы; покоривъ многія изъ государствъ того времени они обращаютъ главное вниманіе и усилія на развитіе наукъ и искусствъ; во всемъ этомъ они достигаютъ высокой степени развитія. Въ скоромъ времени Багдадъ на Востокѣ, а Севилья на Западѣ, дѣлаются центрами учености того времени; туда стекаются ученые изъ самыхъ отдаленныхъ странъ.

Въ X и XI вв. начинается, мало по малу, знакомство народовъ Европы съ сочиненіями Аристотеля, Евклида, Архимеда и другихъ великихъ философовъ древняго міра. Большая часть этихъ сочиненій дѣлается извѣстна Европейцамъ благодаря Арабамъ; при посредствѣ испанскихъ мавровъ и сицилійскихъ сарациновъ сокровища науки древнихъ Грековъ не пропадаютъ безслѣдно. Многіе утверждаютъ, что сочиненія древнихъ Грековъ впервые стали извѣстны Итальянцамъ, благодаря византійскимъ Грекамъ, это несправедливо, ненависть между Римомъ и Византіей, послѣ раздѣленія церквей, была слишкомъ сильна, Греки постоянно смотрѣли на Италіанцевъ какъ на своихъ притѣснителей, а потому трудно допустить, чтобы въ то время Италіанцы заимствовали свои познанія въ наукахъ отъ Грековъ.

Такое плодотворное вліяніе арабской науки продолжается не долго; наступаютъ Крестовые походы и въ теченіи почти двухъ столѣтій народы Европы отвлечены отъ умственнаго развитія. Напрасно искать какихъ-либо математическихъ сочиненій въ это время; наступаетъ эпоха процвѣтанія рыцарскихъ романовъ и сказокъ, и только въ пѣсняхъ трубадуровъ Прованса можно найти слѣды математическихъ познаній того времени *). Почти

---

*) Въ XI и XII столѣтіяхъ трубадуры южной Франціи перелагали на стихи, подобно древнимъ Индусамъ, нѣкоторыя сочиненія по Геометріи и Космографіи. Либри упоминаетъ о сочиненіи по практической Геометріи, написанному въ стихахъ Арно-де-Вилоневъ (Arnaud-de-Villeneuve). Рукопись эта хранится въ Карпентраской библіотекѣ. Въ сочиненіи „Nostradama vite dei poeti Provenzali, tradotte dal Crescimbeni. Roma. 1722. in-4" находятся указанія, какіе именно изъ поэтовъ Прованса занимались математическими науками.

Изъ числа математическихъ сочиненій, написанныхъ въ Средніе Вѣка, въ стихотворной формѣ, укажемъ еще на поэму *de Vetula*, содержаніе которой относиться къ Алгебрѣ. Сочиненіе это почему-то долгое время приписывали Овидію, но Леклеркъ (Leclerc) и Лейзеръ (Leyser) полагаютъ, что оно написано византійскимъ протонотаріусомъ Леономъ, жившимъ въ началѣ XIII вѣка. Авторъ поэмы полагаетъ, что Алгебру заимствовали европейскіе математики отъ Индусовъ. Въ этомъ сочиненіи, въ первый разъ, изложена теорія соединеній при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ на игру въ кости. Шаль въ этомъ видитъ первые зачатки *теоріи вѣроятностей*. Въ сочиненіи этомъ также изложены различныя астрономическія и астрологическія воззрѣнія, заимствованныя у Арабовъ, смѣшанныя съ догматами христіанской рели-

всѣ ученые того времени занимаются астрологіей и магіей, изученіе алхиміи занимаетъ одно изъ видныхъ мѣстъ и всѣ усилія тогдашнихъ ученыхъ направлены къ отысканію философскаго камня и жизненнаго элексира.

До XIII в. опредѣленнаго направленія въ наукахъ не существуетъ, они не имѣютъ еще прочныхъ основаній, умъ человѣка блуждаетъ въ потьмахъ, подчиняясь произволу и случайности, схоластическія воззрѣнія стоятъ на первомъ планѣ, въ изученіи философіи господствуетъ полнѣйшая анархія. Въ это время становятся извѣстны сочиненія Аристотеля, ихъ изучаютъ въ школахъ, философія получаетъ болѣе опредѣленное направленіе, затронуто много новыхъ вопросовъ, кругъ познаній человѣка расширяется и умъ его стремится къ болѣе широкому взгляду на природу; изученіе тривіума и квадривіума выводится изъ школьнаго преподаванія. Является стремленіе къ составленію энциклопедій. Начиная съ конца XII в. подготовляется эпоха возрожденія наукъ и искусствъ. Византія быстро подвигается къ паденію; ученые Греки начинаютъ появляться въ Италіи и приносятъ съ собою уцѣлѣвшія рукописи древнихъ философовъ. Западъ начинаетъ, мало по малу, знакомиться съ драгоцѣнными остатками греческой математики, сочиненія Аристотеля, Евклида, Архимеда, Птоломея и другихъ мыслителей древняго міра, комментируются и дѣлаются предметомъ изученія въ школахъ и университетахъ. Пріобрѣтенныя познанія находятъ тотчасъ же практическое примѣненіе, такъ въ XIII в. венеціанцы впервые прилагаютъ тригонометрію и десятичную систему къ мореплаванію. Въ Италіи начинается процвѣтаніе университетовъ, между которыми самое видное мѣсто занимаетъ университетъ Болонскій, слава его дѣлается всемірною, туда стекаются ученики со всѣхъ концовъ Европы, французы, нѣмцы, испанцы, англичане и др. *). Въ 1202 г. Фибоначчи знакомитъ впервые италіанцевъ съ

гіи. Какъ образецъ сочиненій подобнаго рода, приведемъ отрывокъ изъ упомянутой нами поэмы:

Sed quia de Ludis fiebat sermo, quid illo
Pulchrius esse potest exercitio numerorum?
Quo divinantur numeri plerique per unum
Ignoti notum, sicut ludunt apud Indos,
Ludum dicentes Algebrae, Almucgrabalaeque?
Inter arithmeticos ludos pulcherrimus hic est
Ludus, arithmeticae praxis; descriptio cujus
Plus caperet, quam sufficiat totus liber isto.

Сочиненіе это было напечатано въ 1672 и 1702 гг. Но Либри указываетъ еще на одно изданіе, напечатанное вѣроятно въ Италіи, вскорѣ по изобрѣтеніи книгопечатанія. Заглавіе его: Publii Ouidii Nasionis liber de uetula. Поэма эта была переведена также на французскій языкъ Лефевромъ (Lefebvre) въ началѣ XIV в.

*) Италіанскіе университеты представляли много весьма интересныхъ особенностей.

Алгеброй Арабовъ. Изученіе сочиненій древнихъ греческихъ философовъ и геометровъ считается краеугольнымъ камнемъ всякаго образованія; Данте,

---

Самый древній изъ италіанскихъ университетовъ—Болонскій, онъ существовалъ уже въ 1137 г. Первоначально въ университетахъ было всего только три каѳедры, именно: каноническаго права, юриспруденціи и медицины; позднѣе были учреждены еще двѣ каѳедры: философіи и риторики, а еще позднѣе—астрологіи. Сознавая всю важность университетовъ правительства даровали имъ различныя права и привилегіи; университеты имѣютъ право выдавать степени, имѣютъ собственную цензуру и т. п. Были составлены особенные статуты для университетовъ, по которымъ студенты подчинялись только университетскому начальству; существовалъ свой университетскій судъ, проступки и преступленія студентовъ разбирались ректоромъ, профессорами и канцлеромъ. Правительства, понимая хорошо вредъ происходящій отъ постоянныхъ перемѣнъ въ университетахъ, вслѣдствіе тогдашнихъ постоянныхъ политическихъ неурядицъ, признаютъ права и привилегіи университетовъ неприкосновенными,—университеты находятся подъ покровительствомъ церкви. Въ распоряженіи ректора находится стража, приводящая въ исполненіе постановленія совѣта университета. Студенты составляютъ корпораціи, по національностямъ, во главѣ каждой изъ корпорацій находится ректоръ, выбранный ими изъ своей среды. Корпорація студентовъ вооружена, вслѣдствіе этого нерѣдко они внушаютъ серьезныя опасенія правительствамъ, которыя, часто, самымъ унизительнымъ образомъ заискиваютъ популярность молодежи. Многіе университеты имѣютъ громадное число слушателей, напримѣръ, въ Болонскомъ университетѣ было до 10000 студентовъ. Такое громадное стеченіе молодежи способствовало, не мало, процвѣтанію городовъ. Сначала профессора получали жалованье отъ студентовъ, но впослѣдствіи расходъ по содержанію профессоровъ приняли на себя города, которые кромѣ того выдавали пособія и содержали бѣдныхъ студентовъ. Профессорамъ, подъ страхомъ наказанія, было запрещено принимать отъ студентовъ плату за лекціи, равно запрещалось принимать подарки. Въ нѣкоторыхъ университетахъ, напримѣръ въ Болонскомъ, нѣкоторое время профессорамъ было дозволено читать студентамъ особые курсы за плату, но студенты хотя охотно посѣщали эти курсы, но отъ платы отказывались. Но уже въ XIV в. всѣ расходы по содержанію университетовъ приняли на себя города. Содержаніе университетовъ, въ нѣкоторыхъ городахъ, достигало довольно большой суммы, такъ напримѣръ, Болонія израсходывала ежегодно на университетъ 20000 дукатовъ, половину всѣхъ городскихъ доходовъ. Постоянныхъ профессоровъ не было, ихъ нанимали обыкновенно на 6 мѣсяцевъ, иногда на годъ и болѣе, по истеченіи срока снова заключали условіе. Съ профессоровъ нерѣдко брали клятвы не служить потомъ въ другомъ университетѣ, не уходить до срока; но клятвы эти рѣдко сдерживались. Большая часть профессоровъ уходили въ другіе университеты, какъ только представлялись болѣе выгодныя условія. Въ Виченцѣ въ 1261 г. профессоръ каноническаго права получалъ 500 ливровъ, а медицины 200 ливровъ. Въ Болоніи въ 1325 г. ординарные профессора получали 200 ливровъ, и экстраординарные только 100 л. Нерѣдко знаменитымъ профессорамъ вмѣсто годичнаго жалованья выдавали въ полное распоряженіе довольно крупную сумму денегъ. За всякое новое открытіе или трудъ профессорамъ назначалась прибавка, но часто важнымъ трудомъ считали комментаріи на книгу Іова и т. п. Нѣкоторые профессора такъ привыкали къ своимъ университетамъ, что не смотря на самыя выгодныя предложенія со стороны другихъ университетовъ, они оставались до самой смерти въ одномъ и томъ же городѣ. Выдавать степень доктора впервые началъ университетъ Флорентійскій въ 1303 г. Большой славой пользовался университетъ Неаполитанскій, которому Фридрихъ II даровалъ много льготъ, въ томъ числѣ имъ основана каѳедра анатоміи, первая

Петрарка, Бокаччіо, Тассо *) основательно изучили „Начала“ Евклида. Къ сожалѣнію въ университетахъ, на ряду съ изученіемъ Геометріи, видное мѣсто занимаетъ астрологія. Каѳедра астрологіи считается необходимою принадлежностью каждаго университета **). Причину этого надо вѣроятно

по этой наукѣ. Сынъ Фридриха II Конрадъ основалъ Салернскій университетъ, пользовавшійся большою извѣстностью; окончить этотъ университетъ считалось великой честью. Иногда университетамъ были дарованы самыя странныя, по видимому, права, напримѣръ Феррарскому университету въ XV в. было разрѣшено производить ежегодно по одному анатомическому вскрытію; на обязанности градоначальника лежало доставить трупъ. Не надо забывать, что въ то время занятіе анатоміей и вскрытіе труповъ запрещалось уставами церкви. Весьма интересны также отношенія между профессорами и студентами. Въ Падуанскомъ университетѣ профессоровъ выбирала комиссія, состоящая изъ членовъ, выбранныхъ между студентами. Въ Версейльскомъ университетѣ жалованье профессорамъ опредѣлялось коммисіей, состоящей изъ двухъ граждан города, и изъ двухъ студентовъ. Иногда студенты отказывались признавать профессоровъ, назначенныхъ самимъ университетомъ, такъ было въ Римѣ въ 1319 г., студенты не признали назначеннаго профессора, а пригласили своего кандидата. Каѳедра астрологіи считалась одною изъ самыхъ важныхъ, профессора астрологіи называли necessarissimum, они пользовались большимъ почетомъ, но иногда кончали жизнь свою весьма трагически, такъ напримѣръ, профессоръ астрологіи Cecco Ascoli, въ Болонскомъ университетѣ, былъ приговоренъ въ 1327 г. къ сожженію на кострѣ. Студенты подвергались экзаменамъ, но въ чемъ они состояли, въ точности неизвѣстно; есть документы, по которымъ видно, что въ 1335 г. испытанія производились въ Римскомъ университетѣ. Съ теченіемъ времени привилегіи и права университетовъ стѣсняются и многіе университеты въ XV столѣтіи доходятъ до такого состоянія, что студенты принуждены слушать лекціи, сидя на соломѣ.

Ни у одного народа нѣтъ столько сочиненій, относящихся къ исторіи университетовъ, какъ у Италіанцевъ. Изъ числа такихъ сочиненій мы укажемъ на слѣдующія, изъ которыхъ извлечены приведенные выше факты: *Origlia*, Storia dello studio di Napoli. Napoli, 1753, 2 vol. in-4. *Fabroni*, Historia academiae Pisanae. Pisis, 1791, 3 vol. in 4. *Muratori*, Antiquit. italic. Mediolani, 1740, 6 vol. in-fol. *Baldi*, Cronica de Matematici, overo epitome dell' istoria delle vite loro. Urbino, 1707, in-4. *Tiraboschi*, Storia della letteratura Italana. Venezia, 1795, 16 vol. in-8. *Ghirardacci*, Storia di Bologna. Bologna 1596—1669, 2 vol. in-fol. *Papadapoli*, Historia gymnasii Patavini, Veneti. 1726, 2 vol. in-fol *Facciolati*, De gymnasio patavino syntagmata XII, ex ejusdem gymnasii fastis exerpta. Patavii, 1752 in-8. *Facciolati*, Fasti gymnasii patavini. T. I—II. Patavii, 1757 in-4. *Renazzi*, Storia dell' università di Roma; Roma 1804, 4 vol. in-4.

*) Тассо ученикъ Коммандина.

**) Многіе изъ профессоровъ астрономіи занимались также астрологіей. Изъ числа такихъ профессоровъ болѣе извѣстны: *Манфреди* (Manfredi), написавшій въ 1474 г. сочиненіе „De homine“; *Біанкини* (Bianchini), написавшій десять сочиненій по ариѳметикѣ, по алгебрѣ, по Геометріи, онъ находился въ перепискѣ съ Регіомонтанусомъ, *Понтанусъ* (Pontanus) извѣстный знатокъ астрономіи древнихъ, *Тосканелла* (Toscanella), составившій астрономическія таблицы и устроившій въ соборѣ, во Флоренціи, самую большую изъ существующихъ меридіанныхъ линій *Доминикъ Новара* (Novara), профессоръ въ Болоньѣ, опредѣлившій снова положеніе звѣздъ, находящихся въ „Альмагестѣ“ и первый высказавшій мысль о колебаніи земной оси. Новара былъ учителемъ Коперника. Извѣстный *Фракасторо* (Fracas-

искать въ странномъ суевѣріи того времени, многіе изъ самыхъ образованныхъ людей вѣрили въ нечистую силу, предсказаніе будущаго, магію и т. п. *).

Состояніе, въ которомъ находились математическія науки въ Средніе Вѣка прекрасно видно изъ дошедшихъ до насъ свѣдѣній о преподаваніи этихъ наукъ въ университетахъ. Укажемъ только на нѣкоторые университеты. Въ Болонскомъ университетѣ профессоръ астрологіи, излагалъ не только астрономію, но также ариѳметику и Геометрію; всѣ эти науки составляли одну каѳедру. Извѣстно, что еще въ 1466 г. Фонди (Fondi), занимавшій въ Болонскомъ университетѣ **) каѳедру астрологіи и астрономіи читалъ и объяснялъ „Liber Algorisimi de minutis et integris". Впрочемъ, нужно замѣтить, что съ 1383 г. извѣстны въ Болонскомъ университетѣ доценты, которые читали ариѳметику, Геометрію и объ абакусѣ; въ чемъ состояли эти чтенія неизвѣстно навѣрное. При изложеніи астрономіи главнымъ и основнымъ источникомъ служило сочиненіе Сакробоско „Tractatus de sphaera materiali", написанное въ XIII в. Точно въ такомъ же видѣ находилось преподаваніе въ университетахъ Пизанскомъ и Падуанскомъ. При чтеніяхъ Астрономіи пособіемъ служилъ не „Альмагестъ" Птоломея, а его „Quadripartitum", сочиненіе астрологическаго содержанія.

Въ Парижскомъ университетѣ ***) преподаваніе математическихъ наукъ

---

toro), умершій въ 1553 г., былъ не только знаменитый астрономъ, но занимался также астрологіей. Фракасторо былъ человѣкъ обширныхъ свѣдѣній, онъ писалъ прекрасные латинскіе стихи, былъ ботаникъ, философъ, математикъ. Многія явленія онъ объяснялъ взаимодѣйствіемъ атомовъ; онъ полагалъ, что всѣ тѣла взаимно притягиваются; причиною магнитныхъ, электрическихъ и физіологическихъ явленій онъ считалъ начало невѣсомости. Нѣкоторые приписываютъ ему первому мысль устройства астрономическихъ трубъ. Онъ много написалъ сочиненій, изъ нихъ болѣе извѣстны „De Sympathia et Antipathia", „Homocentres" и „De anima". Фракасторо умеръ въ Веронѣ въ 1553 г.

Каѳедра астрологіи существовала въ Болонскомъ университетѣ съ 1125 г., каѳедры же астрономіи впервые основаны въ италіанскихъ университетахъ въ началѣ XV в. Часто профессора астрологіи переходили на каѳедру медицины, такъ какъ отъ медиковъ требовалось знаніе астрологіи. Также нерѣдко случалось, что профессора астрологіи читали логику и метафизику.

*) Великій Кеплеръ занималъ должность придворнаго астролога. Кольберъ пишетъ въ письмѣ Гевелію, что Людовикъ XIV назначаетъ ему пенсію, за его обширныя и ученыя познанія въ астрологіи.

**) Состояніе математическихъ наукъ въ Болонскомъ университетѣ прекрасно изложено въ сочиненіи *Gherardi* „Di alcuni materiali per la Storia della Facoltà Matematica nell' antica Università di Bologna". Помѣщено въ „Annali delle Scienze Naturali di Bologna. T. V. 1846. Bologna. Сочиненіе это также переведено на нѣмецкій языкъ *Curtze* и помѣщено имъ въ „Archiv der Mathematik und Physik" за 1871 г. T. 52, Greifswald.

***) Изъ другихъ европейскихъ университетовъ наибольшею извѣстностью пользовался въ Средніе Вѣка университетъ Парижскій; онъ пользовался обширными привилегіями, и въ

находилось на весьма низкой степени, что видно изъ программы 1336 г., когда университетъ былъ преобразованъ. Въ этой программѣ сказано, что „никто не получитъ ученой степени, не прослушавши aliquos libros mathematicos“, тоже самое требованіе снова повторено въ программахъ 1452 и 1600 гг. Въ предисловіи къ одному изъ комментаріевъ къ первымъ шести книгамъ „Началъ“ Евклида, изданныхъ въ 1536 г., сказано, что „никто не получитъ степени магистра прежде, чѣмъ докажетъ, что онъ знакомъ съ „Начала“ Евклида“. Пониманіе этого сочиненія не требовалось, такъ какъ экзаменовъ не существовало. Профессора при чтеніи лекцій ограничивались лишь первой книгой „Началъ“; само названіе magister matheseos указываетъ, что теорема Пиѳагора, т. е. 47-е предложеніе I-й книги, считалось предѣломъ познаній въ Геометріи. Какъ мало было обращено вниманія на изученіе Геометріи въ Парижскомъ университетѣ видно уже изъ того, что еще въ 1534 г. студенты изучали Геометрію по сочиненію Боэція, которое приписывали Евклиду Мегарскому. Первый обратившій вниманіе на преподаваніе Геометріи въ Парижскомъ университетѣ былъ Рамусъ, основавшій первую каѳедру математики въ College de France, но не смотря на всѣ его старанія каѳедра математики долгое еще время находилась въ весьма плачевномъ состояніи. Рамусъ желалъ ввесть „Начала“ Евклида въ университетское преподаваніе, но этому рѣшительно воспротивились профессора, находя, что „это сочиненіе пустое и не заключаетъ ничего порядочнаго“ *).

Въ какомъ состояніи находилось преподаваніе Геометріи въ Вѣнскомъ университетѣ можно видѣть изъ того, что въ 1460 г. Регіомонтанусъ, будучи доцентомъ при каѳедрѣ математики, излагалъ студентамъ I-ю книгу „Началъ“ Евклида.

Въ сравнительно лучшемъ состояніи было преподаваніе математическихъ наукъ въ Пражскомъ университетѣ. Въ 1384 г. для полученія степени бакалавра отъ студентовъ требовалось прослушать сочиненіе Сакробоско „О шарѣ“. Для полученія степени магистра, кромѣ знанія первыхъ шести книгъ „Началъ“ Евклида, требовалось знаніе квадривіума, теоріи музыки и нѣкоторыхъ отдѣловъ прикладной математики. Студенты были обязаны прослушать курсъ „Theorica planetarum“, который читался по весьма распро

рѣшеніи государственныхъ вопросовъ короли часто прибѣгали къ его совѣтамъ, такъ напримѣръ, извѣстно, что король Филиппъ Красивый, задумавъ истребленіе тампліеровъ, предварительно посовѣтывался относительно этого съ университетомъ, а между тѣмъ извѣстно, что этотъ король не признавалъ власти папы.

*) Много интересныхъ данныхъ о преподаваніи математическихъ наукъ, и наукъ вообще, въ Парижскомъ университетѣ, находится въ сочиненіи *Crevier* „Histoire de l'université de Paris“, 1761. Paris. T. I—VII, in-8, а также въ сочиненіи *Bulaeus* „Historia universitatis parisiensis ect. T. I—VII, Paris. 1665—73. in-fol.

странному тогда сочиненію, написанному Герардомъ Кремонскимъ, на которое сильно нападалъ Регіомонтанусъ. Кромѣ того студенты слушали курсъ „**Perspectiva communis**", т. е. Оптики. Въ XIV столѣтіи въ Пражскомъ университетѣ читали курсы „О альманахѣ", „**Computus cyrometricalis**", въ которомъ всѣ вычисленія производились еще по пальцамъ; курсъ „**Algorismus de integris**" и курсъ Ариѳметики. Но болѣе всего славился Пражскій университетъ тѣмъ, что тамъ читался и объяснялся „Альмагестъ" Птоломея.

Въ подобномъ же состояніи находилось преподаваніе въ Лейпцигскомъ и Кельнскомъ университетахъ, съ тою только разницею, что напр. въ XVI ст. въ Лейпцигскомъ университетѣ при чтеніи лекцій служили руководства, которыми пользовались въ Пражскомъ университетѣ еще въ концѣ XIV столѣтія.

Такому быстрому развитію наукъ въ XIV и XV вв. не мало способствовали рядъ блистательнѣйшихъ открытій, которыя совершенно пересоздають строй общества и измѣняютъ нравы; одно открытіе быстро слѣдуетъ за другимъ: изобрѣтеніе пороха и огнестрѣльныхъ оружій наноситъ послѣдній ударъ рыцарству и своеволію феодаловъ; Гутенбергъ изобрѣтаетъ книгопечатаніе,—этотъ могущественный рычагъ для умственнаго развитія народовъ *); Колумбъ открываетъ Америку, а Васко-де-Гама торговый путь въ Индію,—и тѣмъ полагаютъ новый экономическій порядокъ во всей Европѣ. Все это оказываетъ громадное вліяніе на развитіе и успѣхи точныхъ наукъ. Наконецъ, появляется реформація, стремящаяся вынесть науки изъ подъ опеки Церкви.

---

*) Въ первое время открытія книгопечатанія наиболѣе славились своими типографіями слѣдующіе города: Венеція, Базель, Женева, Майнцъ, Лейденъ, Страсбургъ и Парижъ Наибольшей извѣстностью пользовалась типографія Венаторіуса (Venatorius) въ Базелѣ. Первая книга, напечатанная при помощи подвижныхъ буквъ, на которой выставленъ годъ, Календарь, изданный въ 1457 г. въ Майнцѣ; въ томъ же году тамъ издана Псалтырь. Извѣстны книги, напечатанныя раньше, но на нихъ не выставленъ годъ. Къ числу ихъ принадлежитъ Библія, напечатанная въ Майнцѣ между 1452 и 1455 гг. Гутенбергомъ, а также различнаго рода контракты, напечатанные около 1441 г., какъ полагаютъ въ Голландіи. Книги эти напечатаны подвижными буквами, неподвижными-же буквами печатали уже въ 1420-хъ годахъ. Первая печатная математическая книга, въ которой въ первый разъ мы находимъ чертежи въ текстѣ, это „Начала" Евклида, напечатанныя въ Венеціи, въ 1482, Егардомъ Ратольдомъ. Сочиненіе это озаглавлено: Proclarissimus Liber Elementorum Euclidis, perspicacissimi in artem geometrie incipit quam felicissime. Чертежи въ этомъ сочиненіи вырѣзаны на металлѣ.

Много интересныхъ свѣдѣній о началахъ книгопечатанія можно найти въ сочиненіяхъ. *Lambinet*, Origine de l'imprimerie d'après les titres authentiques. T. I—II. Paris. 1810. in-8; *Jansen*, Essai sur l'origine de la gravure en bois et en taille douce, ect. T. I—II. Paris. 1808. in-8.

Въ Италіи, гдѣ впервые началась эпоха возрожденія наукъ и искусствъ, появляются Леонардо-да-Винчи, Микель-Анджело, Рафаель, Аріостъ, Данте, Тассо и другіе замѣчательные ученые и художники. Рядомъ съ ними создается школа первокласныхъ математиковъ, представители которой Ферро, Тарталіа, Кардано, Феррари, Галилей и многіе другіе. Изъ Италіи возрожденіе наукъ распространяется и въ другія государства Европы; этому главнымъ образомъ способствуютъ иностранцы—ученики многочисленныхъ италіанскихъ университетовъ. Большая часть ученыхъ того времени были воспитанники италіанскихъ университетовъ, напримѣръ Коперникъ ученикъ Болонскаго университета.

Но въ XV в. мы не можемъ указать ни на одно сколько нибудь замѣчательное сочиненіе по Геометріи и вообще по математикѣ, написанное внѣ Италіи.

Знакомство съ сочиненіями Аристотеля и Арабовъ оказываетъ также во Франціи большое вліяніе на развитіе точныхъ наукъ; здѣсь является стремленіе къ составленію обширныхъ энциклопедій, въ которыхъ были-бы собраны всѣ познанія человѣчества, примѣръ такого сочиненія „Speculum majus" Винцента Бова *).

*) *Винцентъ-де-Бова* (Vincent-de-Beauvais) жилъ въ XIII в. (1200—1264 гг.); по просьбѣ Людовика IX онъ написалъ сочиненіе „Speculum majus", содержащее почти всѣ науки того времени. Сочиненіе это обширная энциклопедія; оно состоитъ изъ 4 главныхъ частей: 1) „Зеркало природы", содержащее его описаніе природы 2) „Зеркало морали"— нравственность; 3) „Зеркало наукъ" содержитъ: физику, философію, теологію, риторику, политику, законовѣденіе и т. п. и 4) „Зеркало исторіи". Французы называютъ это сочиненіе „*Quadruple miroir*".

На энциклопедіи подобнаго рода можно указать и у Италіанцевъ. Почти одновременно съ энциклопедіей Винцента Бова было написано подобное же сочиненіе, учителемъ Данте, *Брунетто Латини* (Brunetto Latini), умершаго въ 1294 г., во Флоренціи. Онъ написалъ сочиненіе „Tesoretto" въ бытность свою во Франціи; сочиненіе первоначально написано на французскомъ языкѣ; сочиненіе это есть извлеченіе изъ Библіи, сочиненій Плинія Младшаго и др., въ немъ мы находимъ много весьма интересныхъ данныхъ, относящихся къ естественнымъ наукамъ и физикѣ; автору извѣстны: шаровидность земли, приливы и отливы, увеличеніе тяжести по мѣрѣ углубленія въ землю и многое другое. Сочиненіе это напечатано въ 1473 г., въ 10 томахъ in fol.

Современникъ Брунетто, *Стабили* (Stabili), болѣе извѣстный подъ именемъ *Cecco d'Ascoli* также написалъ энциклопедическое сочиненіе—поэму Acerba. Сочиненіе это принадлежитъ къ числу самыхъ замѣчательныхъ ученыхъ сочиненій XIII в., оно содержитъ множество любопытныхъ наблюденій различныхъ физическихъ явленій, въ немъ объяснены затмѣнія, много метеорологическихъ наблюденій, говорится объ аэролитахъ, происхожденіи росы, періодическихъ вѣтрахъ, молніѣ, громѣ, автору извѣстно, что звукъ происходитъ отъ сотрясеній воздуха, что скорость свѣта *болѣе скорости звука*, описана радуга, говорится *объ отраженіи тепловыхъ лучей*, мерцаніи звѣздъ, объ окаменѣлыхъ растеніяхъ, объ переворотахъ,

Въ Германіи преобладаетъ такое же направленіе, что видно изъ со-

---

произшедшихъ на земномъ шарѣ и т. п. Изъ всего этого видно, что Асколи былъ хорошій наблюдатель и одинъ изъ самыхъ свѣдущихъ италіанцевъ XIII в. Кромѣ этого сочиненія онъ написалъ нѣсколько другихъ. „Acerba" впервые была напечатана въ Венеціи въ 1510 г.

Въ число италіанскихъ энциклопедій необходимо включить и „Божественную комедію" Данте, родившагося въ 1265 г. во Флоренціи. Безсмертное произведеніе Данте заключаетъ въ себѣ всѣ познанія италіанцевъ въ XIV в. Сочиненіе это важно для всѣхъ: богословы найдутъ много данныхъ для исторіи церкви, филологи—для исторіи италіанскаго языка, философы—знакомятся съ состояніемъ философіи Аристотеля въ XIV в. Данте въ своемъ сочиненіи является самымъ опытнымъ и добросовѣстнымъ наблюдателемъ, ничего не ускользаетъ отъ его вниманія: дѣйствіе солнечныхъ лучей на созрѣваніе плодовъ, движеніе соковъ въ растеніяхъ, въ самыхъ поэтическихъ стихахъ онъ описываетъ сонъ растеній, ему извѣстны тайнобрачныя растенія, онъ знаетъ что ихъ сѣютъ безъ семенъ Данте изслѣдуетъ полетъ птицъ, наблюдаетъ мерцаніе звѣздъ, радугу, образованіе паровъ, дѣйствіе магнита. Данте обыкновенно причисляютъ къ философамъ и поэтамъ, но онъ съ одинаковымъ успѣхомъ занимался астрономіей, ариѳметикой и Геометріей. Онъ имѣетъ степень врача и аптекаря. Художники и живописцы дорожатъ его мнѣніемъ и часто прибѣгаютъ къ его совѣтамъ. Познанія Данте по истинѣ громадны, къ сожалѣнію обращено мало вниманія на научные факты, разсѣянные въ его величественномъ сочиненіи. Кромѣ „Божественной комедіи" Данте написалъ много другихъ сочиненій.

Коснувшись энциклопедическихъ сочиненій, написанныхъ Италіанцами, нельзя не сказать нѣсколько словъ о весьма извѣстномъ сочиненіи „Magia naturalis", написанномъ неаполитанцомъ *Порта* (Porta), въ 1584 г., въ четырехъ книгахъ. Потомъ Порта его постоянно дополнялъ и довелъ до 20 книгъ въ 1589 г. Порта родился въ 1538 г. въ Неаполѣ; знакомство съ сочиненіями древнихъ натуралистовъ возбудило въ немъ любознательность и онъ отправился путешествовать, во время своихъ путешествій онъ познакомился съ большею частью ученыхъ того времени. Возвратясь на родину, въ Неаполь, онъ основалъ „Академію секретовъ", куда принимались только лица, сдѣлавшія какое нибудь открытие, Академія эта есть одно изъ первыхъ ученыхъ обществъ въ Италіи. Впослѣдствіи Порта былъ также членомъ знаменитой Академіи „Lincei". Въ „Натуральной магіи" собрано нѣсколько тысячъ самыхъ разнообразныхъ фактовъ, въ сочиненіи этомъ говорится: о магнетизмѣ, о магнитномъ склоненіи, камерѣ обскурѣ, катоптрикѣ, свойствахъ чиселъ, увеличительныхъ стеклахъ, поваренномъ искусствѣ, химіи, приготовленіи духовъ, приготовленіи ядовъ и ихъ дѣйствіи на организмъ человѣка и мн. др. На ряду съ научными фактами помѣщено множество самыхъ нелѣпыхъ совѣтовъ, какъ напримѣръ: объясненіе, почему происходятъ уроды; кожѣ гіены онъ приписываетъ способность предохранять отъ молніи; кожѣ медвѣдя онъ приписываетъ чудесныя свойства; указанъ способъ производить пѣтуховъ съ четырьмя ногами и четырьмя крыльями; показано устройство лампы, при освѣщеніи которой головы людей имѣли бы видъ лошадиныхъ головъ; и множество глупостей подобнаго рода. Алхимія, магія, астрологія, вотъ науки въ которыя твердо вѣритъ Порта. Сочиненіе Порты пользовалось громадною извѣстностью, оно выдержало много изданій, было переведено на всѣ европейскіе языки и даже на арабскій; оно зачитывалось въ буквальномъ смыслѣ этого слова. Читатели интересовались не физическими явленіями, описанными въ „Натуральной магіи", они болѣе обращали вниманіе на астрологическія предсказанія, на чудеса,—они вездѣ искали сверхестественнаго. Кромѣ этого сочиненія Порта написалъ много другихъ, въ томъ числѣ „О кривыхъ", наце,

чиненій Альберта Великаго, извѣстнаго своими обширными и многосторонними познаніями *).

Въ Испаніи эпоха возрожденія способствуетъ появленію цѣлаго ряда замѣчательныхъ писателей и художниковъ, изъ которыхъ мы упомянемъ имена: Мурилліо, Кальдерона, Лопе-де-Вега, Камоэнса, Сервантеса. Но въ числѣ такихъ писателей нѣтъ ни одного геометра, нѣтъ ни одного сколько-нибудь извѣстнаго математика. Причины почему Испанія не произвела ни одного сколько нибудь извѣстнаго математика или представителя точныхъ наукъ, безъ сомнѣнія заключаются въ ея внутреннемъ государственномъ строѣ; инквизиція—результатъ страшнаго и слѣпаго фанатизма, убивала въ самомъ зародышѣ проявленіе всякой свободной мысли, она не могла терпѣть, а потому не допускала, развитія точныхъ наукъ. Всякое сколько нибудь скептическое отношеніе къ различнымъ вопросамъ влекло за собою пытки и сожженіе на кострѣ. Въ такой странѣ могъ господствовать только самый крайній и грубый мистицизмъ. Такое пренебреженіе къ точнымъ наукамъ оказало не мало вліянія на всю судьбу Испаніи, ни богатства Перу и Мексики **), ни господство надъ многими частями Стараго и всѣмъ

читанное въ 1601 г.; въ этомъ сочиненіи Порта стремится рѣшить задачу квадратуры круга. Изъ этого сочиненія можно заключить, что Порта былъ плохой математикъ. Порта писалъ также комедіи.

*) *Альбертъ Великій* преподавалъ философію во многихъ городахъ и на послѣдокъ въ Парижѣ. Онъ былъ доминиканецъ, умеръ въ 1280 г. Онъ авторъ многихъ сочиненій важныхъ для исторіи Химіи. Болѣе интересна его „Alchimia", показывающая на состояніе этой науки въ XIII в.

**) Мексика и Перу были государства достигшія высокой степени цивилизаціи; покореніе этихъ государствъ Испанцами стерли ихъ съ лица земли. Кортесъ говорилъ о Мексикѣ слѣдующее: „страна эта управляется лучше Испаніи, городъ Мексико больше каждаго изъ нашихъ городовъ; памятники превосходятъ наши". Нѣкоторые города имѣли 30000 домовъ, громадные дворцы, водопроводы, прекрасныя шоссе. Въ городѣ Мексико Испанцы нашли: обширные базары, вмѣщающіе до 60000 посѣтителей, укрѣпленный храмъ громадныхъ размѣровъ, въ которомъ легко могъ-бы помѣститься цѣлый городъ, окруженный 40 башнями, изъ которыхъ самая меньшая была выше колокольни Севильскаго собора, громадные звѣринцы. Существовали суды, коммисія провѣряющая мѣры и вѣсъ, землемѣры; работы художниковъ достигали высокой степени совершенства, хорошія гостинницы, величественные мосты. Читая описаніе государствъ древнихъ Инковъ и Ацтековъ невольно переносишься въ область фантастическихъ разсказовъ Тысячи-и-одной Ночи. Господство Испанцевъ, ихъ грубый произволъ и фанатизмъ быстро довершили распаденіе покоренныхъ ими странъ. Испанцы гордились тѣмъ, что у нихъ были собаки, которыя съѣли болѣе 200 туземцевъ, каждая! Громадныя и великолѣпныя постройки заставляютъ предполагать, что туземцы Америки были основательно знакомы съ архитектурой, а потому они необходимо имѣли геометрическія свѣдѣнія. Постройка громаднаго водостока въ Мексико, большаго римской Cloaca maxima, безъ сомнѣнія требовала геометрическихъ познаній. Къ сожалѣнію о литературѣ древнихъ Мексиканцевъ

Новымъ Свѣтомъ, не могли спасти Испанію отъ того постепеннаго упадка, до котораго она дошла въ настоящее время.

Въ Англіи впервые было обращено вниманіе на изученіе точныхъ наукъ въ XIII в. благодаря извѣстному Рожеру Бекону *), который утверждалъ, что изученіе математическихъ наукъ и опытъ суть единственные пути къ познанію законовъ природы и основательному знакомству съ философіей. Къ сожалѣнію Беконъ не былъ понятъ должнымъ образомъ современниками; еще долго послѣ него продолжала господствовать въ англійскихъ университетахъ аристотелевская философія. Въ изученіи философіи Аристотеля видное мѣсто было отведено схоластическимъ толкованіямъ различныхъ плохихъ комментаріевъ на его сочиненія. Изъ числа англійскихъ университетовъ, наиболѣе славился, въ Средніе Вѣка преподаваніемъ аристотелевской философіи, университетъ Оксфордскій, въ которомъ образованіе получилъ и Беконъ.

Громадные успѣхи, сдѣланные италіанскими математиками въ XIV и XV столѣтіяхъ много способствовали всему послѣдующему развитію Геометріи и математическихъ наукъ вообще. Одни открытія быстро слѣдуютъ за другими. Въ XVI в.: Віетъ первый вводитъ буквы вмѣсто чиселъ и рѣшаетъ буквенныя уравненія; Коперникъ предлагаетъ систему міра, извѣстную подъ его именемъ; Гарріотъ изслѣдуетъ свойства уравненій; Кеплеръ изслѣдуетъ движеніе свѣтилъ; Неперъ находитъ логариѳмы; Галлилей окончательно признаетъ систему Коперника и совмѣстно съ ученикомъ своимъ Торичелли дѣлаетъ множество открытій въ Механикѣ и Физикѣ; Кавалери полагаетъ первыя основы интегральному исчисленію въ своемъ методѣ недѣлимыхъ. Въ XVII столѣтіи: Декартъ создаетъ Аналитическую Геометрію; Паскаль усовершенствуетъ Геометрію; Ферма изслѣдуетъ максимумъ и ми-

---

и Перуанцевъ почти ничего неизвѣстно. Въ недавнее время только начали переводить нѣкоторыя изъ уцѣлѣвшихъ сочиненій, именно драмы. Изъ перуанскихъ сочиненій до насъ дошло только одно, именно драма „Оланта", написанная въ концѣ XV столѣтія. Драма эта переведена на русскій языкъ, съ нѣмецкаго перевода Чуди, и напечатана въ Русскомъ Вѣстникѣ за 1877 г., Май.

*) *Рожеръ Беконъ* родился въ 1214 г. въ Ильчестерѣ (Ilchester), первоначальное образованіе онъ получилъ въ Оксфордскомъ, а потомъ Парижскомъ университетахъ. Въ 1240 г. онъ поступилъ въ орденъ францисканскихъ монаховъ. Беконъ принадлежалъ къ числу самыхъ ученыхъ людей XIII в., онъ зналъ основательно греческій и арабскій языки. Въ особенности много онъ занимался оптикой и химіей. Обвиненный въ магіи и колдовствѣ онъ написалъ сочиненіе „De nullitate magiae", но тѣмъ не менѣе его посадили въ тюрьму, гдѣ онъ пробылъ цѣлыхъ десять лѣтъ. Изъ числа сочиненій Бекона наиболѣе извѣстны. „Perspectiva", „Opus Majus" и еще нѣсколько другихъ, находящихся въ настоящее время въ библіотекѣ Оксфордскаго университета. Бекону приписываютъ нѣкоторые изобрѣтенія пороха и телескопа, но это несправедливо. Беконъ умеръ въ 1292 г.

нимумъ и занимается теоріей чиселъ; Робервалъ излагаетъ теорію касательныхъ; *Лейбницъ* и Ньютонъ находятъ дифференціальное исчисленіе, первый при помощи *безконечно малыхъ*, *второй* при помощи метода флюксій.

Указавъ на общій характеръ состоянія математическихъ наукъ вообще въ Средніе Вѣка, мы разсмотримъ успѣхи по Геометріи, сдѣланные отъ VI в. нашей эры до эпохи возрожденія наукъ на Западѣ, т. е. до конца XV в. Отдѣлъ этотъ будетъ состоять изъ двухъ частей: во первыхъ, обозрѣніе трудовъ, математиковъ, писавшихъ по Геометріи, собственно европейскихъ, и во вторыхъ, состояніе Геометріи у Арабовъ.

Развитіе Геометріи въ Западной Европѣ до возрожденія наукъ.

Мы уже выше указали на состояніе математическихъ наукъ вообще въ Средніе Вѣка на Западѣ, въ настоящее время мы познакомимся съ сочиненіями, написанными въ этотъ періодъ времени. Первый изъ математиковъ, о которомъ мы будемъ говорить, это Исидоръ Севильскій, жившій почти сто лѣтъ послѣ Воэція. Но, какъ мы увидимъ ниже, въ этотъ длинный промежутокъ времени, до самаго XII в., не было написано ни одного сколько нибудь замѣчательнаго сочиненія математическаго содержанія. Только благодаря знакомству европейскихъ ученыхъ съ математической литературой арабовъ въ концѣ XII в. и началѣ XIII в. появляются сочиненія Немораріуса и Фибоначчи, но содержаніе ихъ болѣе относится къ Алгебрѣ, чѣмъ къ Геометріи; причина этому, *безъ сомнѣнія*, то направленіе, которое получило развитіе математическихъ наукъ у арабовъ. Послѣ сочиненій Фибоначчи, который, какъ мы увидимъ ниже, оказалъ громадное вліяніе на все послѣдующее развитіе математическихъ наукъ на Западѣ, особеннаго вниманія заслуживаютъ труды Врадвардина, а потомъ извѣстнаго Регіомонтануса, на сочиненіяхъ котораго мы остановимся болѣе подробно. Познакомившись съ сочиненіями Регіомонтануса, мы разсмотримъ еще труды Вернера и Дюрера, жившихъ въ концѣ XV-го и началѣ XVI-го столѣтій. Обозрѣніемъ сочиненій послѣднихъ двухъ ученыхъ мы закончимъ главу о развитіи математическихъ наукъ на Западѣ до эпохи возрожденія наукъ.

Исидоръ Севильскій, извѣстный подъ именемъ Isidorus Hispalensis'а, родился въ Карѳагенѣ въ 570 г.; въ 601 г. онъ былъ возведенъ въ санъ епископа Севильскаго. Исидоръ авторъ обширнаго сочиненія, въ 20 книгахъ, подъ заглавіемъ „Origenes“ *). Въ самомъ началѣ своего сочиненія Исидоръ всѣ науки дѣлитъ на 7 отдѣловъ, подобно Кассіодору и Боэцію,

*) Сочиненія Исидора изданы подъ заглавіемъ: Opera Isidori Hispalensis edidit F. Arevoli, Roma. 1797—1803. T. I—VII. in-4.

даже порядокъ тотъ же: грамматика, риторика, діалектика, ариѳметика, музыка, Геометрія и астрономія. Почти все сочиненіе состоитъ изъ однихъ только опредѣленій и объясненій различныхъ названій и терминовъ, при чемъ толкованія свои Исидоръ часто ни чѣмъ не подтверждаетъ. Такъ напримѣръ слово centum онъ производитъ отъ греческаго слова kanthos—колесо; decem отъ desmeyein—связывать и т. п. Ариѳметика вся состоитъ изъ опредѣленій чиселъ различныхъ родовъ и дѣленіе ихъ на четныя, нечетныя, линейныя, плоскія и т. п., о вычисленіяхъ нѣтъ и помину. Геометрія и астрономія еще ничтожнѣе, они состоятъ изъ однихъ только опредѣленій.

Исидоръ написалъ кромѣ того много сочиненій по богословію и грамматикѣ. Около себя онъ основалъ цѣлую школу изъ своихъ учениковъ. Нѣкоторое время онъ жилъ въ Римѣ, гдѣ находился въ постоянныхъ сношеніяхъ съ папой Григоріемъ Великимъ. Исидоръ былъ одинъ изъ самыхъ сильныхъ противниковъ аріанства, онъ умеръ въ 636 г. и спустя недолгое время былъ причисленъ къ святымъ.

Беда (Beda), прозванный venerabilis, родился въ 675 г. на границѣ Шотландіи; онъ былъ одинъ изъ самыхъ ученыхъ и образованныхъ людей своего времени Около 680 г. въ мѣстечкѣ, откуда былъ родомъ Беда, однимъ изъ тановъ основаны были два монастыря, во имя св. Павла и св. Петра; настоятелемъ этихъ монастырей былъ ихъ основатель, который принялъ имя Венедикта. Въ одномъ изъ этихъ монастырей къ числу монаховъ принадлежалъ и Беда. При монастыряхъ этихъ находилась большая библіотека, составленная изъ книгъ, привезенныхъ Венедиктомъ изъ различныхъ мѣстъ, во время своихъ многократныхъ путешествій въ Римъ; чтеніе этихъ книгъ, безъ сомнѣнія, оказало большое вліяніе на умственное развитіе Беды и пробудило въ немъ желаніе заниматься науками.

Беда авторъ многихъ сочиненій, въ числѣ которыхъ нѣкоторыя относятся къ математикѣ и астрономіи, но изъ этихъ сочиненій видно, что во время Беды науки эти находились въ самомъ жалкомъ состояніи, такъ напримѣръ при вычисленіи площади треугольника приведена неточная формула, которою пользовались еще римскіе землемѣры. Въ сочиненіяхъ Беды въ первый разъ встрѣчаются ариѳметическія задачи „ad acuendos juvenes“, которыя впослѣдствіи стали входить въ задачники, названныя французами „Récréations mathématiques“. Беда одинъ изъ первыхъ обратилъ вниманіе на несогласіе въ празднованіи Пасхи, съ постановленіемъ Никейскаго собора 325 г. Онъ также первый ввелъ въ Англіи счетъ лѣтоисчисленія отъ Рождества Христова. Сочиненія Беды были изданы нѣсколько разъ *). До

*) Самое лучшее изданіе носитъ заглавіе: Venerabilis Bedae opera quae supersunt omnia edidit Giles. London. 1843. Vol. I -XII, in-8.

насъ дошли имена еще нѣсколькихъ другихъ монаховъ, современниковъ Беды, занимавшихся математическими науками

Алкуинъ (Alcuin), извѣстный на латинскомъ языкѣ подъ именемъ Albinus'а родился въ 735 г. въ Іоркѣ, въ Англіи. Учителемъ Алкуина сначала былъ Егбертъ, а потомъ Аэлбертъ, съ которымъ онъ путешествовалъ въ Римъ для пріобрѣтенія рукописей. Въ 766 г. Алкуинъ сталъ во главѣ школы въ Іоркѣ, мѣсто это онъ занималъ до 781 г., когда послѣ смерти Егберта онъ отправился въ Римъ, получить отъ папы согласіе на утвержденіе преемника Егберта. Во время этого путешествія, въ городѣ Пармѣ, Алкуина увидѣлъ Карлъ Великій и пригласилъ его занять мѣсто при дворѣ, на это предложеніе Алкуинъ согласился въ 782 г. и провелъ при дворѣ цѣлыхъ 14 лѣтъ. Въ 796 г. Алкуинъ оставилъ дворъ Карла Великаго и поселился въ аббатствѣ св Мартина въ Турѣ, гдѣ онъ основалъ ту знаменитую школу, и громадную библіотеку, изъ которой вышли наиболѣе знаменитые и ученые люди слѣдующаго столѣтія. Въ этомъ монастырѣ Алкуинъ умеръ въ 804 г.

Благодаря любознательности къ наукамъ Карла Великаго, многіе изъ его приближенныхъ слѣдовали его примѣру; изученіе различныхъ отраслей знанія вошло при дворѣ въ моду. Такимъ образомъ образовалось цѣлое общество любителей заниматься науками, — нѣчто въ родѣ Академіи. Члены этого общества занимались, главнымъ образомъ, изученіемъ грамматики и возстановленіемъ правильной орѳографіи; также изучали риторику, поэзію, ариѳметику и астрономію. Самымъ дѣятельнымъ членомъ этого общества былъ Алкуинъ. Члены этого общества называли себя различными псевдонимами, такъ напримѣръ Карлъ Великій былъ извѣстенъ подъ именемъ Давида, его совѣтники Ангильбертъ и Амальрикъ подъ именами Гомера и Симпорія; лѣтописецъ императора и вмѣстѣ съ тѣмъ строитель Ахенскаго собора Эйнгардъ — подъ именемъ *Веселеля*, построившаго скинію завѣта; Теодульфъ носилъ имя Пиндара. Самъ Алкуинъ носилъ имя *Flaccus*'а, подъ которымъ онъ былъ извѣстенъ и внѣ общества. При Академіи возникла школа, нѣчто въ родѣ университета. Главнымъ основателемъ школы былъ Алкуинъ. Лекціи его посѣщали не только самыя высокія лица двора, но и самъ Карлъ Великій. Школа эта получила названіе *палатинской* и послужила образцомъ для всѣхъ учрежденій подобнаго рода.

Знакомство съ многочисленными памятниками классической древности, во время пребыванія Карла Великаго въ Италіи, пробудило въ немъ желаніе поднять уровень образованія въ народѣ и стремленіе снова воскресить науки. Однимъ изъ самыхъ дѣятельныхъ его помощникамъ, въ этомъ дѣлѣ, былъ Алкуинъ. По приказанію Карла Великаго во всѣхъ школахъ

было приказано учить мальчиковъ: пѣнію псалмовъ, нотамъ, грамматикѣ и церковнымъ уставамъ. Особенное вниманіе было обращено на изученіе computum'а, т. е. церковнаго лѣтоисчисленія. Въ большихъ монастыряхъ, въ школахъ преподавали также artes liberales и богословіе.

Изученіе ариѳметики было необходимо для церковнаго лѣтоисчисленія, а потому ею занимались, кромѣ того она была нужна въ практической жизни. За то Геометрія, не имѣвшая отношенія къ религіи, въ эпоху когда не существовало ни правильнаго размежевыванія земель и поземельныхъ налоговъ, находилась на самой низкой ступени своего развитія. Геометрія состояла изъ однихъ опредѣленій треугольниковъ, четыреугольниковъ и т. п. Вычисленіе площадей находилось въ такомъ же состояніе какъ при римскихъ землемѣрахъ.

Въ такомъ видѣ представляется математика и въ сочиненіяхъ Алкуина *). Въ немного болѣе удовлетворительной формѣ находится у него Ариѳметика; такъ мы встрѣчаемъ у него цѣлый рядъ ариѳметическихъ задачъ, напоминающій задачи Діофанта. На нѣкоторыя изъ этихъ задачъ мы укажемъ:

1) Три наслѣдника получили 21 бочку, 7 полныхъ вина, 7 полуполныхъ и 7 пустыхъ. Раздѣлить наслѣдство такъ, чтобы каждый изъ наслѣдниковъ получилъ столько же вина, сколько и бочекъ.

2) Раздѣлить 100 мѣръ пшеницы между 100 особами такъ, чтобы каждый мущина получилъ по 3, каждая женщина по 2, а каждое дитя по $^1/_2$ мѣры. Сколько было мущинъ, сколько женщинъ и сколько дѣтей?

Подобныя задачи относятся къ числу неопредѣленныхъ. Зналъ-ли Алкуинъ, что задачи эти допускаютъ нѣсколько рѣшеній—сомнительно, такъ какъ изъ семи рѣшеній второй задачи, онъ даетъ только одно, именно: 11 мущинъ, 15 женщинъ и 74 дѣтей.

Въ другой задачѣ Алкуинъ показываетъ суммованіе ариѳметическаго ряда, при чемъ указываетъ, что сумма двухъ равноотстоящихъ отъ концевъ членовъ, всегда одинакова.

Нѣкоторые ученые, и въ томъ числѣ Шаль, называютъ Алкуина ученикомъ Веды, но это анахронизмъ, такъ какъ Алкуинъ родился въ годъ смерти Веды. Алкуинъ еще замѣчателенъ тѣмъ, что принималъ участіе въ основаніи Парижскаго и Павійскаго университетовъ.

Одонъ (Odon de Cluny), аббатъ монастыря Клюни, принадлежалъ къ числу ученѣйшихъ людей X в. Онъ умеръ въ 943 г. въ Турѣ. Одонъ на-

---

*) Сочиненія Алкуина были изданы нѣсколько разъ. Послѣднее изданіе носитъ заглавіе: Beati *Flacci Albini s. Alcuini* Opera, post primam editionem, a viro clarissimo D. And. Quercetano curatam, ect., cura ac studio *Frobenii*. T. I—II. Ratisb. 1777. in-fol.

писалъ нѣсколько сочиненій по музыки и ариѳметикѣ, а также сочиненіе объ абакусѣ. Изъ содержанія этихъ сочиненій можно заключить, что ему была извѣстна „Геометрія“ Боэція.

Герберть (Gerbert) родился въ первой половинѣ X в. въ Овернѣ, вблизи монастыря Авриллака, въ которомъ онъ получилъ первоначальное образованіе, а потомъ былъ монахомъ. Съ ранней молодости Гербертъ покинулъ родину и отправился въ Испанію изучать науки арабовъ. По возвращеніи изъ Испаніи Гербертъ сдѣлался учителемъ въ монастырѣ, въ Реймсѣ, гдѣ сталъ схоластикомъ. О результатахъ своего путешествія по Испаніи Гербертъ выражается слѣдующими словами, что: „въ математикѣ онъ зналъ достаточно много, но свои познанія по латинскому языку ему слѣдуетъ дополнить“. Гербертъ принадлежалъ къ числу самыхъ умныхъ и замѣчательныхъ людей своего времени; съ именемъ ученаго онъ соединялъ извѣстность знаменитаго діалектика, а также дипломата. Онъ былъ воспитателемъ императора Оттона III. Въ 980 г. Гербертъ сдѣланъ былъ аббатомъ знаменитаго монастыря Боббіо (Bobbio), въ Ломбардіи, извѣстнаго своею богатой библіотекой. Въ монастырѣ этомъ Гербертъ основалъ школу куда стекались ученики со всѣхъ концевъ Европы. Но школа эта скоро прекратила свое существованіе, вслѣдствіе зависьти монаховъ и недоброжелательства сосѣднихъ феодаловъ. Впослѣдствіи Гербертъ былъ сдѣланъ епископомъ Реймскимъ, а потомъ Равенскимъ и наконецъ въ 999 г. избранъ папой подъ именемъ Сильвестра II и умеръ въ 1003 г. Благодаря стараніямъ Герберта, въ бытность его епископомъ въ Реймсѣ, основанная имъ тамъ школа сдѣлалась одной изъ самыхъ знаменитыхъ. Онъ ее обогатилъ множествомъ книгъ и астрономическихъ инструментовъ, которые онъ выписывалъ откуда только было возможно. Современники Герберта удивлялись его необыкновеннымъ способностямъ и обширнымъ познаніямъ и сложили о немъ нѣсколько легендъ. Философію и математику Гербертъ подвинулъ впередъ на столько, на сколько это было возможно сдѣлать въ то время. Современники прозвали его „reparator studiorum“. Гербертъ написалъ много сочиненій, въ числѣ которыхъ одно по Геометріи *), но оно указываетъ на упадокъ этой науки, потому что заключаетъ много ложныхъ пріемовъ и невѣрныхъ предложеній, таковы напримѣръ: мѣра площадей треугольниковъ и четыреугольниковъ, правильныхъ многоугольниковъ; также неправильно Гербертъ рѣшаетъ задачу по данной площади правильнаго многоугольника опредѣлить его сторону? Но на ряду съ этими неточными предложеніями Гербертъ рѣшаетъ нѣсколько весьма трудныхъ, для того времени, вопро-

---

*) Геометрія Гербета была издана Pez'омъ въ III томѣ Thesaurus anecdotorum novissimus ect.

совъ, такъ напримѣръ: по даннымъ сторонамъ 13, 14 и 15 треугольника, найти его высоту? Но, по тѣмъ же сторонамъ, найти площадь? этотъ вопросъ не умѣетъ рѣшить Гербертъ. Укажемъ еще на одну трудную для того времени задачу, именно: по данной площади прямоугольнаго треугольника и его гипотенузѣ, найти катетъ? задача эта ведетъ къ рѣшенію уравненія 2-й степени. Гербертъ далъ рѣшеніе этой задачѣ, которое будучи переведено на нашъ алгебраическій языкъ имѣетъ форму:

$$x = \frac{\sqrt{b^2+4a} + \sqrt{b^2-4a}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{b^2+4a} - \sqrt{b^2-4a}}{2}$$

если x и y суть катеты, a данная площадь, а гипотенуза b.

Для площади круга Герберту извѣстно отношеніе $^{22}/_{7}$.

Термины, употребляемые Гербертомъ въ своей „Геометріи“, заимствованы имъ изъ „Геометріи“ Боэція, съ которой онъ впервые познакомился въ бытность свою въ Мантуѣ. Знакомству съ этимъ сочиненіемъ Гербертъ очень обрадовался.

Изъ числа многочисленныхъ сочиненій Герберта*) многія относятся къ Ариѳметикѣ; особенное вниманіе было обращено имъ на особую систему счисленія, извѣстную подъ именемъ *абакуса* **). Объ этой системѣ было напи-

---

*) Сочиненія Герберта были изданы нѣсколько разъ, послѣднее изданіе: *S. Olleris.* Oeuvres de Gerbert. Paris. 1867. in-4. Въ послѣднее время труды Герберта были предметомъ изслѣдованій многихъ ученыхъ, въ числѣ которыхъ назовемъ: Hock'a, Martin'a, Büdinger'a, Cantor'a и мн. др.

**) Въ древности, на Востокѣ, существовалъ обычай производить счетъ на доскахъ, на которыхъ былъ насыпанъ песокъ. Употребленіе подобныхъ досокъ было вѣроятно введено въ древней Греціи Пиѳагоромъ. По гречески доски эти носили названіе *abax* (Ἄβαξ), слово это на семитическомъ нарѣчіи имѣетъ себѣ весьма сходное, именно *abak*, что значитъ песокъ, пыль, а потому можно допустить что *abax*—это доска посыпанная пескомъ. Съ теченіемъ времени стали замѣнять песокъ марками, которыя смотря по своему положенію на доскѣ, означали различныя числа. Когда Греки первоначально стали употреблять слово *abax* съ достовѣрностью нельзя сказать, но во всякомъ случаѣ раньше III в. до Р. Х. Это основываютъ на слѣдующемъ мѣстѣ сочиненія Полибія, жившаго во II в. до Р. Х., который говоритъ „придворные, имѣютъ большое сходство съ марками *абакса*, какъ эти послѣднія по желанію считающаго могутъ обозначать то талантъ, то халкусъ, такъ и они по одному знаку царя, то очень счастливы, то необыкновенно печальны“. Также Ямвлихъ говоритъ, что „Пиѳагоръ училъ своихъ учениковъ Геометріи и Ариѳметики на *абаксѣ*“. Намъ извѣстно, что древніе Греки чертили геометрическія фигуры на пескѣ, а потому на основаніи всего сказаннаго можно почти съ достовѣрностью утверждать, что *abax*—это счетная доска, посыпанная пескомъ. Относительно того какъ производился счетъ на этихъ доскахъ вполнѣ еще не выяснено. Римляне также считали на подобныхъ доскахъ, но они были иначе устроены, именно: на

сано нѣсколько сочиненій Гербертомъ, а также его учениками. Въ сочиненіяхъ Герберта находится также выраженіе, для суммы членовъ ариѳметическихъ прогрессій. Неправильныя выраженія для площадей треугольника и четыреугольника были заимствованы Гербертомъ изъ сочиненій Беды.

Адельболдъ, епископъ Утрехтскій, жившій около 1010 г. принадлежалъ къ числу самыхъ ученыхъ людей своего времени. Онъ былъ ученикомъ Герберта, когда этотъ послѣдній находился въ Реймсѣ. Адельболдъ написалъ нѣсколько сочиненій, изъ числа ихъ одно по Геометріи, подъ заглавіемъ: De ratione inveniendi crassitudinem sphaerae *). Зная отношеніе окружности къ діаметру, данное Архимедомъ, и полагая отношеніе шара къ кубу діаметра равнымъ $^{11}/_{21}$, Адельболдъ находитъ для объема шара выраженіе $D^3 \, ^{11}/_{21}$.

Бернелинусъ, одинъ изъ учениковъ Герберта, написалъ нѣсколько сочиненій, въ числѣ которыхъ одно по Геометріи, подъ заглавіемъ „Bernelini Abaci, Musica, Arithmetica et Geometria". Сочиненіе это вѣроятно есть сокращенные уроки Герберта. Сочиненіе это нынѣ хранится въ Ватиканской библіотекѣ. Другое сочиненіе „Liber Abaci", въ которомъ Бернелинусъ излагаетъ десятичную систему счисленія.

Аделардъ Батскій (Athelardus Bathensis), извѣстный также подъ названіемъ *Гота*, жилъ около 1130 г. Онъ былъ бенедиктинскій монахъ, родомъ изъ Англіи, но большую часть жизни провелъ во Франціи и Германіи, гдѣ изучалъ науки въ монастырскихъ школахъ Лаона и Тура. Желая болѣе основательно познакомиться съ сочиненіями древнихъ греческихъ философовъ Аделардъ отправился сначала въ Салерно, а потомъ въ Азію, Египетъ и Испанію. Изучивъ основательно арабскій языкъ онъ по истеченіи семи лѣтъ возвратился на родину. Читая сочиненія арабскихъ писателей Аде-

---

металлической доскѣ были вырѣзаны выемки, а въ этихъ выемкахъ двигались штифтики, смотря по положенію штифтиковъ въ выемкахъ обозначали то или другое число. Свой приборъ Римляне называли *abacus*, что прямо указываетъ на его греческое происхожденіе.

Почти у всѣхъ народовъ существовалъ подобный счетъ, Китайцы считали на приборѣ называемомъ *суанпанъ* (suanpan), который весьма мало разнится отъ нашихъ *счетовъ*, употребляемыхъ купцами. Кромѣ подобнаго способа счета еще существовало обыкновеніе счета *на палочкахъ*, обычай этотъ сохранился въ Германіи до XVII столѣтія. Въ Россіи онъ былъ также въ большомъ ходу; еще недавно наши крестьяне считали *на биркахъ*. Въ заключеніе замѣтимъ, что хотя вопросъ *объ абакусѣ* былъ предметомъ изслѣдованія многихъ ученыхъ, но до сихъ поръ еще многое необъяснено. Вопросъ объ абакусѣ находится въ связи съ вопросомъ о различныхъ способахъ считать и различныхъ системахъ счисленія. Со временемъ мы предполагаемъ изслѣдовать эти вопросы болѣе подробно, такъ какъ граница нашего очерка не позволяютъ намъ это сдѣлать въ настоящемъ нашемъ сочиненіи.

*) Сочиненіе это было напечатано, вмѣстѣ съ „Геометріей" Герберта, въ III-мъ томѣ „Thesaurus ecandotorum novissimus", издаваемаго B. Pez'омъ, въ Аугсбургѣ, въ 1721 г. in-fol.

лардъ познакомился съ „Началами“ Евклида, въ переводѣ на арабскій языкъ; тогда еще небыло извѣстно это сочиненіе въ подлинникѣ. Вѣроятно это былъ переводъ Исгакъ-бенъ-Гонейца съ комментаріями Табитъ-бенъ-Корра, такъ какъ другой извѣстный намъ переводъ „Началъ“ на арабскій языкъ, сдѣланный Нассиръ-Еддинъ-ат-Туси, появился почти сто лѣтъ послѣ Аделарда Познакомившись съ „Началами“ Евклида Аделардъ перевелъ ихъ на латинскій языкъ. До насъ дошло нѣсколько рукописей этого перевода.

Кромѣ „Началъ“, Аделардъ перевелъ на латинскій языкъ съ арабскаго еще нѣсколько астрономическихъ сочиненій.

Савосарда (Savosarda), извѣстный также подъ именемъ *Abraham Judaeus*'а, жилъ, какъ полагаютъ, въ началѣ XII в. Онъ былъ еврей, вѣроятно родомъ изъ Испаніи. Савосарда авторъ сочиненія по практической Геометріи, въ которомъ впервые встрѣчается выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ; доказательства авторъ не приводитъ, хотя говоритъ, что оно ему извѣстно, но весьма запутанное. „Геометрія“ Савосарда содержитъ нѣсколько вопросовъ, которые въ настоящее время выражаются алгебраически, формулами: $x^2+4x=77$; $x+y=14$ и $xy=48$; $xy=60$ и $x^2+y^2=13$, но вопросы эти рѣшены у него чисто геометрически; извѣстно, что подобные вопросы находятся въ „Началахъ“ и „Данныхъ“ Евклида.

Въ этомъ сочиненіи помѣщена также таблица хордъ и нѣсколько задачъ, въ которыхъ числа написаны по индусской системѣ. Также заслуживаетъ вниманія способъ измѣренія высотъ при помощи отраженія отъ зеркалъ, измѣреніе глубины колодца при помощи паденія тѣлъ, и измѣреніе времени при помощи наблюденія свѣтилъ. Изъ сочиненія Савосарда видно, что ему были извѣстны сочиненіе Макробія и пріемъ Эратосѳена для измѣренія земнаго шара, а это указываетъ на то, что онъ не ограничился изученіемъ арабскихъ писателей.

Герардъ Кремонскій жилъ отъ 1114 по 1187 гг. Желая познакомиться съ „Альмагестомъ“ Птоломея онъ отправился въ Испанію, гдѣ изучалъ арабскій языкъ въ Толедо. Пораженный богатствомъ математической литературы арабовъ, онъ началъ переводить ихъ сочиненія на латинскій языкъ и перевелъ болѣе 70. Герардъ переводилъ сочиненія по самымъ разнообразнымъ наукамъ. Изъ его переводовъ наиболѣе извѣстны переводы: „Началъ“ Евклида, которыя какъ мы видѣли были уже переведены Аделардомъ и „Альмагестъ“ Птоломея, который онъ первый перевелъ на латинскій языкъ. Герардъ первый познакомилъ европейцевъ съ цѣлымъ рядомъ греческихъ сочиненій, извѣстныхъ у Арабовъ подъ именемъ „среднихъ книгъ“. Онъ перевелъ также съ арабскаго языка сочиненіе, предметъ котораго измѣреніе поверхностей и объемовъ тѣлъ; заглавіе его: Liber in quo

terrarum corporumque continentur mensurationes Ababuchri qui dicebatur Heus, translatus a magistro Girardo Cremonensi de arabico in latinum in Toleto, abbreviatus. Многіе вопросы въ этомъ сочиненіи рѣшены алгебраически, что авторъ выражаетъ словами: secundum Aliabram et Almuchabalam. Кромѣ того Герардъ перевелъ еще „Алгебру" Магомеда-бенъ-Муза*), сочиненіе Абу-Бекра „О измѣренія площадей и объемовъ тѣлъ" и „Толедскія таблицы" Аль-Зеркали и множество другихъ сочиненій.

Платонъ Тивольскій (Plato Tiburtinus), современникъ Герарда, перевелъ около 1120 г. сочиненіе Теодосія „Сферики", съ арабскаго языка на латинскій. Кромѣ этого сочиненія Платонъ перевелъ еще много другихъ также съ арабскаго на латинскій, въ томъ числѣ „Астрономію" Аль-Батани. Въ 1116 г. Платонъ перевелъ съ еврейскаго языка на латинскій „Геометрію" Савосарда **).

Изъ сочиненій Платона видно, что онъ былъ знакомъ съ Алгеброй. Въ его сочиненіяхъ находится таблица хордъ съ арабскими цифрами.

Сочиненія Аделарда, Герарда Кремонскаго, Савосарда и Платона Тивольскаго достойны полнаго вниманія и уваженія съ нашей стороны, они прямо указываютъ на то, что въ началѣ XII-го вѣка на Западѣ многіе лица интересовались математическими науками и что существовало въ то время не мало людей, которые не смотря на трудности и многочисленныя опасности сопровождающія путешествія въ тѣ времена, отправлялись въ отдаленныя страны за пріобрѣтеніемъ познаній и, пренебрегая матеріальными выгодами, занятія науками ставили выше всего.

Также весьма интересно прослѣдить въ этихъ сочиненіяхъ первые шаги математиковъ Запада въ ознакомленіи съ Алгеброй. Это суть первыя попытки европейскихъ математиковъ къ ознакомленію съ той наукой, которой первый значительный толчекъ впередъ далъ Фибоначчи и которая достигла уже такого широкаго развитія во время Кардана подъ именемъ *ars magna*.

Іоаннъ Севильскій или *de Luna*, болѣе извѣстный подъ именемъ *Joannes Hispalensis*, испанскій равинъ, жившій въ XII в. Онъ извѣстенъ переводами различныхъ арабскихъ сочиненій, сначала на кастильскій языкъ, а потомъ на латинскій. Такъ какъ многія изъ этихъ сочиненій были переводы греческихъ сочиненій на арабскій языкъ, то переводы Іоанна Севильскаго

*) Сочиненіе это было издано Бонкомпани по рукописи, принадлежащей Ватиканской библіотекѣ, и напечатано въ его изданіи: Della vita et delle opere de Gherardo Cremonese. Roma, 1851, in-4.

**) Одна изъ рукописей этого перевода носитъ слѣдующее заглавіе: Incipit liber embadorum, a Savasorda in ebraico compositus, et a Platone Tiburtino in latinum sermonem translatus, anno arabum DX (1116 г.) mense Saphar. Слово *embada* указываетъ на восточное происхожденіе этого сочиненія.

довольно неточик. Въ числѣ переведенныхъ имъ сочиненій было нѣсколько сочиненій Аристотеля. Іоаннъ Севильскій авторъ сочиненія „Liber algorismi“ *). Сочиненіе это есть извлеченіе изъ сочиненія Магомеда-бенъ-Муза „Алькаризмъ“. Въ одной изъ главъ этого сочиненія подъ заглавіемъ: Excerptiones de libro qui dicitur Gebra et Muchabala, приведены три вида уравненій второй степени, которыя рѣшали въ то время. Общая форма этихъ уравненій:

$$x^2+ax=b$$

$$x^2+b=ax$$

$$ax+b=x^2$$

Они рѣшены для частнаго случая:

$$x^2+10x=39$$

$$x^2+9=6x$$

$$3x+4=x^2$$

Въ этомъ сочиненіи говорится о какомъ то трактатѣ по Алгебрѣ, но къ сожалѣнію мы ничего больше о немъ не знаемъ. Шаль полагаетъ, что это была Алгебра Магомеда-бенъ-Музы. Въ этомъ сочиненіи Іоанна показанъ пріемъ извлеченія квадратныхъ корней при помощи десятичныхъ дробей; впослѣдствіи пріемъ этотъ былъ снова предложенъ Карданомъ, какъ совершенно новый **).

Іоаннъ Севильскій до принятія христіанства носилъ имя Абенъ-Дреатъ (Aben-Dreath).

Родольфъ Брюжскій (Braghensis), современникъ Герарда Кремонскаго, первый перевелъ, съ арабскаго языка на латинскій, сочиненіе Птоломея „De Planispherio“ съ комментаріями арабскаго ученаго Маслема ***).

Іоаннъ Голивудскій (Jean de Holywood), болѣе извѣстный подъ именемъ *Сакро-Боско* (Johannes Sacro-Bosco), былъ родомъ англичанинъ, онъ преподавалъ математику въ Парижѣ, гдѣ умеръ въ 1256 г. Сакро-Боско написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ одно пользовалось громадною извѣстностью, это—„De sphaerâ mundi“. Сочиненіе это въ теченіи цѣлыхъ четырехсотъ лѣтъ служило руководствомъ по астрономіи въ школахъ. Оно выдержало болѣе шестидесяти-пяти изданій и столько же комментаріевъ.

---

*) Сочиненіе это было издано Бонкомпани во II томѣ своего сочиненія „Trattati d'aritmetica“. Roma. 1857.

**) Пріемъ этотъ былъ уже извѣстенъ Теону Младшему, который свои вычисленія производилъ при помощи шестидесятичныхъ дробей.

***) Сочиненіе это впервые было напечатано при „Географіи“ Птоломея, изданной въ 1507 г., въ Римѣ. Затѣмъ снова въ 1536 г. Впослѣдствіи сочиненіе это было снова переведено Коммандиномъ, съ подробными комментаріями, въ 1568 г.

Въ первый разъ *оно было* напечатано въ Феррарѣ въ 1472 г. Самые знаменитые изъ математиковъ XV и XVI столѣтій писали комментаріи на это сочиненіе; изъ числа ихъ упомянемъ Пурбаха, Региомонтануса, Клавіуса и др.

Сочиненіе это есть извлеченіе изъ „Альмагеста" Птоломея, но оно содержитъ только самыя поверхностныя свѣдѣнія, какъ напр. описаніе различныхъ круговъ на сферѣ небесной, явленія суточнаго движенія свода небеснаго и нѣчто о затмѣніяхъ. Теорія планетъ совершенно не изложена, а этотъ вопросъ какъ извѣстно разсмотрѣнъ очень обстоятельно въ „Альмагестѣ". На этотъ вопросъ первый обратилъ вниманіе снова Пурбахъ. Кромѣ сочиненія „О шарѣ" Сакро-Боско написалъ еще сочиненіе по ариѳметикѣ, подъ заглавіемъ „De Algorismo" *). Сочиненіе это состоитъ изъ девяти частей, именно: нумерація, сложеніе, вычитаніе, дѣленіе на 2, умноженіе на 2, умноженіе, дѣленіе, прогрессіи и извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней. Подобное раздѣленіе ариѳметики существовало весьма *долго*, и сохранилось еще въ сочиненіяхъ, написанныхъ въ XVI в. Въ этомъ сочиненіи введены уже наши теперешнія цифры. Ариѳметику Сакро-Боско приписываетъ Индусамъ. Кромѣ этихъ сочиненій онъ написалъ еще нѣсколько другихъ по астрономіи.

Іоаннъ Неморарiусъ (Nemorarius латинизированная фамилія *Forestier)* жилъ около конца XII в. **). Онъ написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ извѣстны слѣдующія: „Ариѳметика" въ десяти книгахъ. Сочиненіе это составлено на подобіе сочиненій Никомаха и Боэція по тому же предмету, въ немъ разобраны многія свойства чиселъ ***).

„Algorismus" — это сочиненіе по практической ариѳметикѣ.

---

*) Сочиненіе это было въ большомъ употребленіи въ университетахъ. Оно было напечатано много разъ въ XVI и XVII вѣкахъ. Изъ изданій болѣе извѣстны напечатанныя: въ Вѣнѣ въ 1517 г.; въ Краковѣ въ 1521 г. и 1522 г.; въ Венеціи въ 1523 г.; и въ Парижѣ въ 1510 г. и 1522 г., Фабромъ Детапль (Fabre d'Étaples), безъ имени автора. Послѣднее изданіе напечатано Галливелемъ (Halliwell) подъ заглавіемъ: Johannis de Sacro-Bosco Anglici de arte numerandi tractatus. *Cantabrig.* 1838.

Валлисъ и Монтукла ошибочно приписываютъ Сакро-Боско сочиненіе по ариѳметикѣ, написанное въ стихахъ. Авторъ послѣдняго сочиненія Вилледіо (Alexandre de Villedieu). Сочиненіе это *было* издано *въ* первый разъ Галливелемъ въ сборникѣ, подъ заглавіемъ. Rara Mathematica. London. 1839.

**) Свѣдѣній о жизни Неморариуса несуществуетъ, неизвѣстно даже съ достовѣрностью время когда онъ жилъ. На основаніи нѣкоторыхъ указаній полагаютъ, что онъ былъ генераломъ одного изъ монашескихъ орденовъ въ Парижѣ и что онъ умеръ въ 1236 г. По своему происхожденію Неморарiусъ вѣроятно былъ саксонецъ, такъ какъ одна изъ рукописей его сочиненій озаглавлена: Jordani de Nemore de Alamania Arithmetica.

***) Сочиненіе это впервые было напечатано, съ комментаріями Фабра Детапль (Faber Stapulensis) въ 1496 г., въ Парижѣ. Есть еще нѣсколько другихъ изданій.

„De planisphaerio“. Въ этомъ сочиненіи въ первый разъ доказано во всей общности основное свойство стереографической проэкціи *), что всѣ круги пролагаются въ видѣ круга. Птоломей доказалъ это предложеніе для отдѣльныхъ случаевъ. Птоломей дѣлалъ проложеніе на плоскость экватора, для глаза находящагося въ полюсѣ. Немораріусъ же пролагаетъ на касательную плоскость, проведенную чрезъ другой полюсъ. Одно изъ самыхъ замѣчательныхъ свойствъ стереографической проэкціи, что „уголъ между двумя кругами, проведенными на шарѣ, равенъ углу заключенному между двумя проэкціями“, не было извѣстно Немораріусу; свойство это первый замѣтилъ Роберстонъ **).

Немораріусъ написалъ также трактатъ по Алгебрѣ, подъ заглавіемъ „De numeris datis“, въ которомъ рѣшено много уравненій первой и второй степеней. Сочиненіе это важно въ исторіи развитія Алгебры, къ сожалѣнію оно мало извѣстно въ настоящее время. Оно пользовалось въ прежнее время большою извѣстностью. Регіомонтанусъ, а потомъ Мавролико хотѣли его издать ***). Методъ, употребленный авторомъ заслуживаетъ вниманія; всѣ разсужденія онъ производитъ на буквахъ. Сочиненіе состоитъ изъ 4 книгъ и заключаетъ 113 предложеній.

Извѣстно еще сочиненіе Немораріуса „De triangulis“, но оно не было издано. По предположенію Боссіусъ (Vossius) въ Ватиканской библіотекѣ есть сочиненіе Немораріуса „De Geometriâ“ въ трехъ книгахъ. Содержаніе этого сочиненія неизвѣстно. По словамъ Рамуса, Немораріусъ нашелъ выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ; но въ какомъ изъ сочиненій было доказано это предложеніе неизвѣстно, вѣроятно оно находилось въ сочиненіи „De Geometriâ“, такъ какъ въ другомъ геометрическомъ сочиненіи „De triangulis“ Вентури его не нашелъ. Доказательство предложенное Немораріусомъ то же, что и доказательство данное Фибоначчи, въ своей „Практической Геометріи“.

Кромѣ этихъ сочиненій Немораріусъ написалъ еще сочиненія по Оптикѣ и по Механикѣ. Въ особенности заслуживаетъ вниманія его сочине-

---

*) Названіе *стереографическая* проэкція было введено впервые въ XVII ст. Агильономъ въ сочиненіи: Aguilonii Opticorum libri sex. Paris. 1613. in-fol.

**) *Robersion* написалъ сочиненіе по Навигаціи въ 1754 г.

***) Сочиненіе Немораріуса „De numeris datis“ было издано только въ послѣднее время *Treutlein*омъ и напечатано въ сборникѣ подъ заглавіемъ. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Zweites Heft. 1879. Leipzig. in-8 Переводъ свой Треутлейнъ сдѣлалъ съ рукописи, написанной между 1850 и 1980 гг., хранящейся нынѣ въ Базельской библіотекѣ.

Въ предисловіи къ своему переводу Треутлеинъ высказываетъ предположеніе, что сочиненіе „Algorithmus demonstratus“, которое долгое время приписывали Регіомонтанусу, написано Немораріусомъ.

ніе по статикѣ, подъ заглавіемъ „De ponderibus“. Это первое сочиненіе по статикѣ, написанное послѣ Архимеда, оно было издано Тарталіей съ комментаріями *).

Леонардъ Пизанскій, болѣе извѣстный подъ именемъ *Фибоначчи* (Fibonacci—filius Bonacci), родился около 1180 г. въ Пизѣ. Жизнь его мало извѣстна, мы не знаемъ даже съ достовѣрностью время когда онъ жилъ. Соотечественники прозвали Фибоначчи *Bigollone*, т. е. глупцомъ, за то что онъ предпочиталъ занятіе науками торговлѣ, которою занимались его сограждане. Фибоначчи первый познакомилъ европейскихъ ученыхъ съ Алгеброй и съ арабской десятичной системой счисленія. Онъ написалъ нѣсколько сочиненій на латинскомъ языкѣ, изъ числа которыхъ самое замѣчательное „Liber Abacus“, написанное въ 1202 г. Разсмотримъ содержаніе этого сочиненія, а также другихъ сочиненій, написанныхъ Фибоначчи.

Въ предисловіи къ сочиненію „Liber Abacus“ Фибоначчи указываетъ на причины, побудившія его предпринять свой трудъ; онъ говоритъ: „отецъ мой, родомъ изъ Пизы, служилъ синдикомъ на таможнѣ въ Бужи, въ Африкѣ, куда онъ меня взялъ съ собою для изученія искусства считать. Удивительное искусство считать при помощи только девяти индусскихъ знаковъ мнѣ такъ понравилось, что я непремѣнно захотѣлъ познакомиться съ тѣмъ, что извѣстно объ этомъ искусствѣ въ Египтѣ, Греціи, Сиріи, Сициліи и Провансѣ; объѣхавъ всѣ эти страны я убѣдился, что индусская система счисленія есть самая совершенная и превосходитъ альгоризмъ и методъ Пиѳагора. Изучивъ основательно эту систему и все къ ней относящееся, прибавивъ свои собственныя изслѣдованія и почерпнутое изъ „Началъ“ Евклида, я рѣшился написать это сочиненіе“ **).

Сочиненіе это, состоящее изъ 15 главъ, есть трактатъ по Алгебрѣ,

---

*) Сочиненіе это въ первый разъ было издано *Apian*'омъ, въ 1538 г. въ Нюрнбергѣ подъ заглавіемъ „De Ponderibus“.

**) Подъ именемъ *альгоризма* (algoritmus) въ Средніе Вѣка понимали *ариѳметику положенія*. Въ первый разъ, на сколько извѣстно, система эта была примѣнена въ сочиненіи Магомеда-бенъ-Муза, въ которомъ впервые употреблена десятичная система счисленія съ нулемъ. Послѣдователей этой системы называли *альгоритмистами*. Послѣдователей же древней системы счисленія, которые не употребляли нуля, называли *абасистами*, потому что они при своихъ вычисленіяхъ пользовались *абакусомъ*.

Относительно происхожденія названія *альгоризмъ* сдѣлано было множество предположеній, но болѣе вѣроятно мнѣніе Рено (Reynaud), который полагаетъ, что названіе это происходитъ отъ имени Alkhârismi подъ которымъ былъ извѣстенъ Могамедъ-бенъ-Муза, прозванный такъ по имени провинціи *Каризмъ*, изъ которой онъ былъ родомъ. Другіе ученые противнаго мнѣнія, такъ напримѣръ Quatremère и Adelung слово *альгоризмъ* производятъ отъ греческаго ἀριθμος, которому предшествуетъ арабскій членъ *al*.

первое сочиненіе по этому предмету, написанное христіаниномъ. Въ этомъ сочиненіи также впервые изложена арабская система счисленія, подъ именемъ индусской, и ариѳметическія дѣйствія, произведенныя при посредствѣ цифръ *). Въ настоящее время извѣстно нѣсколько сочиненій, написанныхъ до 1202 г., гдѣ примѣняются эти знаки, но сочиненія эти написаны или маврами или же испанскими евреями.

Въ своемъ сочиненіи Фибоначчи упоминаетъ о различныхъ системахъ счисленія, употребляемыхъ въ странахъ, которыя онъ посѣтилъ; онъ останавливается на свойствахъ нуля, при помощи котораго и девяти индусскихъ знаковъ можно выражать всѣ числа. При этомъ Фибоначчи указываетъ на то, что само слово *нуль* арабскаго происхожденія **).

---

*) Безъ сомнѣнія цифры были извѣстны европейцамъ еще задолго до Фибоначчи. Въ рукописи XI в., принадлежащей Шартрской библіотекѣ, находится девять цифръ, которыя написаны отъ правой руки къ лѣвой, въ возрастающемъ порядкѣ, что прямо указываетъ на то, что они заимствованы отъ народа, который писалъ отъ правой руки къ лѣвой. Знаки, изображающіе цифры въ этой рукописи, мало напоминаютъ наши нынѣшнія цифры. Знаки эти, начиная отъ единицы, носятъ названія: Igin, Andras, Ormis, Arbas, Quimas, Caltis, Zenis, Temenias, Sipos celentis. Происхожденіе этихъ названій до сихъ поръ не объяснено удовлетворительно, такъ какъ достовѣрно неизвѣстно откуда они заимствованы.

Цифры и всю десятичную систему счисленія называютъ часто *индусскими*, но послѣднія изслѣдованія показали, что система эта скорѣе принадлежитъ арабамъ, хотя сами они называли ее индусскою. Впрочемъ необходимо замѣтить, что арабы все заимствованное ими у другихъ народовъ называли индусскимъ, такъ напр. Геометрія считалась у нихъ индусскою наукой; Альмагестъ Птоломея—индусская книга; инструментъ описанный Прокломъ—индусскимъ кругомъ и т. п. Вопросъ откуда заимствована нынѣшняя система счисленія былъ предметомъ многихъ споровъ между математиками и до сихъ поръ остается невыясненнымъ.

**) Фибоначчи говоритъ: „Cum his itaque nove Figuris, et cum hoc signo ○ quod Arabice Zephirum appelatur, scribitur quilibet numerus“. Съ теченіемъ времени слово *zephiro* перешло въ *zéro*, что на французскомъ языкѣ значитъ нуль.

Нуль былъ извѣстенъ уже арабскому математику IX в. Магомеду-бенъ-Муза, который въ своей Алгебрѣ говоритъ: „девять знаковъ могутъ находиться на различныхъ мѣстахъ, но если одного мѣста недостаетъ, то ставятъ маленькій кружокъ, показывающій, что на этомъ мѣстѣ никакого числа не находиться“.

Шаль въ своемъ сочиненіи „Aperçu historique“ указываетъ на рукопись „Геометріи“ Боэція, написанной въ XI в., въ которой послѣ девяти цифръ поставленъ маленькій кружокъ, среди котораго находиться буква *a*. Знакъ этотъ по всей вѣроятности представлялъ нуль. Буква *a*, по мнѣнію Шаля, есть послѣдняя буква слова *syphra*, или же первая буква слова *arcus*, которое употребляется въ этой же рукописи и имѣетъ извѣстное значеніе въ системѣ нумераціи. Съ мнѣніемъ Шаля несогласенъ Либри, который указываетъ на то, что слово *safira* по арабски значитъ *пустота*. Слову этому соотвѣтствуетъ индусское—*çûnya*, имѣющее тоже значеніе. Съ теченіемъ времени слово *safira* перешло въ *zephirum*, *tsiphra*, *cifra*, *chiffre*; въ послѣдствіи его стали употреблять въ смыслѣ *цифры*, но и въ настоящее время первоначальное значеніе сохранилось въ англійскомъ языкѣ, гдѣ *cipher* значитъ нуль, а также въ португальскомъ, гдѣ слово *cifra* имѣетъ то же значеніе.

Сочиненіе свое Фибоначчи начинаетъ съ изложенія правилъ первыхъ четырехъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами. Затѣмъ слѣдуетъ тройное правило, правило смѣшенія и рѣшеніе различныхъ практическихъ вопросовъ. Большая часть изъ этихъ вопросовъ въ настоящее время сводятся на рѣшеніе линейныхъ уравненій. Изъ числа подобныхъ вопросовъ укажемъ на слѣдующій: „четвертая и третья части дерева находятся подъ землей, они составляютъ 21 футъ, найти длину всего дерева“? Задачу эту можно выразить иными словами такъ: найти величину, которой p-я и q-я части даны. Задача эта носитъ названіе *regula arborum*. Приведемъ еще одну задачу, извѣстную подъ именемъ задачи *de duobus hominibus*, которая состоитъ въ слѣдующемъ: „одинъ человѣкъ требуетъ отъ другаго 7 динаріевъ, тогда онъ будетъ имѣть въ 5 разъ больше его. Второй требуетъ отъ перваго 5 динаріевъ и тогда онъ будетъ имѣть въ 7 разъ больше“. Изъ рѣшенія подобныхъ вопросовъ состоитъ все сочиненіе Фибоначчи. Потомъ авторъ переходитъ къ извлеченію квадратныхъ корней и ученію о ирраціональныхъ величинахъ, при чемъ Фибоначчи ограничивается тѣми предложеніями, которыя находятся въ X-й книгѣ „Началъ“ Евклида, но въ большей части случаевъ онъ совершенно чуждъ геометрическихъ построеній, какъ это дѣлали уже арабы, такъ напримѣръ умноженіе и извлеченіе корней изъ двучленовъ и вычетовъ являются у него какъ дѣйствія чисто алгебраическія. Въ концѣ сочиненія изложено рѣшеніе уравненій второй степени, при чемъ авторъ рѣшаетъ шесть вопросовъ, которые онъ сводитъ на рѣшеніе такихъ уравненій. Во всѣхъ вопросахъ онъ прежде всего начинаетъ съ разсматриванія численныхъ примѣровъ и потомъ даетъ общее правило безъ доказательства. Въ разсматриваемыхъ примѣрахъ онъ полагаетъ члены обѣихъ частей уравненія положительными, подобно арабамъ; въ то время еще не приравнивали уравненій нулю. Въ концѣ вопроса дано доказательство, которое есть геометрическое построеніе, гдѣ мы прибавляемъ къ обѣимъ частямъ уравненія квадратъ половины коэфиціента у неизвѣстнаго въ первой степени. Для обозначенія величинъ, не имѣющихъ численныхъ значеній, Фибоначчи выражаетъ ихъ линіями, обозначая эти линіи одною или двумя буквами; надъ этими буквами онъ производитъ алгебраическія дѣйствія, совершенно такъ какъ они производятся въ настоящее время. Иногда Фибоначчи употребляетъ буквы для обозначенія неопредѣленныхъ величинъ, не выражая ихъ линіями.

Извѣстно, что большая часть арабскихъ математиковъ разсматривали только одинъ корень уравненія второй степени, но еще Магомедъ-бенъ-Муза, жившій въ IX в., указалъ на существованіе двухъ положительныхъ корней въ уравненіяхъ вида $ax^2+b=cx$. Магомедъ-бенъ-Муза вѣроятно разсматривалъ только два корня положительныхъ, желая избѣгнуть отрица-

тельныхъ и мнимыхъ корней. Относительно этого случая Магомедъ-бенъ-Муза говоритъ слѣдующее: „испробуемъ рѣшеніе чрезъ сложеніе (т. е давая радикалу знакъ +) и если оно не удовлетворяетъ, то вычитая мы всегда рѣшимъ вопросъ“ Фибоначчи, безъ сомнѣнія знакомый съ сочиненіемъ Магомеда-бенъ-Музы, не пошелъ далѣе его *). Онъ также говоритъ, что если извѣстное уравненіе второй степени не рѣшается прибавляя радикалъ къ раціональному количеству, то оно разрѣшится отымая отъ него тотъ же радикалъ; но Фибоначчи не говоритъ, что уравненія второй степени всегда имѣютъ два рѣшенія. Кромѣ уравненій квадратныхъ, Фибоначчи разсматриваетъ еще уравненія высшихъ степеней, сводимыя на квадратныя, чего нѣтъ въ сочиненіи Магомеда-бенъ-Музы.

Въ своемъ сочиненіи Фибоначчи сохранилъ арабскія названія и опредѣленія, какъ напримѣръ: **Elcatayın**, **Almacabala**, **Algebra** и др., что прямо указываетъ на то, что содержаніе сочиненія заимствовано изъ арабскихъ источниковъ.

Сочиненіе свое Фибоначчи, въ 1228 г., исправилъ и дополнилъ **). Извѣстные списки этого сочиненія сильно разнятся другъ отъ друга, такъ какъ они списаны съ различныхъ изданій.

Другое сочиненіе Фибоначчи „**Practica geometriae**“, написанное въ 1220 г., состоитъ изъ 8 главъ. Въ этомъ сочиненіи Фибоначчи изложилъ все, что ему извѣстно о измѣреніи площадей ограниченныхъ прямыми и кривыми линіями, а также о кругѣ и шарѣ, при чемъ онъ слѣдуетъ „Началамъ“ Евклида и сочиненіямъ Архимеда „Объ измѣреніи круга“ и „О шарѣ и цилиндрѣ“. Также видно знакомство автора съ основами Тригонометріи, которую онъ заимствовалъ изъ сочиненія Птоломея и арабскихъ источниковъ, ему извѣстны sinus и sinus versus. Вопросъ о дѣленіи фигуръ въ опредѣленномъ отношеніи, разобранъ весьма обстоятельно при чемъ источникомъ, безъ сомнѣнія, служило сочиненіе Евклида „De divisionibus“, которое, какъ извѣстно, было весьма распространено между арабскими математиками. Изъ геометрическихъ предложеній особеннаго вниманія заслуживаетъ выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ. Выраженіе это, какъ извѣстно, находится въ индусскихъ и арабскихъ сочиненіяхъ по Геометріи, а также было извѣстно Герону Старшему. Полагаютъ, что Фибоначчи выраженіе это заимствовалъ изъ „Геометріи“ Савосарда. Въ „Геометріи“ Фибоначчи показалъ также способы измѣренія объемовъ и емкостей

---

*) Алгебра Магомеда-бенъ-Муза была издана подъ заглавіемъ: Mohammed-ben-Musa, Algebra, translated by F. Rosen, London. 1831. in-8.

**) Второе изданіе сочиненія „Liber Abacus“ Фибоначчи посвящаетъ извѣстному астрологу *Михаилу Скотту* (Scottus), жившему при дворѣ Фридриха II.

тѣлъ, а также указаны способы измѣренія площадей, употребляемые землемѣрами.

При изслѣдованіи геометрическихъ вопросовъ Фибоначчи не уступаетъ въ строгости доказательствъ и послѣдовательности автору „Началъ“. Въ рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ онъ предлагаетъ вполнѣ самостоятельные пріемы, такъ напримѣръ, при вычисленіи длины окружности круга, онъ вычисляетъ периметры правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ около круга 96-ти-угольниковъ; онъ даетъ доказательство, имѣющее преимущество передъ пріемомъ, предложеннымъ Архимедомъ. Пріемъ Фибоначчи скорѣе ведетъ къ цѣли. Оба предѣла данные имъ, слѣдующіе:

$$\frac{1440}{458\frac{1}{5}} = 3{,}143 \quad \text{и} \quad \frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3{,}141$$

среднее значеніе:

$$\frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3{,}1418$$

Изъ другихъ сочиненій, написанныхъ Фибоначчи, особеннаго вниманія заслуживаетъ „Liber Quadratorum“, написанное около 1225 г. Сочиненіе это было затеряно, но въ послѣднее время отыскано Бонкомпани и издано въ полномъ собраніи сочиненій Фибоначчи. Въ сочиненіи этомъ находится много интересныхъ вопросовъ. По мнѣнію Терквема (Terquem) оно принадлежитъ къ числу самыхъ замѣчательныхъ сочиненій ариѳметическаго содержанія, написанныхъ въ Средніе Вѣка. Въ немъ изслѣдованы многія интересныя свойства чиселъ, дано выраженіе для суммы ряда натуральныхъ чиселъ, а также ихъ квадратовъ, суммы ряда нечетныхъ чиселъ; дана общая формула для составленія ариѳметическихъ треугольниковъ изъ чиселъ, а также частное рѣшеніе трудной задачи: найти квадратъ, къ которому если мы прибавимъ данное число, то получимъ всегда также число квадратное.

Сочиненіе это было представлено Фибоначчи императору Фридриху II, въ бытность послѣдняго въ Пизѣ въ 1225 г. Извѣстно, что этотъ Гогенштауфенъ сильно покровительствовалъ ученымъ и часто устраивалъ въ своемъ присутствіи ученые турниры. На одномъ изъ подобныхъ состязаній были предложены Фибоначчи нѣсколько вопросовъ для рѣшенія, придворными математиками *Іоанномъ Палермскимъ* и *Ѳеодоромъ*. Отвѣты свои Фибоначчи адресовалъ императору, озаглавивъ ихъ: „Flos super solutionibus quarumdam quaestionum ad numerum et ad geometriam pertinentium“. Въ предисловіи къ своему сочиненію онъ говоритъ, что „имъ оно озаглавлено Flos потому, что нѣкоторые отвѣты, хотя и довольно трудные, изложены въ цвѣтистой формѣ, но что они подобны цвѣтамъ, которые цвѣтутъ не

смотря на то, что корни ихъ лежатъ подъ землею; точно также и эти отвѣты порождаютъ *множество новыхъ вопросовъ*".

Въ числѣ вопросовъ, предложеныхъ Іоанномъ Палермскимъ, первый заключался въ слѣдующемъ: „найти число квадратное, которое будучи увеличено или уменьшено на 5, оставалось бы снова числомъ квадратнымъ". Фибоначчи далъ рѣшеніе $^{41}/_{12}$, которое удовлетворяетъ вопросу, такъ какъ

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2$$

Вторая задача заключалась въ слѣдующемъ: „найти при помощи одной изъ пятнадцати линейныхъ величинъ, упоминаемыхъ въ десятой книгѣ „Началъ" Евклида, длину x, удовлетворяющую условію:

$$x^3+2x^2+10x=20.$$

При помощи весьма строгихъ геометрическихъ разсужденій Фибоначчи доказалъ, что ни одна изъ пятнадцати величинъ, упоминаемыхъ въ X-й книгѣ „Началъ" не *удовлетворяетъ предложенному вопросу* *). Но онъ даетъ весьма приближенное выраженіе для *положительнаго корня уравненія*; къ сожалѣнію неизвѣстно при помощи какого пріема имъ было найдено это значеніе.

Третій изъ предложенныхъ Фибоначчи для рѣшенія вопросовъ, будучи переведенъ на нашъ нынѣшній алгебраическій языкъ, заключался въ слѣдующемъ: „три человѣка имѣютъ неизвѣстную сумму денегъ t; часть перваго равна $\frac{1}{2}t$, втораго — $\frac{1}{3}t$, а третьяго $\frac{1}{6}t$. Желая помѣстить свои деньги въ вѣрныя руки, первый беретъ произвольную сумму x и кладетъ $\frac{x}{2}$; второй беретъ y и кладетъ $\frac{y}{3}$; третій беретъ z и кладетъ $\frac{z}{6}$. Вся положенная сумма будетъ равна $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}$; чрезъ нѣсколько времени они берутъ назадъ положенную сумму денегъ и каждый изъ нихъ получаетъ одну треть. Требуется найти x, y, z." Принимая равною 7-ми часть полученную каждымъ по возвращеніи денегъ обратно, Фибоначчи находитъ $t=47$, $x=33$, $y=13$ и $z=1$. Фибоначчи указываетъ, что задача эта принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ и имѣетъ три рѣшенія, которыя приведены въ его сочиненіи „**Liber Abacus**".

Кромѣ указанныхъ нами сочиненій Фибоначчи написалъ еще „**De Modo solvendi quaestiones avium et similium**", которое онъ посвящаетъ „император-

*) Изслѣдованія Фибоначчи Вепке перевелъ на аналитическій языкъ въ „Journal de mathématiques" Liouville'я T. XXIX за 1855 г.

скому философу“ Феодору. Въ этомъ сочиненіи рѣшена извѣстная задача „о птицахъ“, состоящая въ слѣдующемъ: „нѣкто купилъ 30 птицъ за 30 монетъ, изъ числа этихъ птицъ за каждые три воробья заплачена 1 монета, за каждыя двѣ горлицы также 1 монета и наконецъ за каждый голубь по 2 монеты. Требуется опредѣлить число птицъ каждаго рода?“ Задача эта принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ, хотя допускаетъ одно рѣшеніе, именно 9 воробьевъ, 10 горлицъ и 11 голубей. Другія задачи этого сочиненія подобнаго же рода; всѣ онѣ рѣшены при помощи пріема, извѣстнаго подъ именемъ *правила ложнаго положенія* или *regula falsi*.

Познакомившись въ общихъ чертахъ съ содержаніемъ сочиненій Фибоначчи, необходимо замѣтить слѣдующее: сочиненія, написанныя имъ, замѣчательны еще въ томъ отношеніи, что въ нихъ нѣтъ и слѣда суевѣрія и предразсудковъ присущихъ тому времени, когда математическія науки находили такое примѣненіе къ магіи и астрологіи. Не только въ научныхъ открытіяхъ, но и въ философскихъ разсужденіяхъ Фибоначчи стоялъ выше своего времени, онъ съумѣлъ сдѣлаться чуждымъ той суевѣрности во взглядахъ, вѣры въ таинственное, которое отличало не только его современниковъ, но было свойственно многимъ ученымъ жившимъ долго послѣ него, какъ напр. Кардану. Сочиненія, написанныя Фибоначчи, носятъ чисто ученый характеръ, между тѣмъ какъ сочиненія его современниковъ, какъ напр. Векона и другихъ, заключаютъ наравнѣ съ истинами, почти всегда ошибки и самые грубые предразсудки. Ему первому обязаны христіанскіе ученые знакомствомъ съ Алгеброй; замѣчательныя его изслѣдованія по этой наукѣ въ теченіи нѣсколькихъ столѣтій были изучаемы въ школахъ, не прибавляя къ нимъ ничего новаго; онъ одинъ, благодаря своимъ трудамъ, поддерживалъ чистую математику въ теченіи трехъ столѣтій и не мало этимъ способствовалъ подготовленію тѣхъ блестящихъ открытій въ Алгебрѣ, которыя были сдѣланы италіанскими математиками въ эпоху возрожденіи наукъ на Западѣ. Вліяніе Фибоначчи на развитіе математическихъ наукъ въ Европѣ было, можно съ увѣренностью сказать, громадно, онъ создалъ въ Италіи ту знаменитую школу первокласныхъ геометровъ, изъ которой впослѣдствіи вышли: Леонардо-да-Винчи, Ферро, Тарталія, Карданъ, Кавалери и многіе другіе. На основаніи этого можно сказать, что Фибоначчи былъ одинъ изъ самыхъ блестящихъ геометровъ, жившихъ въ Средніе Вѣка въ Западной Европѣ.

Въ новѣйшее время труды Леонарда Пизанскаго были почти совершенно забыты; причина этому вѣроятно существованіе его сочиненій только въ рукописныхъ спискахъ *). Монтукла въ своей „Исторіи математическихъ

*) *Сочиненія Фибоначчи были напечатаны только въ настоящемъ столѣтіи.* Сперва

наукъ" говоритъ о Фибоначчи только мимоходомъ. Первый обратившій снова вниманіе на сочиненія Фибоначчи и оцѣнившій должнымъ образомъ ихъ значеніе въ развитіи математическихъ наукъ, былъ Либри, который въ своей знаменитой „Исторіи математическихъ наукъ въ Италіи" подробно разбираетъ сочиненія Фибоначчи и ихъ значеніе. Мнѣніе Либри о громадномъ значеніи сочиненій Фибоначчи въ развитіи математическихъ наукъ на Западѣ, встрѣтило сильнаго противника въ лицѣ извѣстнаго Шаля, который старается умалить ихъ значеніе *), приписывая все Віету. Самъ Шаль говоритъ, что вопросъ о значеніи трудовъ Фибоначчи является для него вопросомъ національнымъ. Но намъ кажется, что едва-ли Шаль правъ, отрицая громадное значеніе Фибоначчи и приписывая все Віету. Едва-ли возможно въ научныхъ вопросахъ руководиться національными взглядами, такъ какъ исходя изъ подобныхъ основаній трудно оставаться безпристрастнымъ.

Вителій, родомъ полякъ изъ окрестностей Вреславля, написалъ около 1280 г. сочиненіе по оптикѣ, въ 10 книгахъ, подъ заглавіемъ: „**Perspectiva**". Содержаніе этого сочиненія почти исключительно заимствовано изъ „Оптики" Альгазена. Первая книга сочиненія Вителія вся посвящена Геометріи, въ ней изложены предложенія, необходимыя при дальнѣйшемъ изложеніи оптики. Многія изъ этихъ предложеній заимствованы изъ „Началъ" Евклида и „Коническихъ сѣченій" Аполлонія, на которыя авторъ ссылается. Другія предложенія, по всему вѣроятію, были заимствованы изъ VII-й книги

Либри, въ примѣчаніяхъ ко II-му тому своей „Исторіи математическихъ наукъ въ Италіи" напечаталъ XV-ю главу „Liber Abaci", содержаніе которой относится къ Алгебрѣ. Полное собраніе сочиненій Фибоначчи было напечатано благодаря заботамъ, извѣстнаго знатока по исторіи математическихъ наукъ, князя Бонкомпаньи. Сначала онъ издалъ въ 1854 и 1856 гг. нѣкоторыя мелкія сочиненія Фибоначчи и наконецъ „Scritti di Leonardo Pisano publicati da B. Boncompagni. T. I—II. Roma. 1857—62. in 4".

Въ послѣднее время сочиненія Фибоначчи были предметомъ изслѣдованій профессора *Люка*. Статьи его помѣщены въ „Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche publicato da B. Boncompagni" за 1877 г. Marzo, Aprile, Maggio T. X. и озаглавлены: Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, et sur diverses questions d'arithmetique superieure; par Ed. Lucas.

*) Мнѣніе Шаля по этому вопросу изложены имъ въ нѣсколькихъ мемуарахъ, помѣщенныхъ въ TT. XII и XIII „Comptes Rendus" Парижской Академіи наукъ за 1841 и 1842 гг. Статьи эти озаглавлены: „Note sur la nature des operations algébriques dont la connaissance a eté attribuee, à tort, à Fibonacci.—Des droits de Viete méconnus"; „Sur l'époque ou l'Algébre a été introduite en Europe" и „Sur les expressions de *res* et de *census*. Et sur le nom de la science, *Algebra* et *Almuchabala*". Статьи эти составляютъ часть изслѣдованій Шаля, озаглавленныхъ „Histoire de l'Algèbre". Въ этихъ же томахъ помѣщены возраженія Либри.

„Математическихъ коллекцій“ Паппуса и сочиненія Аполлонія „О наклоненіяхъ“. Къ числу такихъ предложеній относятся предложенія, относящіяся къ гармоническому дѣленію прямой, вопросомъ этимъ какъ извѣстно занимался Паппусъ. Впрочемъ, о послѣднихъ двухъ сочиненіяхъ Вителій не упоминаетъ въ своей „Перспективѣ“. Изъ содержанія этого сочиненія видно, что авторъ его былъ основательно знакомъ съ „Началами“ Евклида и съ „Коническими сѣченіями“ Аполлонія, а это безъ сомнѣнія указываетъ на то, что сочиненія эти были уже въ то время хорошо извѣстны и распространены на Западѣ. „Перспектива“ Вителія была первымъ сочиненіемъ по оптикѣ, написанное европейскимъ математикамъ. Авторъ его хорошо знакомый съ основами греческой Геометріи съ умѣніемъ приложилъ ихъ въ своемъ сочиненіи, такъ что оно по справедливости можетъ быть отнесено къ числу замѣчательныхъ сочиненій, по математикѣ, написанныхъ въ XIII в.

Долгое время оставался неразрѣшеннымъ вопросъ, къ какой національности принадлежалъ Вителій, хотя еще Балди въ своемъ сочиненіи „Vite de' Matematici“ и Монтукла въ своей „Исторіи математики“ говорятъ, что Вителій былъ полякъ. Даже въ послѣднѣе время Курце*) утверждаетъ, что Вителій нѣмецъ, родомъ изъ Тюрингена, и что настоящее имя его *Witelo*. Съ послѣднимъ мнѣніемъ несогласенъ Зебравскій**), который доказываетъ, что настоящее имя автора „Перспективы“ не Вителій, а *Витекъ*. Мнѣніе свое онъ основываетъ на томъ, что слово *Witek*, написанное готическими буквами XIII в., представляется въ видѣ слова *Witelo*. Съ теченіемъ времени, благодаря переписчикамъ, имя Витека получило всѣ тѣ различныя видоизмѣненія, каковы· Vitello, Vitellio, Vittulanus, Voytelo, Witelo, Vittelion, Guittulo и многія другія, которыя встрѣчаются въ различныхъ рукописныхъ спискахъ этого сочиненія***) Нѣкоторые ученые полагали, что

---

*) *Maximilien Curtze*, Sur l'ortographe du nom et sur la patrie de Witelo (Vitellion). Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze Matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni T. IV Febr 1871. Roma.

**) *T. Zebrawski*. Quelques mots au sujet de la note de M. Max. Curtze sur l'ortographe du nom et la patrie de Witelo.

Bullettino di Bibliografia ect. T. XII. Maggio. 1879. Roma.

***) Въ первый разъ „Перспектива“ Вителія была издана подъ заглавіемъ: Vitellionis Mathematici doctissimi ΠΕΡΙ ΟΠΤΙΚΗΣ, id est de natura, ratione, et proiectione radiorum uisus, luminum, colorum atque formarum, quam uulgo Perspectiuam uocant, Libri X. Norimbergae. 1535. in-fo.. Другое изданіе было также напечатано въ Нюрнбергѣ, въ 1551 г. Третье изданіе вошло въ сборникъ, подъ заглавіемъ: Opticae Thesaurus. Сборникъ этотъ заключаетъ: Alhazeni Arabis libri septem, nunc primùm editi. Eiusdem liber De Crepusculi et Nubium ascensionibus. Item Vitellonis Thuringopoloni libri X. Omnes instaurati, figur

Вителій принадлежалъ къ польской фамиліи *Ciołek* и что онъ принялъ соотвѣтствующее этому названію латинское—*Vitellio*, т. е *телёнокъ*. Въ подтвержденіи своего мнѣнія Розе указываетъ на польскаго епископа XVII столѣтія Ciołek'а, который принялъ фамилію *Vitellio*. Мы полагаемъ, что мнѣніе Зебравскаго заслуживаетъ полнаго вниманія.

Какова бы нибыла фамилія автора „Перспективы", но во всякомъ случаѣ онъ былъ полякъ, а слѣдовательно принадлежалъ къ славянскому племени Противъ этого едвали можно возражать, такъ какъ самъ авторъ, въ своемъ сочиненіи, говоритъ „in nostra terra, scilicet Poloniae", что прямо указываетъ на то, что Польша была его родиной.

Мы считали не безъинтереснымъ остановится на вопросѣ о національности Вителія, такъ какъ онъ есть первый извѣстный намъ писатель между славянами, написавшій сочиненіе математическаго содержанія.

Вителія французы называютъ Vitellion.

Пеккамъ (Peccam) епископъ Канторберійскій, современникъ Вителія, также написалъ сочиненіе по оптикѣ, изъ котораго видно, что авторъ изучалъ Геометрію. Но сочиненіе Пеккама во многомъ уступаетъ сочиненію Вителія

Кампанусъ Новарскій (Campanus), каноникъ при одной изъ парижскихъ церквей, жилъ около 1300 г. Онъ перевелъ съ арабскаго языка всѣ пятнадцать книгъ „Началъ" Евклида и написалъ къ нимъ комментаріи. Переводъ Кампануса много способствовалъ развитію Геометріи въ Европѣ. Въ первый разъ переводъ этотъ былъ напечатанъ въ 1482 г., въ Венеціи *). Комментаріи Компануса заключаютъ много интересныхъ данныхъ, ими пользовались наиболѣе извѣстные изъ комментаторовъ „Началъ", какъ напр Замберти, Лука-де-Борго, Клавіусъ и др., а также математики, писавшіе о несоизмѣримыхъ величинахъ, какъ напр. Стифель въ своемъ сочиненіи „Arithmetica integra".

Въ комментаріи къ 32-му предложенію I-й книги „Началъ" Кампанусъ говоритъ о правильномъ звѣздномъ пятиугольникѣ. Въ концѣ IV-й книги находится два предложенія, данныя Кампанусомъ, первое изъ нихъ отно-

---

illustrati et aucti, adiectis etiam in Alhazenum commentarijs, à Federico Risnero, Basileae. 1572. in-fol.

*) Сочиненіе это не имѣетъ заглавія оно начинается слѣдующими словами. Preclarissimus Liber Elementorum Euclidis, perspicacissimi in artem geometrie incipit quam feli-cissime. Изданіе это есть собственно латинскій переводъ Аделарда съ комментаріями Кампануса. Нѣкоторые термины въ этомъ переводѣ заимствованы съ арабскаго языка, изъ чего можно заключить, что переводъ сдѣланъ съ арабскаго. Такъ напримѣръ вмѣсто латинскихъ названій ромба и трапеціи приведены соотвѣтствующіе имъ арабскіе термины helmuaym и helmuariphe.

сится къ трисекціи угла, а второе къ вписыванію въ кругъ правильнаго девятиугольника. Вторая изъ этихъ задачъ зависитъ отъ трисекціи угла. Рѣшеніе, предложенное Кампанусомъ для первой задачи замѣчательно по своей простотѣ, на практикѣ оно сводится на построеніе конхоиды Никомеда. Свойство прямой, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, играющее такое важное значеніе въ теоріи несоизмѣримыхъ линій, въ X книгѣ „Началъ", въ XIII книгѣ и въ теоріи правильныхъ тѣлъ, было оцѣнено Кампанусомъ *должнымъ* образомъ. Онъ указываетъ на многія свойства такого дѣленія при чемъ называетъ ихъ достойными удивленія и вниманія философовъ, какъ вытекающія изъ начала на которое слѣдовало-бы обратить вниманіе.

Кромѣ того Кампанусу приписываютъ сочиненіе „О квадратурѣ круга", но такое мнѣніе несправедливо, такъ какъ сочиненіе написанное подъ именемъ Кампануса принадлежитъ неаполитанскому астроному и астрологу Лукѣ Гаурикусу (Lucas Gauricus) *), жившему въ началѣ XVI в.

Леонардъ Пистойскій, доминиканскій монахъ, написалъ около 1280 г. сочиненіе по Геометріи и ариѳметикѣ. Леонарда Пистойскаго часто смѣшивали съ Фибоначчи **).

Люнисъ (Guglielmo di Lunis), жившій вѣроятно въ концѣ XIII в., написалъ сочиненіе по Алгебрѣ на италіанскомъ языкѣ подъ заглавіемъ: La regola dell' argibra. Нѣкоторые математики, въ томъ числѣ и Шаль, полагали, что сочиненіе это заключало переводъ „Алгебры" Магомеда-бенъ-Музы, но такое мнѣніе несправедливо, такъ какъ въ настоящее время сочиненіе араб

---

*) Заглавіе этого сочиненія: Tetragonismus, id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boetium mathematicae perspicacissimos adinventa. Venetiis. 1503. in-4. Авторъ въ основаніи своей квадратуры принимаетъ выраженіе для отношенія окружности къ діаметру равнымъ $\frac{22}{7}$. Доказавъ нѣсколько предложеній онъ находитъ, что сторона квадрата, коего площадь равна площади круга, равна пять разъ съ половиною взятой седьмой части діаметра этого круга. Полагая діаметръ равнымъ D, находимъ для площади круга выраженіе $\frac{D^2}{4}\left(\frac{11}{7}\right)^2$, вмѣсто точнаго $\frac{D^2}{4} \cdot \frac{22}{7}$.

**) До насъ дошли имена еще нѣсколькихъ математиковъ современниковъ Леонарда Пистойскаго, написавшихъ сочиненія. Изъ числа ихъ упомянемъ неизвѣстнаго намъ по имени автора, написавшаго, какъ полагаютъ, около 1250 г. сочиненіе объ абакусѣ. Объ этомъ писателѣ упоминаетъ Ксименесъ (Ximenes). Затѣмъ слѣдуютъ *Микелоцци* (Michelozzi), *Герарди* (Gherardi), *Строцци* (Strozzi) и *Биліотти* (Biliotti) также писавшіе сочиненія по ариѳметикѣ и алгебрѣ. Къ сожалѣнію подробныхъ свѣдѣній объ упомянутыхъ нами писателяхъ не существуетъ. Приведенные нами математики жили въ XIII и XIV вв. Нѣкоторые изъ нихъ преподавали математическія науки въ университетахъ, такъ напримѣръ Биліотти излагалъ, въ Болоньѣ, ариѳметику, алгебру и абакусъ въ 1383 г. Его также называли dall' Abbaco.

скаго математика извѣстно въ подлинникѣ. Кромѣ того отыскано нѣсколько старинныхъ переводовъ этого сочиненія на латинскій языкъ *).

Дагомари (Dagomari), болѣе извѣстный подъ именемъ *Павла* dall' Abbaco, жилъ въ началѣ XIV в. Онъ принадлежалъ къ числу самыхъ ученыхъ людей своего времени и *считался* одним изъ самыхъ свѣдущихъ геометровъ. До насъ дошло написанное имъ сочиненіе объ абакусѣ, въ которомъ онъ первый дѣлитъ числа, при помощи запятыхъ, на группы изъ трехъ цифръ, чтобы удобнѣе было ихъ читать. Дагомари принадлежитъ первому честь составленія альманаха, извѣстнаго подъ названіемъ Taccuino; это первый альманахъ составленный въ Италіи **).

---

*) „Алгебра" Магомеда-бенъ-Музы была извѣстна на Западѣ въ XIII и XIV вв.; до насъ дошло нѣсколько рукописей этого сочиненія въ переводѣ на латинскій языкъ. Одинъ изъ такихъ переводовъ былъ изданъ Либри и напечатанъ въ прибавленіяхъ къ первому тому его „Исторіи математическихъ наукъ въ Италіи". Переводъ этотъ озаглавленъ: Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit. Рукопись этого перевода относится вѣроятно къ XII вѣку. Въ 1831 г. Розенъ издалъ „Алгебру" Магомеда-бенъ-Музы въ подлинникѣ съ англійскимъ переводомъ.

Кромѣ „Алгебры" Магомеда-бенъ-Музы въ XII вѣкѣ было извѣстно еще другое сочиненіе по Алгебрѣ, вѣроятно нынѣ утерянное, написанное неизвѣстнымъ намъ арабскимъ писателемъ *Саидомъ*. Сочиненіе это было, по предположеніямъ Шаля, переведено на латинскій языкъ Герардомъ Кремонскимъ, который упоминаетъ о немъ часто въ своемъ переводѣ арабскаго сочиненія геометрическаго содержанія, о которомъ мы говорили на страницахъ 193—194. Герардъ ссылаясь на это сочиненіе говоритъ: Librum praecedit illum et dicitur Saydi Alabra de quo frequenter hic facit mentionem. Шаль указываетъ на одну рукопись XII в. въ которой кромѣ геометрическаго сочиненія, переведеннаго Герардомъ Кремонскимъ, находится также сочиненіе по Алгебрѣ, начинающееся слѣдующими словами: Primum quod necessarium est aspicienti in hoc libro.... Въ этомъ сочиненіи, авторъ часто ссылается на „Алгебру" Магомеда-бенъ-Музы. Шаль высказываетъ предположеніе, что можетъ быть это сочиненіе и есть „Алгебра" Саида? Существуетъ также сочиненіе алгебраическаго содержанія, озаглавленное: Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit, et secundum librum qui Indorum dictus et composuit. Предметъ этого сочиненія, главнымъ образомъ, разборъ вопросовъ, относящихся къ правилу *ложнаго положенія*. *Большая* часть этихъ вопросовъ рѣшены также алгебраически; всѣ они сводятся къ уравненіямъ первой степени съ однимъ или двумя неизвѣстными. Весьма вѣроятно предположеніе, что содержаніе этого сочиненія было заимствовано изъ индусскихъ сочиненій, *такъ какъ извѣстно*, что правило ложнаго положенія было ими часто примѣняемо. Полагаютъ, что авторъ упомянутаго выше сочиненія Савосарда, или же Авраамъ-Абенъ-Езра (Abraham-Aben-Ezra), жившіе оба въ XII в.

Мы обратили особенное вниманіе на упомянутыя сочиненія для того чтобы показать, что въ XII вѣкѣ математики Запада занимались Алгеброй.

**) Составленіе календарей на Западѣ вѣроятно заимствовали у арабовъ. Многое въ своихъ календаряхъ арабы заимствовали у христіанъ, такъ напримѣръ, сначала они свое лѣтоисчисленіе производили при посредствѣ лунныхъ годовъ, но такой счетъ представлялъ

Біаджіо-ди-Парма (Biagio di Parma) жилъ въ началѣ XIV в. Онъ принадлежалъ къ числу самыхъ ученыхъ людей своего времени и написалъ сочиненія по Геометріи, ариѳметикѣ, астрономіи и оптикѣ. На сочиненія Біаджіо часто ссылается Пачіоли. Монтукла полагаетъ, что Біаджіо жилъ въ XIII в., вскорѣ послѣ Фибоначчи.

Іоаннъ Линерисъ (Jean de Lineriis) полагаютъ жилъ въ первой половинѣ XIV в. Національность его неизвѣстна; Либри полагаетъ, что онъ былъ родомъ изъ Сициліи, Балди же называетъ его нѣмцемъ, наконецъ нѣкоторые считаютъ его французомъ и предполагаютъ, что Ligneris, преподававшій математическія науки въ XIII в. въ Парижѣ, и Lineriis о которомъ мы говоримъ, одно и то же лицо. Линерисъ написалъ нѣсколько сочиненій астрономическаго содержанія, изъ числа которыхъ особеннаго вниманія заслуживаютъ таблицы синусовъ, названныя „Canones sinuum cum tabulis".

Данти (Danti d'Arezzo), жившій въ XIV в., написалъ сочиненіе по Геометріи, а также другое объ альгоризмѣ, составленное по „Ариѳметикѣ" Боэція. Содержаніе своего сочиненія по Геометріи Данти заимствовалъ изъ арабскихъ источниковъ.

много неудобствъ, такъ какъ въ теченіи каждыхъ 33-хъ лѣтъ начало года приходилось на всѣ мѣсяцы года. Для устраненія этого неудобства многіе арабскіе писатели пользовались солнечнымъ годомъ и сирійскими и коптскими мѣсяцами. Во время послѣднихъ калифовъ стали вводить въ календари латинскіе мѣсяцы съ указаніемъ праздниковъ христіанскихъ святыхъ. Либри, въ прибавленіяхъ къ 1-му тому своей „Исторіи математическихъ наукъ въ Италіи", помѣстилъ одинъ изъ дошедшихъ до насъ латинскихъ переводовъ такого календаря. Календарь этотъ составленъ въ началѣ XIII в., вѣроятно въ Кордовѣ или Гранадѣ, Гарибомъ, сыномъ Зеида, и посвященъ калифу Мостансиру II, умершему въ 1243 г. Заглавіе дошедшаго до насъ перевода: Liber anoe hic incipit. In hoc libro est rememoratio anni, et horarum ejus, et reditionum anoe in horis suis, et temporis plantationum, et modorum agricultararum, et rectificationum corporum, et repositionum fructuum. Въ календарѣ этомъ помѣщено множество любопытныхъ свѣдѣній по астрономіи, исторіи, географіи и т. п. Въ особенности много интересныхъ данныхъ помѣщено, относящихся къ вопросамъ о температурѣ земной поверхности, вопросовъ, касающихся земледѣлія и т. п. Въ приведенномъ Либри латинскомъ переводѣ находится много неточностей, онъ полагаетъ, что это происходитъ отъ того, что большая часть лицъ отправлявшихся въ Испанію изучать арабскую науку были мало знакомы съ арабскимъ языкомъ. Дѣлая переводы различныхъ арабскихъ сочиненій они прибѣгали къ помощи мавровъ и евреевъ, которые переводили имъ арабскія сочиненія на испанскій языкъ, впослѣдствіи переводчики сами уже переводили ихъ на латинскій языкъ. Понятно, что при такомъ способѣ переводить, нерѣдко вкрадывались ошибки и неточности. Въ приведенномъ Либри переводѣ календаря арабскія названія звѣздъ переводчикъ сохранилъ. Также впослѣдствіи нерѣдко въ календаряхъ и сочиненіяхъ астрономическаго содержанія сохранились эти арабскія названія. Объ этомъ помѣщено много интересныхъ указаній въ сочиненіи: *Ideler*, Untersuchungen über den ursprung und die bedeutung der sternnamen, Berlin, 1809, in-8.

Капаччи (Raphaël Canacci) жилъ во Флоренціи въ XIV в. Онъ написалъ на италіанскомъ языкѣ сочиненіе по Алгебрѣ, въ которомъ рѣшено много весьма трудныхъ вопросовъ, а также находится много интересныхъ данныхъ для исторіи математическихъ наукъ. Содержаніе своего сочиненія Капаччи заимствовалъ изъ „Алгебры" Леонса. Къ сожалѣнію сочиненіе это до настоящаго времени не издано.

Проcдоцимо (Prosdocimo Beldomando), жившій въ концѣ XIV в., написалъ сочиненія: объ абакусѣ, о музыкѣ, о пропорціяхъ, объ альгоризмѣ *) и по астрономіи.

По словамъ Просдоцимо, содержаніе одного изъ своихъ сочиненій онъ заимствовалъ изъ индусскихъ сочиненій. На сколько это справедливо неизвѣстно, такъ какъ сочиненіе это до насъ не дошло.

Мюрисъ (Jean de Muris), настоятель одной изъ парижскихъ церквей, жилъ въ первой половинѣ XIV в. Онъ авторъ нѣсколькихъ сочиненій, изъ которыхъ наиболѣе заслуживаютъ вниманія руководство по Геометріи и сочиненіе по Алгебрѣ и Ариеметикѣ, подъ заглавіемъ, „Quadripartitum numerorum". Послѣднее изъ этихъ сочиненій, по мнѣнію извѣстнаго Регіомонтануса, принадлежитъ къ числу самыхъ замѣчательныхъ сочиненій, написанныхъ въ древности и Средніе Вѣка **). Изъ Алгебры Мюриса заимствовали германскіе математики почти всѣ свои познанія по Алгебрѣ, такъ какъ сочиненія италіанскихъ математиковъ были имъ мало извѣстны.

Николай Оресмъ (Nicole Oresme) епископъ Лисье (Lisieux), въ Нормандіи ***), умершій въ 1382 г., написалъ сочиненіе „Algorismus proportionum", въ которомъ онъ стремится многимъ выраженіямъ „Началъ" Евклида дать алгебраическое толкованіе не прибѣгая къ геометрическимъ представленіямъ. Уже до него было извѣстно, что выраженія $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$... суть двойныя, тройныя—выраженія отношенія $\frac{a}{b}$, что отношеніе $\frac{a}{c}$ составлено изъ отношеній $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$, но Оресмъ первый подъ это правило включилъ также ирраціональныя величины. Оресму первому мы обязаны *понятіемъ о дробной*

*) Сочиненіе это было напечатано въ 1483 г., въ Падуѣ, подъ заглавіемъ „Algorismus".

**) Регіомонтанусъ выражается въ слѣдующихъ словахъ объ Алгебрѣ Мюриса: Habetur apud nostros Quadripartitum numerorum, opus insigne admodum.

***) Оресмъ былъ воспитателемъ французскаго короля Карла V, по приказанію котораго онъ перевелъ нѣкоторыя изъ сочиненій Аристотеля на французскій языкъ. Въ награду за сдѣланный переводъ Оресмъ получилъ, въ 1371 году, отъ короля *сто франковъ*. (*Crévier*, Histoire de l'université de Paris, 1761, in-16. T. II, pag. 427).

степени и ея выраженіе формулой. Обозначеніе, употребленное имъ немного разнится отъ настоящаго, такъ напр. выраженіе $\left(1\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ онъ пишетъ въ видѣ $\frac{1}{2} \cdot 1^{p}\frac{2}{3}$; или вмѣсто выраженія $\left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ онъ пишетъ $\frac{1}{4} \cdot 2^{p}\frac{1}{2}$ и т. п. Оресмъ первый далъ правила для дѣйствій и преобразованій надъ такими выраженіями. Выраженія, которыя онъ разсматриваетъ въ настоящее время пишутся въ слѣдующей формѣ:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{1}{m}}, \quad a \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^n b\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^n b^m\right)^{\frac{1}{mn}}, \quad a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)^{\frac{1}{nm}}, \text{ и т. п.}$$

Ганкель въ сочиненіи Оресма видитъ первыя примѣненія методологическаго принципа, названнаго имъ *закономъ постоянства* (Permanenz formaler Gesetze*)), по которому обобщенія понятій дѣлаются не на основаніи ихъ дѣйствительнаго содержанія, а на основаніи извѣстныхъ внѣшнихъ свойствъ, и который состоитъ въ подведеніи подъ одно начало этихъ свойствъ не обращая вниманія на ихъ происхожденіе и первоначальное значеніе. Подобное воззрѣніе вполнѣ въ духѣ новѣйшей математики, но было совершенно противно и несогласно съ понятіями древнихъ геометровъ.

Ѳома Брадвардинъ (Thomas Bradwardini) епископъ Кенторберійскій, прозванный doctor profundus, принадлежалъ къ числу самыхъ замѣчательныхъ ученыхъ XIV столѣтія. Онъ основательно былъ знакомъ съ математическими науками, философіей, богословіемъ и арабской литературой. Брадвардинъ принадлежалъ къ числу послѣдователей платоновскихъ воззрѣній, которыя тогда только что начинали проникать въ Европу. Онъ одинъ изъ первыхъ стремился приложить геометрическій методъ изслѣдованій въ изученіи богословскихъ наукъ и этимъ много способствовалъ развитію новаго направленія, проникшему въ монастыри,—центрамъ ученой дѣятельности того времени, именно: свободѣ мысли и сужденій.

Брадвардинъ первый, между геометрами, положившій основаніе теоріи правильныхъ звѣздныхъ многоугольниковъ**) въ своемъ сочиненіи подъ за-

*) *H. Hankel.* Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig. 1867 in-8, p. 10.

**) Исторія развитія вопроса о правильныхъ звѣздныхъ многоугольникахъ изложена довольно подробно въ статьѣ Гюнтера. Die geschichtliche Entwickelung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyëdern in der Neuzeit; статья эта помѣщена въ сочиненіи *Dr. Sieg. Günther*, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1876. in-8. Другая статья по тому же предмету, написана тѣмъ же

главіемъ „Geometria speculativa", написанномъ въ 1344 г. и напечатанномъ въ первый разъ въ 1496 г. *). Звѣздные многоугольники онъ называетъ *выступающими фигурами* (figuris egredientium).

Звѣздные многоугольники были извѣстны еще въ древности; намъ извѣстно, что правильный звѣздный пятиугольникъ у пиѳагорейцевъ служилъ знакомъ, по которому они узнавали другъ друга. Многоугольнику этому они приписывали различныя мистическія свойства. Правильный звѣздный пятиугольникъ находится также въ „Геометріи" Боэція и въ комментаріяхъ Кампануса на „Начала" Евклида. Мы уже выше сказали, что Брадвардинъ былъ первый, между геометрами, изложившій теорію правильныхъ звѣздныхъ многоугольниковъ съ математической точки зрѣнія, это заслуживаетъ вниманія еще въ томъ отношеніи, что впослѣдствіи, уже долго послѣ Брадвардина, многіе ученые продолжали многоугольникамъ этимъ приписывать различныя мистическія свойства и сверхъестественное значеніе. Такъ напримѣръ, извѣстный Парацельсъ, жившій въ XVI столѣтіи **), счи-

---

авторомъ и напечатана въ Bulletino di Bibliografia e di Storia dele Scienze matematiche e fisiche за 1873 г. T. VI. Agosto, подъ заглавіемъ Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell' antichità e nel medio evo del Sig. Günther.

Теорія правильныхъ звѣздныхъ многоугольниковъ была разработана Пуансо въ статьѣ: *Poinsot*, Mémoire sur les polygones et les polyèdres. Journal de l'École Polytechn., 10 Cahier.

*) Полное заглавіе сочиненія Брадвардина слѣдующее: Geometria speculativa. Breve compendium artis Geometriae à Thoma Bravardini ex libris Euclidis, Boetii, et Campani peroptimè compilatum et dividitur in quattuor tractatus. Lutetia. 1496. in-4. Сочиненіе это было впослѣдствіи издано еще нѣсколько разъ. Заглавіе маленькаго сочиненія, приложеннаго въ концѣ „Геометріи": Tractatus de quadratura circuli editus à quodam archiepiscopo ordinis fratrum minorum Probemium.

**) *Парацельсъ* принадлежалъ къ числу самыхъ удивительныхъ людей. Настоящее его имя было *Филиппъ Бомбастъ*, самъ же себя онъ называлъ Philippus Aureolus Theophrastus Paracelsus Bombastus von Hohenheim. *Онъ родился* въ 1493 г. въ Швейцаріи. По его собственнымъ словамъ, двадцати лѣтъ отъ роду, онъ началъ путешествовать и посѣтилъ: Италію, Португалію, Францію, Венгрію, Польшу, Швецію, Египетъ и Туркестанъ. Во время своихъ десятилѣтнихъ странствованій онъ познакомился съ большею частью ученыхъ того времени и пріобрѣлъ самыя многостороннія познанія. Нуждаясь въ деньгахъ Парацельсъ нерѣдко принужденъ былъ предсказывать будущее, гадать, заклинать мертвыхъ и т. п. Въ 1526 г. онъ занялъ каѳедру хирургіи и физики въ Базельскомъ университетѣ, гдѣ впрочемъ оставался всего годъ и снова началъ свои скитанія по различнымъ странамъ. Въ 1541 г. Парацельсъ умеръ въ Зальцбургѣ въ городской больницѣ.

Парацельсъ болѣе всего извѣстенъ какъ химикъ. Онъ одинъ изъ первыхъ высказалъ правильное мнѣніе о значеніи воздуха. По его понятіямъ если-бы воздуха небыло, то жизнь существъ была-бы немыслима. Причина горѣнія дерева, по его мнѣнію, воздухъ. Парацельсъ также одинъ изъ первыхъ обратилъ вниманіе на выдѣленіе водорода при обливаніи желѣза, погруженнаго въ воду, сѣрной кислотой. По примѣру алхимиковъ онъ полагалъ, что всѣ ме-

галъ правильный звѣздный пятиугольникъ какъ символъ здоровья. Другой ученый Кирхеръ *) въ своей „Arithmologia“ разсказываетъ о правильныхъ звѣздныхъ пятиугольникѣ и семиугольникѣ (онъ называетъ ихъ pentalpha и hexalpha), при чемъ упоминаетъ при какихъ таинственныхъ обстоятельствахъ пользуются первымъ изъ нихъ. Подобныя суевѣрныя воззрѣнія на звѣздный пятиугольникъ сохранились до конца прошедшаго столѣтія. Кестнеръ (Kästner) упоминаетъ въ своемъ сочиненіи „Geometrische Abhandlungen. Göttingen. 1790“, что въ 1780-хъ годахъ въ день рожденія русской императрицы Екатерины II, врачи обѣдали за столомъ, имѣющимъ форму правильнаго звѣзднаго пятиугольника, какъ служащаго символомъ здоровья. Звѣздный пятиугольникъ у грековъ былъ извѣстенъ подъ именемъ *пентаграмма*, потому что онъ можетъ быть начерченъ въ одинъ пріемъ непрерывно (γράμμα значитъ *черта* или *линія*).

„Геометрія“ Брадвардина состоитъ изъ четырехъ частей; мы вкратцѣ укажемъ на содержаніе каждой изъ нихъ.

Въ первой части изложены опредѣленія, аксіомы и постулаты, которые находятся въ „Началахъ“ Евклида, а также помѣщена теорія звѣздныхъ многоугольниковъ.

Во второй части говорится о треугольникахъ, четыреугольникахъ, кругѣ и изопериметрическихъ фигурахъ. Мы уже выше упоминали, что первый писавшій, между математиками, о изопериметрическихъ фигурахъ былъ Зенодоръ, но о немъ Брадвардинъ ничего не упоминаетъ.

Въ третьей части изложены пропорціи и измѣреніе площадей треугольника, четыреугольника, многоугольниковъ и круга. Площадь круга Брадвардинъ полагаетъ равной площади прямоугольника, построеннаго на половинѣ длины окружности и половины радіуса одного и того же круга. Предложеніе это Брадвардинъ заимствовалъ изъ сочиненія Архимеда „Объ

таллы состоятъ изъ трехъ началъ: духа, души и тѣла, или иными словами: ртути, сѣры и соли. Окиси металловъ Парацельсъ называлъ *мертвымъ металломъ*, такъ напр. ржавчину онъ называлъ мертвымъ желѣзомъ. Весьма интересны также воззрѣнія Парацельса на жизнь и составъ тѣла человѣка.

Парацельсъ написалъ много сочиненій. Самое полное изданіе напечатано въ Базелѣ, въ 1589 г., въ 10 томахъ, in-4.

*) *Кирхеръ* (1602—1680) извѣстенъ своими обширными и многосторонними познаніями. Онъ былъ іезуитъ и преподавалъ въ теченіи многихъ лѣтъ математическія науки въ Римѣ, въ коллегіи іезуитовъ. Изъ числа его сочиненій наиболѣе извѣстны. „Arithmologia, sive de abditis numerorum exponitur, mysteriis ect. Romae. 1665. in-4“. „Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta. Romae, 1646, in-fol“. и мн. др. Сочиненія Кирхера заключаютъ не столько замѣчательнаго, сколько любопытнаго. Ему приписываютъ много интересныхъ изобрѣтеній, въ томъ числѣ и волшебный фонарь.

измѣреніи круга", но онъ не приводитъ доказательства. Для отношенія *окружности* къ діаметру Брадвардинъ даетъ число $\frac{22}{7}$.

Въ четвертой части говорится о тѣлахъ, плоскостяхъ, тѣлесныхъ углахъ, пяти правильныхъ тѣлахъ и о шарѣ.

Въ концѣ „Геометріи" Брадвардина помѣщено маленькое сочиненіе о квадратурѣ круга, но съ достовѣрностью нельзя сказать кто авторъ этого послѣдняго сочиненія. По мнѣнію Гаурикуса сочиненіе это написано Кампанусомъ.

Николай Куза родился въ 1401 г., а умеръ въ 1464 г. Онъ былъ кардиналъ и занималъ мѣсто епископа въ Бриксенѣ. Куза принадлежалъ къ числу самыхъ ученыхъ людей своего времени, онъ одинъ изъ первыхъ созналъ всю важность изученія математическихъ наукъ и явился противникомъ схоластической философіи, принявъ въ основаніи этой науки начала, положенныя Платономъ. Онъ авторъ нѣсколькихъ сочиненій по математикѣ, изъ содержанія которыхъ видно, что Куза былъ основательно знакомъ съ сочиненіями Евклида, Архимеда и другихъ математиковъ древности, къ сожалѣнію часто вмѣсто строго математическаго метода въ своихъ изслѣдованіяхъ онъ прибѣгаетъ къ философскимъ разсужденіямъ, а потому нерѣдко приходитъ къ ложнымъ заключеніямъ. Математическія науки Куза стремился прилагать ко всѣмъ наукамъ, даже къ богословію. Исходя изъ подобныхъ ложныхъ разсужденій Куза думалъ, что нашелъ рѣшеніе извѣстной задачи квадратуры круга, которою онъ однимъ изъ первыхъ снова сталъ заниматься. Для радіуса онъ далъ слѣдующее выраженіе:

$$a = \frac{p}{2n \sin \frac{180^0}{n}}$$

въ которомъ n число сторонъ правильнаго, вписаннаго въ кругъ, многоугольника, а p его периметръ. Несмотря на точность этого выраженія, при его помощи нельзя доказать несоизмѣримость отношенія окружности къ діаметру. Рѣшеніе, предложенное Кузой, нашло сильнаго критика въ лицѣ Регіомонтануса. Кузѣ также принадлежитъ честь одному изъ первыхъ, между новѣйшими математиками, быть послѣдователемъ системы Пиѳагора о движеніи земли около солнца. Нѣкоторые математики, въ числѣ ихъ также Валлисъ, въ сочиненіяхъ Кузы думали найти первую мысль о циклоидѣ, но такое мнѣніе едва-ли справедливо. Самъ Валлисъ упрекаетъ Кузу, что онъ принималъ циклоиду за дугу круга. Шаль полагаетъ, что Кузѣ было только извѣстно построеніе циклоиды, найденное механическимъ путемъ.

Большая часть сочиненій Кузы относится къ вопросу о квадратурѣ круга. Въ одномъ изъ своихъ сочиненій онъ говоритъ о коническихъ сѣченіяхъ и способахъ ихъ построенія въ плоскости.

Большая часть сочиненій, написанныхъ кардиналомъ Кузой, относится къ богословію *).

Пурбахъ (**Georg von Peuerbach**) родился въ 1423 г. недалеко отъ Линца. Первоначальное образованіе онъ получилъ въ Вѣнскомъ университетѣ, а затѣмъ отправился слушать лекціи въ различные университеты Франціи и Италіи. Около 1453 г. онъ читалъ лекціи по астрономіи въ Феррарскомъ университетѣ. Занимаясь астрономіей и изучая „Альмагестъ" Птоломея, который въ то время, былъ основаніемъ этой науки, Пурбахъ видѣлъ всю несостоятельность существующихъ изданій этого сочиненія, а потому онъ задумалъ издать греческій текстъ „Альмагеста". Всѣ свои познанія и труды Пурбахъ приложилъ къ этой цѣли, но преждевременная смерть не позволила окончить ему задуманнаго изданія, онъ успѣлъ обработать только первыя шесть книгъ **).

Сознавая важность хорошаго руководства по Ариѳметикѣ и необходимость основательнаго знанія производить вычисленія Пурбахъ написалъ сочиненіе „**Introductorium in Arithmeticam, Algorithmus de integris**", которое было включено въ число основныхъ руководствъ, по которымъ читали свои лекціи профессора въ Вѣнскомъ университетѣ ***). Сочиненіе это также служило

---

*) Сочиненія Кузы въ первый разъ были напечатаны въ Парижѣ въ 1514 г., а потомъ въ Базелѣ въ 1565 г. подъ заглавіемъ: D. Nicolai de Cusa cardinalis, utriusque juris doctoris, in omnique Philosophia incomparabilis viri Opera. in-fol. Первые два тома этого собранія заключаютъ богословскія и философскія сочиненія Кузы, а третій—математическія. Вотъ заглавія математическихъ сочиненій, написанныхъ Кузой: 1) De Geometricis transmutationibus; 2) De Arithmeticis complementis; 3) De Mathematicis complementis, 4) De Quadratura circuli; 5) De sinibus et chordis; 6) De unâ recti curvique mensurâ, 7) Complementum Theologicum figuratum in complementis mathematicis, 8) De Mathematicâ perfectione; 9) Reparatio Calendarii, 10) Correctio Tabularum Alfonsi; 11) Alia quaedam ex Gaurico in Cusam adjecta.

**) Въ 1460 г. въ Вѣну прибылъ кардиналъ Бессаріонъ, одинъ изъ самыхъ ученыхъ людей того времени, который принялъ живое участіе въ изданіи греческаго текста „Альмагеста". Онъ пригласилъ Пурбаха, совмѣстно съ его ученикомъ Регіомонтаномъ, ѣхать съ нимъ въ Италію изучать, находившіяся тамъ рукописи „Альмагеста". Пурбахъ не зналъ греческаго языка, а потому помощь кардинала Бессаріона, хорошо знакомаго съ математической литературой древнихъ Грековъ, была ему необходима. Среди приготовленій къ отъѣзду въ Италію Пурбахъ умеръ въ 1461 г. 38 лѣтъ отъ роду.

***) До этого времени при чтеніи лекцій пособіемъ служило сочиненіе Сакро-Боско „Algorismus". Кромѣ сочиненія Пурбаха, въ число каноническихъ книгъ, по которымъ читали профессора, входили слѣдующія сочиненія: „Arithmetica communis ex divi Severini Boetii Arithmetica per M. Joannem de Muris compendiose excerpta"; „Tractatus brevis proportio-

пособіемъ и въ другихъ университетахъ, какъ напр. въ Лейпцигскомъ и Виттенбергскомъ. Въ сочиненіи Пурбаха изложены слѣдующія дѣйствія: Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio и извлеченіе квадратныхъ корней. Указано суммированіе членовъ геометрическихъ прогрессій. Всѣ дѣйствія производятся тѣми же способами, какъ и въ настоящее время, кромѣ дѣленія и извлеченія квадратныхъ корней. Все сочиненіе состоитъ изъ правилъ безъ доказательствъ и безъ примѣровъ.

Находя таблицы хордъ Птоломея неудовлетворяющими современному ему состоянію Астрономіи, Пурбахъ составилъ болѣе точныя таблицы синусовъ *). Радіусъ круга Пурбахъ положилъ равнымъ 600000, а градусы возрастали у него отъ 10′ до 10′. Въ предисловіи къ своимъ таблицамъ Пурбахъ показываетъ способъ вычисленія синусовъ по методу Арзахеля **), а также приводитъ предложенія первой книги „Альмагеста", относящіяся къ вычисленію хордъ ***).

Регіомонтанусъ, одинъ изъ самыхъ замѣчательныхъ ученыхъ Германіи, родился въ 1436 г. въ Кенигсбергѣ, во Франконіи. Настоящее имя его *Іоаннъ Мюллеръ* (Johannes Müller), но по обычаю того времени онъ называлъ себя по мѣсту своего рожденія *Johannes de Monte Regio* или же просто *Regiomontanus*'омъ ****). Двѣнадцати лѣтъ отъ роду онъ поступилъ въ Лейпцигскій университетъ, въ которомъ оставался до 1450 г. Желаніе основательно изучить математику, и въ особенности астрономію, заставило Регіо-

---

num abbreviatus ex libro de proportionibus D. Thomae Bragnardini Anglici". „Tractatus de Latitudinibus formarum secundum doctrinam magistri Nicolai Horem (Oresmii)"; „Tractatus de Minutiis phisicis compositus Viennae Austriae per M. Joannem de Gmunden". Сочиненія эти были напечатаны въ 1515 г. въ Вѣнѣ, въ видѣ одного Сборника.

*) Таблицы синусовъ были извѣстны арабамъ, которые заимствовали ихъ отъ Индусовъ. Таблицы эти были отъ $^1/_4$ до $^1/_4$ градуса. Птоломей полагалъ радіусъ круга равнымъ 60, а *Арзахель* полагалъ его равнымъ 150.

**) *Авраамъ Арзахель* арабскій астрономъ, жившій около 1080 г. въ Толедо. Онъ былъ еврей. По словамъ Ретикуса онъ составилъ *Толедскія таблицы*, названныя такъ потому что онѣ вычислены для меридіана Толедо. Таблицы эти послужили къ составленію *Альфонсовыхъ таблицъ*.

***) Заглавіе этихъ таблицъ: Nova tabula sinus de decem minutis in decem, per multas millenarias partes cum usu: quae plurimarum rerum in astronomia occasio fuit. Таблицы эти не напечатаны. Предисловіе къ этимъ таблицамъ напечатано при сочиненіи: Tractatus Georgii Peurbachii super propositiones Ptolemaei de Sinibus et Chordis. Item Compositio Tabularum Sinuum per Joannem de Regiomonte. Adjectae sunt et Tabulae Sinuum duplices per eundem Regiomontanum. Omnia nunc primum in utilitatem Astronomiae studiosis impressa. Norimbergae apud Joh. Petreium anno Christi M. D. XLI.

****) Регіомонтануса иногда называли *Montroyal*.

монтануса отправится въ Вѣну, университетъ которой пріобрѣлъ извѣстность, какъ главный центръ развитія математическихъ наукъ, благодаря Пурбаху, который въ то время преподавалъ тамъ математическія науки. Вскорѣ между учителемъ и ученикомъ завязалась самая тѣсная дружба,— они работали совмѣстно. Какъ только Регіомонтанусъ достигъ числа лѣтъ, необходимыхъ, по правиламъ университета, для полученія права занять мѣсто преподавателя, онъ получилъ мѣсто доцента при своемъ учителѣ. Сначала, въ 1458 г., онъ читалъ Perspectiva communis, подъ этимъ именемъ была извѣстна Оптика; а въ 1460 г. онъ объяснялъ студентамъ I-ю книгу „Началъ“ Евклида.

Регіомонтанусъ принималъ дѣятельное участіе при изданіи „Альмагеста“, предпринятаго Пурбахомъ. Онъ собирался отправиться съ нимъ вмѣстѣ въ Италію изучать греческій языкъ и познакомиться съ древними греческими рукописями, находящимися въ этой странѣ, но Пурбахъ умеръ и Регіомонтанусъ одинъ сопровождалъ кардинала Бессаріона. Въ 1461 г. они прибыли въ Римъ, гдѣ Регіомонтанусъ обработалъ остальныя семь книгъ „Альмагеста“ и привелъ къ концу „Epitome in Ptolemaie Almagestum“ начатое Пурбахомъ. Въ это же время Регіомонтанусъ писалъ свою Тригонометрію. Въ 1463 г. Бессаріонъ былъ назначенъ посломъ въ Венецію, куда его сопровождалъ Регіомонтанусъ. Затѣмъ онъ слушалъ лекціи въ Феррарскомъ университетѣ, а потомъ читалъ лекціи по астрономіи въ Падуанскомъ университетѣ въ 1464 г. Въ этомъ же университетѣ нѣкоторое время читалъ лекціи и Пурбахъ. До 1468 г. Регіомонтанусъ оставался въ Италіи, гдѣ онъ собиралъ всевозможныя математическія рукописи, многія изъ которыхъ онъ переписывалъ собственноручно. Возвратившись въ Вѣну Регіомонтанусъ не рѣшился занять снова мѣсто преподавателя въ университетѣ, онъ считалъ для себя невозможнымъ читать лекціи по устарѣвшимъ руководствамъ. Побывъ нѣкоторое время въ Вѣнѣ Регіомонтанусъ поступилъ на службу къ венгерскому королю Матвею Корвину, большому почитателю астрономіи, который основалъ въ Офенѣ громадную библіотеку, въ которой было много древне-греческихъ рукописей. Въ Венгріи Регіомонтанусъ оставался недолго, вслѣдствіи постоянныхъ войнъ, онъ принужденъ былъ въ 1471 г. переселиться въ Нюренбергъ, гдѣ онъ построилъ обсерваторію, снабженную самыми лучшими приборами, сдѣланными подъ его руководствомъ. Кромѣ того онъ завелъ собственную типографію для печатанія математическихъ сочиненій. Средства для всего этого были ему доставлены другомъ— нюренбергскимъ богачемъ Вальтеромъ. Къ сожалѣнію Регіомонтанусъ не долго пользовался такимъ счастливымъ положеніемъ, въ 1475 г. онъ долженъ былъ отправиться въ Римъ, по приглашенію папы Сикста IV, чтобы принять участіе въ исправленіи календаря. Въ 1476 г. Регіомонтанусъ

умеръ въ Римѣ. Нѣкоторые говорятъ, что сыновья Георгія Трапезунтскаго отравили его, желая отомстить ему за неблагопріятные отзывы о переводѣ „Альмагеста“, сдѣланнымъ *ихъ отцемъ*, *но болѣе вѣроятно*, что Регіомонтанусъ сдѣлался жертвой злокачественной лихорадки.

Разсмотримъ вкратцѣ содержаніе сочиненій, написанныхъ Регіомонтанусомъ и укажемъ на его труды по Тригонометріи. Во время бытности своей въ Нюренбергѣ Регіомонтанусъ задумалъ громадное предпріятіе: издать всѣ сочиненія древнихъ математиковъ, а также новѣйшихъ и свои собственныя. Списокъ сочиненій, *которыя должны были быть* отпечатаны въ его типографіи былъ имъ опубликованъ. Подобное предпріятіе указываетъ на энергію Регіомонтануса и его обширныя свѣдѣнія, но едва-ли одинъ человѣкъ могъ бы довесть это дѣло до конца.

Находя таблицы синусовъ, вычисленныя Пурбахомъ, недостаточно точными Регіомонтанусъ вычислилъ двѣ новыя таблицы синусовъ для угловъ отъ 1′ до 1′, при чемъ одна *для* радіуса=6000000, *другая для* радіуса равнаго 10000000 *). При первой таблицѣ приложено объяснительное введеніе, въ которомъ показано устройство таблицъ и ихъ употребленіе. Въ этомъ введеніи Регіомонтанусъ доказываетъ, что если извѣстенъ синусъ дуги меньшей 90°, то извѣстенъ и синусъ дуги дополнительной. Регіомонтанусомъ была вычислена еще третья таблица, это -таблица тангенсовъ, извѣстная подъ именемъ „**Tabula foecunda**“, въ ней даны тангенсы всѣхъ дугъ при радіусѣ равномъ 100000 **). Регіомонтанусъ *былъ первый* между математиками Запада, который ввелъ тангенсы въ Тригонометрію. Извѣстно, что еще въ X в. арабскій астрономъ Абулъ-Вефа ввелъ ихъ въ Тригонометрію, но неизвѣстно зналъ-ли объ этомъ Регіомонтанусъ.

Самое замѣчательное изъ сочиненій Регіомонтануса это безъ сомнѣнія его трактатъ по Тригонометріи, подъ заглавіемъ: „**De triangulis omnimodis libri quinque**“ ***). Еще Пурбахъ сознавалъ необходимость хорошаго сочиненія по Тригонометріи, но ранняя смерть помѣшала ему выполнить свое желаніе. Окончивъ изданіе „Альмагеста“ Регіомонтанусъ принялся за осущест-

---

*) Обѣ таблицы изданы въ 1541 г.

**) Таблицы эти помѣщены въ Johannis de Monte Regio, mathematici clarissimi, tabulae directionum protectionumque totam rationem primi motus continentes ect. Viteberg. 1606.

***) Сочиненіе это было напечатано только долгое время послѣ смерти автора, подъ заглавіемъ: Doctissimi viri et mathematicarum discipl. eximii Professoris, Joannis de Regiomonte, de triangulis omnimodis libri quinque... Accesserunt huc in calce pleraque D. Nicolai Cusani de quadratura circuli, deque recti ac curvi commensuratione, itemque Jo. de monte regio eadem de re ἐλεγκτικά, hactenus a nemine publicata. Norimberg. 1533.

вленіе мысли Пурбаха. Къ сожалѣнію только первая часть этого сочиненія вполнѣ окончена и приготовлена къ печати самимъ Регіомонтанусомъ, остальныя части остались не вполнѣ отдѣланными. Разсмотримъ содержаніе этого сочиненія.

Книга I начинается опредѣленіями и основными предложеніями; указаны условія при которыхъ даны величины, напр. если дана линія, то данъ и ея квадратъ, и обратно; если дано отношеніе двухъ величинъ и одна изъ нихъ, то дана и другая; если изъ четырехъ пропорціональныхъ величинъ даны три, то дана и четвертая и т. п. Съ 20-го предложенія начинается Тригонометрія, при чемъ прежде всего разсматриваются прямоугольные треугольники. Части треугольника опредѣляются только чрезъ синусъ, о другихъ тригонометрическихъ функціяхъ не говорится. Всѣ предложенія предварительно доказаны геометрически, при чемъ приложенъ численный примѣръ. Послѣ этого авторъ переходитъ къ равностороннему, равноугольному и разностороннему треугольникамъ. Затѣмъ весьма обстоятельно рѣшена задача: по тремъ даннымъ сторонамъ найти углы треугольника. Сначала Регіомонтанусъ опредѣляетъ каковы углы въ треугольникѣ: прямые, острые или тупые, а затѣмъ опредѣляетъ части, на которыя дѣлится основаніе треугольника перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ противолежащей ему вершины; опредѣливъ эти части, онъ находитъ высоту, а потомъ уже и самые углы. Послѣ этого авторъ рѣшаетъ слѣдующія задачи: по двумъ даннымъ сторонамъ и углу, между ними заключенному, найти остальныя части треугольника; по даннымъ двумъ сторонамъ и тупому углу, противолежащему одной изъ нихъ (если одной изъ сторонъ противолежитъ острый уголъ, то нѣтъ достаточно условій для опредѣленія остальныхъ частей треугольника; если же при этомъ дано положеніе перпендикуляра, опущеннаго на эту сторону, то части треугольника вполнѣ опредѣлены); по данной сторонѣ и двумъ ей прилежащимъ угламъ; по данной сторонѣ, одному прилежащему ей, а другому противолежащему углу, опредѣлить остальныя части треугольника.

Книга II начинается предложеніемъ, что отношеніе сторонъ прямолинейнаго треугольника равно отношенію синусовъ угловъ, лежащихъ противъ этихъ сторонъ. За этимъ слѣдуетъ цѣлый рядъ предложеній, относящихся къ плоскому треугольнику. Всѣ эти предложенія онъ изслѣдуетъ геометрически, только для двухъ изъ нихъ *), которыя онъ не можетъ рѣшить геометри-

*) Предложенія эти слѣдующія: 1) Данъ перпендикуляръ, основаніе и отношеніе сторонъ, найти каждую изъ сторонъ? 2) Дана разность двухъ сторонъ, разность отрѣзковъ, на которые раздѣлено основаніе высотою, и высота; найти каждую изъ сторонъ?

чески, онъ прибѣгаетъ къ Алгебрѣ или какъ Регіомонтанусъ выражается: „per artem rei et census“.

Книга III заключаетъ Сферическую Тригонометрію, въ основаніи которой принята „Сферика“ Менелая. Въ началѣ изложены предложенія, относящіяся къ шару и къ различнымъ кругамъ на шарѣ, а затѣмъ авторъ переходитъ къ разсмотрѣнію сферическихъ треугольниковъ вообще.

Книга IV разсматриваетъ *прямоугольные* и вообще всякіе сферическіе треугольники. Въ этой книгѣ изложены основныя предложенія Сферической Тригонометріи.

Книга V содержитъ задачи и предложенія, относящіяся къ сферическимъ треугольникамъ.

Изъ числа предложеній этой книги заслуживаетъ особеннаго вниманія слѣдующее: *Дуга большаго круга, дѣлящая пополамъ уголъ при вершинѣ сферическаго треугольника, разсѣкаетъ основаніе на такія двѣ части, которыхъ синусы относятся между собою, какъ синусы сторонъ, заключающихъ данный уголъ.* Этому предложенію соотвѣтствуетъ аналогичное имѣющее мѣсто для плоскихъ треугольниковъ, которое было извѣстно уже греческимъ геометрамъ.

Въ послѣднихъ двухъ книгахъ Регіомонтанусъ вводитъ свои обозначенія для градусовъ и минутъ. Обозначенія эти состоятъ въ слѣдующемъ: $\overset{\circ}{31}.20 = 31^{0}20'$.

Въ этомъ сочиненіи Тригонометрія изложена Регіомонтанусомъ такъ, какъ она излагается и въ настоящее время; основной характеръ остается тотъ-же. Изъ другихъ сочиненій Регіомонтануса укажемъ еще на слѣдующія:

„**Oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas, Patavii habita, cum Alfraganum publice praelegeret**“ *). Въ этомъ сочиненіи Регіомонтанусъ дѣлаетъ обозрѣніе всѣхъ математическихъ наукъ, указываетъ на ихъ содержаніе, происхожденіе и взаимную связь. Начало наукъ онъ полагаетъ въ Египтѣ. Затѣмъ онъ разбираетъ сочиненія главнѣйшихъ писателей древности и новѣйшаго времени, и указываетъ на значеніе и направленіе ихъ трудовъ.

*) *Альфергани* (Alferganus или Alfraganus) арабскій астрономъ, умершій въ 820 г., былъ родомъ изъ Фергана. Альфергани принималъ участіе, по приказанію Альмамуна, въ исправленіи таблицъ Птолемея. Онъ написалъ „Начала Астрономіи“ или „Книга о движеніяхъ свѣтилъ“. Сочиненіе это было сначала переведено на еврейскій языкъ. Впослѣдствіи оно было переведено на латинскій языкъ Іоанномъ Севильскимъ въ XII в., а затѣмъ напечатано въ Феррарѣ въ 1493 г. Кромѣ того извѣстны также и другіе переводы этого сочиненія. Арабскій текстъ этого сочиненія былъ изданъ Голіусомъ (Golius, въ 1669 г. in-4. Альфергани называли современники *вычислителемъ* (el-Hacib).

Читая это сочиненія удивляешься необыкновеннымъ познаніямъ Регіомонтануса и его всеобъемлющему взгляду на состояніе всѣхъ наукъ.

Другое сочиненіе: „In Elementa Euclidis Praefatio“, состоитъ всего изъ трехъ страницъ. Вѣроятно оно должно было служить введеніемъ къ новому, исправленному изданію латинскаго перевода „Началъ“ Евклида, сдѣланнымъ Аделардомъ Батскимъ и Кампанусомъ. Первый изъ этихъ переводовъ Регіомонтанусъ въ своей рѣчи, произнесенной въ Падуанскомъ университетѣ, называетъ „eleganter et brevissime tacta“. До сихъ поръ еще сохранилась въ Нюренбергской библіотекѣ рукопись этого перевода, переписанная самимъ Регіомонтанусомъ *). Евклида онъ не считаетъ авторомъ „Началъ“, а полагаетъ, что онѣ только собраны Евклидомъ.

Регіомонтанусу приписываютъ еще сочиненіе „Algorithmus demonstratus“ **), содержаніе котораго Ариѳметика и Алгебра. Сочиненіе это интересно еще въ томъ отношеніи, что онъ излагаетъ ариѳметику теоретически, не основывая свои разсужденія на практическихъ примѣненіяхъ. Что это сочиненіе дѣйствительно принадлежитъ Регіомонтанусу, можно заключить еще потому, что онъ въ рѣчи, произнесенной въ Падуѣ, упоминаетъ о своихъ сочиненіяхъ по Ариѳметикѣ и Алгебрѣ ***) Регіомонтанусу принадлежитъ первому честь составленія альманаха „Calendarium“,—это первый альманахъ составленный и изданный въ Европѣ. Онъ былъ напечатанъ въ 1476 г. въ Аугсбургѣ. Сочиненіе это посвящено императору Рудольфу, отъ котораго Регіомонтанусъ за свой трудъ удостоился получить 1200 золотыхъ талеровъ.

Регіомонтанусъ далъ тригонометрическое рѣшеніе извѣстной задачи, находящейся въ сочиненіяхъ Брамагупты, и которой занимались многіе математики XV и XVI столѣтій. Задача эта состоитъ въ слѣдующемъ: по даннымъ четыремъ сторонамъ построить четыреугольникъ, вписанный въ кругъ ****).

---

*) Оба послѣднія сочиненія помѣщены въ изданіи: Continentur in hoc libro Rudimenta astronomica Alfragani. Item Albategnius astronomus peritissimus de motu stellarum, ex observationibus tum propriis, tum Ptolemaei, omnia cum demonstrationibus Geometricis et Additionibus Joannis de Regiomonte. Item Oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas Joannis de Regiomonte, Patavii habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Ejusdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item Epistola Philippi Melanthonis nuncupatoria, ad Senatum Norimbergensem. Omnia jam recens prelis publicata. Norimbergae anno MDXXXVII. in-4.

**) Сочиненіе это издано Шенеромъ (Schoner) въ 1534 г.

***) Мы уже выше замѣтили, что нѣкоторые приписываютъ это сочиненіе Пейербаху.

****) Рѣшеніе, предложенное Регіомонтанусомъ, помѣщено въ интересномъ сборникѣ, изданнымъ *Мурромъ* (Murr) подъ заглавіемъ Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et Universitatis Altorfinae. Norinberg. 1786. 3 vol. in-8.

Регіомонтанусъ былъ также искусный механикъ; по словамъ Рамуса онъ устроилъ искуственную муху, которая могла летать, а также имъ былъ устроенъ орелъ, сопровождавшій императора, при въѣздѣ въ городъ, до самаго дворца. На сколько справедливы эти разсказы нельзя сказать, но вѣроятно они преувеличены современниками. Извѣстно только, что Регіомонтанусъ принималъ участіе, совмѣстно съ Вальтеромъ, въ усовершенствованіи знаменитыхъ Нюренбергскихъ часовъ.

Изъ этого краткаго очерка сочиненій Регіомонтануса видно какими обширными и многосторонними математическими познаніями онъ обладалъ. По справедливости его причисляютъ къ числу замѣчательнѣйшихъ людей Германіи. Почти со всѣми учеными того времени онъ находился въ перепискѣ, предлагалъ постоянно задачи для рѣшенія; чтобы возбудить интересъ къ рѣшенію задачъ онъ нерѣдко предлагалъ призы *). Ученая дѣятельность Регіомонтануса имѣла большое вліяніе на послѣдующее развитіе математическихъ наукъ, въ особенности въ Германіи. Благодаря Регіомонтанусa Нюренбергъ пріобрѣлъ извѣстность, какъ центръ, гдѣ процвѣтали науки и искусства, такъ какъ интересъ, возбужденный имъ, къ изученію математическихъ наукъ и астрономіи нашелъ не мало послѣдователей.

Видманъ Эгръ (Johannes Widman von Eger) написалъ въ 1489 г. сочиненіе по Ариѳметикѣ, состоящее изъ трехъ частей, въ послѣдней изъ нихъ изложена Геометрія, а потому мы познакомимся съ содержаніемъ этого сочиненія.

Со времени Регіомонтануса математическія науки въ Германіи начинаютъ находить практическое примѣненіе. Въ этомъ отношеніи первое мѣсто принадлежитъ городу Нюренбергу, счетоводныя школы котораго пріобрѣтаютъ всеобщую извѣстность не только въ предѣлахъ Германіи, но и во всей Европѣ. Методы счета употребляемые нюренбергскими купцами всюду извѣстны и весьма распространены на всемъ Западѣ. Вслѣдствіи такого направленія математическихъ наукъ въ концѣ XV-го вѣка начинаютъ появлятся въ Германіи сочиненія по практической ариѳметикѣ, въ которыхъ нерѣдко кромѣ чисто ариѳметическихъ вопросовъ рѣшаются геометрическія задачи. Сочиненія эти названы были нѣмцами *rechenbücher*. Особенно много ихъ было написано въ теченіи XVI-го столѣтія **). Къ числу такихъ сочиненій принадлежитъ и ариѳметика Видмана.

---

*) Въ одномъ изъ своихъ писемъ къ Редеру (Röder) Регіомонтанусъ обѣщаетъ по двѣ венгерскія золотыя монеты за рѣшеніе всякой, изъ предложенныхъ имъ шести задачъ.

**) Первое извѣстное до настоящаго времени сочиненіе такого содержанія появилось, въ Бамбергѣ, въ 1478 г. Сочиненіе это нынѣ утеряно. Указанія на это сочиненіе находятся въ „Brem und Verd.sche Bibliothek, 2 Bd., Hamburg, 1756“ въ статьѣ: „*Weller*;s Nachricht

Мы уже выше упомянули, что это сочинение*) состоитъ изъ трехъ частей: въ первой изложены дѣйствія надъ отвлеченными числами, во второй— отношенія и пропорціи, и въ третьей Геометрія. Укажемъ вкратцѣ, что содержитъ каждая изъ этихъ частей.

Первая часть начинается съ основныхъ дѣйствій надъ числами, которыя изложены въ слѣдующемъ порядкѣ: сложеніе, вычитаніе, умноженіе на два, дѣленіе на два, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени и извлеченіе корней. Пріемы, употребленные авторомъ носятъ характеръ пріемовъ извѣстныхъ еще индусамъ. Правила даны безъ всякихъ доказательствъ, но указаны пріемы при помощи которыхъ можно узнать правильно-ли рѣшена данная задача, или нѣтъ. Далѣе слѣдуютъ дѣйствія надъ дробными числами, при чемъ рѣшено много задачъ.

Вторая часть, содержащая отношенія и пропорціи, заимствована изъ „Началъ" Евклида, сочиненій Боэція, Фронтина и „Ариѳметики" Немораріуса. Большая часть изъ вопросовъ этой части рѣшаются при помощи тройнаго правила, которое авторъ называетъ „золотое правило". Также приведено множество другихъ различныхъ правилъ, выведенныхъ изъ рѣшеній задачъ, какъ напримѣръ: правило товарищества, правило смѣси, цѣнное правило, **reg. quadrata, reg. cubica** (вычисленія объемовъ), **reg. sententiarum** (неопредѣленные вопросы, допускающіе нѣсколько рѣшеній) и т. п. Большая часть изъ этихъ правилъ относятся только къ частнымъ случаямъ, другіе болѣе

---

von alten mathematischen, besonders zur Messkunst gehörigen Büchern, die in deutscher Sprache geschrieben sind". Указаніе это слѣдующее: Das Register. Hiernach folget das Register dieses Rechenpuchleins nach seynen Capiteln und was in eynem jezlichen begriffen Hierumb den fl issigl merkern das mit gantzen Fleys ersucht mit seinen Caconen (вѣроятно должно быть Canonen) vnd Exempeln nachvolgende vnd ob yndert eyn ciffel ader mer verkert were wil ich entschuldigt sein ader zu vil ader ze wenig wer ect. Im Jare Christi 1473 kl. 17 des Meyen. Rechnung in mancherley Weiss in Babenberg durch Heinrich Petzensteiner begriffen ect.

Самая древняя, изъ извѣстныхъ до сихъ поръ печатныхъ „Ариѳметикъ", написана на италіанскомъ языкѣ и носитъ заглавіе: Incommincia una practica molta bona et utile a chiaschaduno che vuole uxare larte della mercadantia, chiamata vulgarmente larte de labbacho. A. Trevisio, 10 decem. 1478. Вся книга состоитъ изъ 62 листочковъ. Числа написаны арабскими цифрами. До настоящаго времени извѣстенъ только одинъ экземпляръ этого сочиненія, который принадлежалъ извѣстному Либри.

*) Заглавіе этого сочиненія слѣдующее: Behēde und hubsche Rechnung auff allen kauffmanschafft ect. Gedruckt in der Furstlichen Statt Leipczik durch Conradū Kachelofen Im Jare 1489. Сочиненіе Видмана было снова издано въ 1500 г., въ Пфортсгеймѣ (Pfortsheim), Ансгельмомъ (Thoman Anshelm) и въ 1526 г., въ Аугсбургѣ, Генрихомъ Штейнеромъ (Haynrich Steyner). Извѣстны также изданія 1508 г. и 1519 г.

общи. Авторъ стремится многія правила, данныя для отдѣльныхъ случаевъ въ сочиненіяхъ арабскихъ математиковъ, обобщить и подвесть подъ общее правило.

Третья часть сочиненія Видмана содержитъ Геометрію, содержаніе ея онъ заимствовалъ изъ сочиненій Евклида, Боэція и Герберта, при чемъ не обращено достаточно вниманія на строгость и вѣрность доказательствъ. Часть эта состоитъ изъ двухъ отдѣловъ. Въ первомъ, Видманъ подобно Евклиду и его послѣдователемъ, начинаетъ Геометрію съ опредѣленій: точки, линіи, угла и т. д. Четыреугольники авторъ называетъ арабскими терминами подобно Кампанусу. Окружность круга онъ находитъ умножая діаметръ на $3\frac{1}{7}$. Для нахожденія площади круга даны слѣдующія четыре правила: 1) умножить длину діаметра саму на себя и изъ произведенія вычесть $\frac{11}{14}$, полученная разность будетъ равна площади круга; 2) умножить длину окружности саму на себя и произведеніе раздѣлить на $12\frac{4}{7}$; 3) умножить половину длины окружности на половину діаметра, то произведеніе равно площади круга; и наконецъ 4) умножить діаметръ круга на длину окружности и полученное произведеніе раздѣлить на 4, то полученное частное равно площади круга. Послѣ этого авторъ переходитъ къ опредѣленію сторонъ прямоугольнаго треугольника, при посредствѣ теоремы Пиѳагора, которую онъ впрочемъ не называетъ. Далѣе онъ опредѣляетъ высоту равносторонняго треугольника по даннымъ сторонамъ, и обратно сторону по данной высотѣ. Площадь треугольника дана въ видѣ неправильнаго выраженія $\frac{a^2+a}{2}$, которое было еще извѣстно римскимъ землемѣрамъ, а потомъ встрѣчается также въ сочиненіяхъ Боэція. Также по данной площади опредѣляется сторона. Выраженіе для радіуса круга, описаннаго около равносторонняго треугольника, дано правильное. Затѣмъ разсматривается треугольникъ коего стороны 12, 13 и 15; выраженія для отрѣзковъ основанія, полученныхъ отъ перпендикуляра, опущеннаго изъ противолежащей вершины на основаніе, для высоты и площади даны въ функціи сторонъ. Далѣе дано правило, какъ найти радіусъ круга, описаннаго около подобнаго треугольника, въ видѣ выраженія:

$$r = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b)^2 + \left[\frac{h^2 + (\tfrac{1}{2}b - x)^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2}{2h}\right]^2}$$

въ которомъ h высота, b—основаніе, а x меньшій изъ отрѣзковъ основанія. Правило это дано для частнаго примѣра. Послѣ этого Видманъ рѣшаетъ слѣдующія три задачи: по данному діаметру опредѣлить сторону вписаннаго въ кругъ равносторонняго треугольника; по данной сторонѣ вписаннаго въ кругъ равносторонняго треугольника, опредѣлить окружности круговъ впи-

саннаго и описаннаго. Затѣмъ разобраны вопросы: по даннымъ тремъ сторонамъ прямоугольнаго треугольника, опредѣлить окружность круга, вписаннаго въ этотъ треугольникъ; вписать въ полукругъ, котораго діаметръ извѣстенъ, наибольшій равносторонній треугольникъ и наибольшій квадратъ; послѣдній Видманъ находитъ также при посредствѣ Алгебры. Въ концѣ рѣшены задачи: по данной сторонѣ вписаннаго въ кругъ квадрата опредѣлить окружность, и по данному діаметру опредѣлить площадь, описаннаго около круга квадрата.

Во второмъ отдѣлѣ Геометріи Видманъ занимается чисто практическими вопросами, при чемъ почти исключительно слѣдуетъ Фронтину. Невѣрныя выраженія, данныя римскими землемѣрами, для опредѣленія площадей плоскихъ фигуръ, приведены также Видманомъ, такъ напримѣръ выраженіе площади равносторонняго треугольника онъ полагаетъ равнымъ $\frac{a^2}{2}$, если a сторона треугольника; выраженіе для площади ромба онъ полагаетъ равнымъ квадрату одной изъ сторонъ; выраженія для площадей правильныхъ многоугольниковъ онъ выводитъ изъ формулъ полигональныхъ чиселъ и т. п. Но наравнѣ съ этими невѣрными выраженіями есть нѣсколько точныхъ. Въ концѣ книги приложено собраніе примѣровъ, относящихся къ рѣшенію различныхъ практическихъ вопросовъ, какъ напр.: сколько нужно камней, извѣстной величины, для постройки требуемой стѣны; сколько необходимо матеріала для постройки колодца или разбивки палатки и т. п.

Содержаніе своего сочиненія Видманъ вѣроятно заимствовалъ изъ другихъ сочиненій, которыя въ настоящее время утеряны, на это указываютъ многія обстоятельства. Изъ числа сочиненій, которыя служили ему пособіемъ при составленіи своего труда, Видманъ упоминаетъ сочиненія: Евклида, комментаріи Кампануса, Боэція, Іордана Немораріуса, Сакро-Боско и Фронтина. Въ этомъ сочиненіи впервые употреблены знаки $+$ и $-$, которые были вѣроятно заимствованы Видманомъ изъ счетныхъ книгъ купцовъ. Сочиненіе Видмана заслуживаетъ вниманія, какъ указывающее на новое направленіе, принятое математическими науками въ Германіи, а потому мы считали необходимымъ на немъ остановиться и указать его содержаніе и характеръ.

Іоаннъ Вернеръ (Johann Werner) родился въ 1468 г. въ Нюренбергѣ, гдѣ занималъ мѣсто священника; онъ умеръ въ 1528 г. Онъ занимался математикой и астрономіей, и въ особенности основательно изучилъ сочиненія Архимеда, по рукописямъ оставленнымъ Регіомонтанусомъ. Вернеръ написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ болѣе извѣстно слѣдующіе: „Коническія сѣченія"; сочиненіе это есть введеніе къ двумъ другимъ сочиненіямъ, о которыхъ мы скажемъ послѣ. „Коническія сѣченія" Вернера

заслуживаютъ особеннаго вниманія, такъ какъ это есть первое сочиненіе о коническихъ сѣченіяхъ, написанное послѣ сочиненій древнихъ геометровъ по тому же предмету. Сочиненіе это появилось въ первый разъ въ 1522 г.

Сочиненіе это содержитъ 22 предложенія, относящіяся къ свойствамъ параболы и гиперболы и построеніе этихъ кривыхъ на плоскости. Кривыя эти Вернеръ получаетъ на конусѣ, образованномъ вращеніемъ прямоугольнаго треугольника около одного изъ своихъ катетовъ; или же онъ получаетъ эти кривыя еще тѣмъ, что въ плоскости круга, внѣ его, беретъ точку, чрезъ которую онъ проводитъ къ окружности прямую, неограниченной длины, и заставляетъ ее двигаться по окружности круга. Кривыя онъ разсматриваетъ непосредственно на самомъ конусѣ и всѣ ихъ свойства доказываетъ на основаніи чисто геометрическихъ соображеній, вытекающихъ изъ свойствъ конуса. Вышеупомянутый способъ изслѣдованій вполнѣ принадлежитъ Вернеру, такъ какъ подобный методъ былъ чуждъ древнимъ геометрамъ.

Другое сочиненіе Вернера содержитъ всѣ одинадцать рѣшеній задачи „удвоенія куба", которыя были предложены древними греческими геометрами *). Въ этомъ сочиненіи помѣщено двѣнадцать прибавленій, въ которыхъ онъ рѣшаетъ нѣкоторыя стереометрическія задачи, какъ напр.: построить кубъ равновеликій данному параллелепипеду; превратить параллелепипедъ въ цилиндръ одинаковой съ нимъ высоты; обратить цилиндръ въ кубъ и др. Нѣкоторыя изъ этихъ прибавленій относятся къ Физикѣ.

Третье сочиненіе Вернера содержитъ рѣшеніе задачи „разсѣчь плоскостью шаръ въ данномъ отношеніи". Какъ извѣстно задача эта помѣщена въ комментаріяхъ Евтокія на пятое предложеніе второй книги сочиненія Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ". Задача эта была рѣшена Діонисодоромъ пересѣченіемъ параболы и гиперболы, а также Діоклесомъ—пересѣченіемъ гиперболы и эллипса. Вернеръ предлагаетъ рѣшеніе этой задачи, основанное также на пересѣченіи параболы съ гиперболой **).

Кромѣ поименованныхъ сочиненій Вернеръ написалъ еще нѣсколько другихъ, которыя не изданы, изъ числа ихъ упомянемъ: сочиненіе „О сферическихъ треугольникахъ", въ пяти книгахъ; другое, о приложеніяхъ Три-

---

*) Имена геометровъ, рѣшившихъ эту задачу, мы привели говоря объ Евтокіѣ.

**) Поименованныя сочиненія Вернера напечатаны въ сочиненіи подъ заглавіемъ: Libellus Joannis Verneri Nurenbergen. super viginti duobus elementis conicis. Ejusdem Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi ejus Problematis quod Cubi duplicatio dicitur. Ejusdem Commentatio in Dionysiodori problema, quo data sphaera a plano sub data secatur ratione. Alius modus idem problema conficiendi ab eodem Joanne Vernero novissime compertus demonstratusque. Ejusdem Joannis de motu octavae Sphaerae Tractatus duo. Ejusdem summaria enarratio Theoricae motus octavae Sphaerae. Impressum Norimbergae per Fried. Peypus. Anno MDXXII.

гонометріи къ астрономіи и географія; сочиненія по Ариѳметикѣ, Гномоникѣ и наконецъ „Tractatus resolutorius qui prope pedisequus existit libris Datorum Euclidis". По предположенію Шаля послѣднее сочиненіе относилось, по своему содержанію, къ геометрическому анализу, какъ его понимали древніе геометры. Шаль полагаетъ, что въ этомъ сочиненіи заключались предложенія, сходныя съ поризмами Евклида и составляющія какъ-бы продолженіе „Данныхъ" Евклида.

Вернеръ пытался также возстановить утерянное сочиненіе Аполлонія „De sectione rationis".

Альбрехтъ Дюреръ (Albrecht Dürer), знаменитый художникъ, родился въ 1471 г., умеръ въ 1528 г. Занимаясь математическими науками Дюреръ пришелъ къ убѣжденію, что знакомство съ основами этихъ наукъ необходимо для художниковъ и написалъ *первую* Начертательную Геометрію на нѣмецкомъ языкѣ *). Сочиненіе это состоитъ изъ четырехъ частей. Въ первой части показано сначала построеніе линій, плоскостей и тѣлъ; изъ кривыхъ линій Дюреръ разсматриваетъ: кругъ, коническія сѣченія, спираль, винтовую линію, овоидъ и улиткообразную кривую. Кромѣ того описаны инструменты, при помощи которыхъ можно чертить эти кривыя. Содержаніе второй части „плоскія поля", подъ этимъ именемъ Дюреръ понимаетъ плоскія фигуры. Далѣе показано построеніе правильныхъ многоугольниковъ въ кругѣ. Нѣкоторыя изъ этихъ построеній невѣрны. Затѣмъ онъ переходитъ къ фигурамъ составленнымъ изъ треугольниковъ, четыреугольниковъ и пятиугольниковъ. Въ концѣ книги показано обращеніе одной фигуры въ другую, а также Дюреръ упоминаетъ о квадратурѣ круга при чемъ говоритъ, что „она еще не доказана учеными". Въ третьей части разсмотрѣны различнаго рода колонны, башни и т. п.; при чемъ рѣшается вопросъ о измѣреніи высоты башни; далѣе показано устройство солнечныхъ часовъ и нѣкоторыя примѣненія черченія, имѣющія значеніе для ремесленниковъ. Въ четвертой

*) Сочиненіе это появилось въ печати въ первый разъ въ 1525 г. подъ заглавіемъ: Underweysung der messung mit dem zirckel vñ richtscheyt in linien ebenen vnnd gantzen corporen durch Albrecht Dürer zusamengetzogē vnd zu nutz alle kunstliebhabenden mit zu gehörigen figuren in truck gebracht. Сочиненіе это было переведено на латинскій языкъ въ Нюренбергѣ и напечатано въ Парижѣ, въ 1532 г., подъ заглавіемъ: Institutionum geometricarum libri quatuor, in quibus lineas, superficies et solida corpora ita tractavit, ut non matheseos solum studiosis, sed et pictoribus, fabris aerariis ac lignariis, lapicidis, statuariis, et universis demum qui circino, gnomone, libella, aut alioqui certa mensura opera sua examinant, sint summe utiles et necessarii. Другое изданіе сочиненія Дюрера было напечатано въ Нюренбергѣ въ 1538 г., къ нему приложена Перспектива, но сочиненіе это вѣроятно написано кѣмъ нибудь другимъ.

части разсмотрѣны пять правильныхъ тѣлъ; показано устройство шаровой сѣти, т. е. раздѣленіе поверхности шара на сферическіе двухсторонники; далѣе разсмотрѣны восемь тѣлъ, около которыхъ можно описать шаръ, хотя тѣла эти не составлены изъ вполнѣ одинаковыхъ равносторонних фигуръ. Потомъ авторъ переходитъ къ вопросу объ удвоеніи куба, при чемъ рѣшаетъ эту задачу при помощи двухъ средне-пропорціональныхъ. Рѣшеніе дано чисто механическое. Въ концѣ показано, какъ производятся изображенія въ перспективѣ. Въ заключеніи Дюреръ говоритъ, что онъ намѣренъ со временемъ дополнить свое сочиненіе.

Дюреру принадлежитъ также построеніе правильнаго пятиугольника однимъ растворомъ циркуля, но другіе геометры, въ числѣ ихъ Клавіусъ и Бенедетти, показали, что этотъ пятиугольникъ не равноугольный, а потому построеніе, предложенное Дюреромъ, только приближенное.

Бувель (Charles de Bouvelle), жившій въ концѣ XV-го вѣка, написалъ сочиненіе по Геометріи *), въ которомъ изложена теорія звѣздныхъ многоугольниковъ, но вопросъ этотъ разобранъ менѣе подробно чѣмъ въ сочиненіи Брадвардина. Въ сочиненіи Бувеля помѣщено неправильное рѣшеніе задачи: вписать въ кругъ правильный семиугольникъ, а также предложено рѣшеніе задачи квадратуры круга, заимствованное изъ сочиненія кардинала Кузы.

„Геометрія“ Бувеля была весьма распространена во Франціи въ XVI и началѣ XVII столѣтій. Кромѣ этого сочиненія Бувель написалъ много другихъ по самымъ разнообразнымъ предметамъ.

Дорпъ (Vanden Dorp), болѣе извѣстный подъ именемъ *Dorpius*'а, принадлежалъ къ числу профессоровъ Лувенскаго университета. Онъ былъ извѣстенъ своими обширными и многосторонними познаніями. Изъ трудовъ Дорпа наиболѣе интересна рѣчь, произнесенная имъ 1 октября 1513 при открытіи чтенія лекцій. Въ этой рѣчи авторъ касается Геометріи, ариѳметики, музыки, астрономіи, физики и книгопечатанія. Къ сожалѣнію Дорпъ раздѣляетъ многіе предразсудки своего времени, такъ напримѣръ онъ говоритъ, что астрономія необходима при изученіи медицины и хирургіи **).

---

*) „Геометрія“ Бувеля была издана много разъ. Первое изданіе озаглавлено: Geometriae introductionis libri sex, brevisculis annotationibus explanati, quibus annectuntur libelli de circuli quadratura, et de cubicatione sphaerae, et introductio in perspectivam Caroli Bovilli. Parisiis. 1503. in-fol. Сочиненіе это было также переведено на французскій языкъ подъ заглавіемъ: Livre singulier et utile, touchant l'art et pratique de Géométrie, composé nouvellement en français, par maitre Charles de Bouvelles, chanoine de Noyon. Paris. 1542. in-4. Кромѣ того извѣстны изданія 1547, 1551, 1557 и 1608 гг.

**) Авторъ рѣчи говоритъ: Praedicit idem quo tempore quod membrum aut noxium sit, aut salutare, incidere ferro, quo minuendus sanguis, quando efficaces sint futurae positiones, quando perniciose.

Дорпъ родился въ 1485 г. и умеръ въ 1525 г. Онъ принадлежалъ къ числу друзей знаменитаго Эразма Роттердамскаго.

Іоаннъ Станифексъ (Joannes Stannifex), настоящее имя котораго *Stainier de Gosselies*, родился въ 1494 г., умеръ въ 1536 г. Онъ извѣстенъ какъ свѣдущій геометръ и написалъ нѣсколько сочиненій по физикѣ. За свои труды Станифексу была присуждена первая премія Лувенскаго университета.

Іоахимъ Стеркъ (Joachim Sterck Van Ringelbergh) родился въ 1499 г. въ Антверпенѣ. Образованіе онъ получилъ въ Лувенскомъ университетѣ. Стеркъ авторъ нѣсколькихъ сочиненій, изъ которыхъ наиболѣе извѣстны слѣдующія: „Institutionum astronomicarum, libri III, in-8. Bâle, 1528“, „Космографія, Paris, 1529“; „*Optice*“, „*Chaos mathematicum*“, „*Arithmetica*“, „*Sphaera*“ и „Astrologia“, напечатанныя въ одной книгѣ въ 1531 г. въ Лейденѣ. Стеркъ умеръ въ 1536 г.

Арабы.

Блистящее развитіе наукъ учеными Александрійской школы, во времена упадка и распаденія Римской имперіи, останавливается въ VI столѣтіи нашей эры, и только восемьсотъ лѣтъ спустя снова начинается развитіе наукъ въ Европѣ. Но этотъ длинный промежутокъ времени не былъ для цѣлаго міра періодомъ варварства и невѣжества.

Въ это время появляются Арабы; съ мечемъ въ одной рукѣ и съ Кораномъ въ другой, они по смерти Магомета (632 г. по Р. Х.) начинаютъ рядъ завоеваній, который подчиняетъ ихъ господству большую часть Азіи, Африки и Испаніи. Послѣ паденія Омайядовъ (750 г. по Р. Х.) наступаетъ новая эпоха; за воинственнымъ духомъ завоеваній, наступаетъ время наукъ и искусствъ. Вновь основанный Багдадъ дѣлается центромъ цивилизаціи, освѣщающей какъ Востокъ, такъ и Западъ. Кордова и Толедо, Каиро, Фецъ *), Марокко, Ракка, Испагань и Самаркандъ соперничаютъ съ столицей калифовъ-Аббасидовъ. Греческія книги, переведенныя и комментированныя изучаются въ школахъ, и со всѣхъ сторонъ снова начинается развитіе человѣческихъ знаній, на время пріостановленное; въ промежутокъ времени между IX и XIII столѣтіями создается одна изъ самыхъ обширныхъ литературъ, когда либо созданныхъ; распространеніе различныхъ произведеній**), замѣчательныя открытія служатъ доказательствомъ необыкновенной дѣятельности умовъ и даютъ чувствовать христіанской Европѣ свое значеніе и какъ будто подтверждаютъ распространенное мнѣніе, „что во всемъ Арабы были нашими учителями". Съ одной стороны матеріалы, неоцѣнимые для исторіи Среднихъ Вѣковъ, описаніе путешествій, счастливая мысль біографическихъ словарей***); съ другой промышленность и торговля, не имѣющія себѣ равной, зданія, какъ по идеѣ, такъ и по исполненію грандіозныя****); важныя открытія въ области искусствъ;

---

*) *Леонъ Африканецъ* упоминаетъ, что въ Фецѣ было устроено арабами болѣе 200 школъ. (Смот. Leonis Africani, Africae descriptio, Lugd.-Batav., 1632, 2 vol. in-16).

**) Арабы первые начали разводить сахарный тростникъ въ Сициліи. Ими также были вывезены изъ Индостана нѣкоторые сорты лимоновъ.

***) Обширныя энциклопедіи, составленныя Ibn-Siana и Alfirouzabi, славились не только на всемъ Востокѣ, но были извѣстны и на Западѣ. Большая часть энциклопедій были составлены на подобіе сочиненій Аристотеля.

****) Многіе архитекторы, въ томъ числѣ извѣстный *Гитторфъ* (Hittorff), положительно утверждаютъ, что такъ называемый *готическій стиль* заимствованъ у арабовъ. Въ послѣднее время *Реушъ* въ своемъ сочиненіи: *Reusch*, Der Spitzbogen und die Grundlinien seines Maasswerkes. Stuttgart. 1854, обращаетъ вниманіе на постоянное приложеніе геометрическихъ построеній въ готической архитектурѣ и различныхъ орнаментахъ, сдѣланныхъ во время процвѣтанія готическаго стиля. *Цейсингъ* въ своемъ сочиненіи: *Zeising*, Neue Lehre v. d.

вотъ что должно заставить насъ обратить вниманіе на этотъ народъ, такъ долго забытый. Смотря на столь успѣшное примѣненіе опытнаго метода къ медицинѣ, естественнымъ наукамъ, химіи и земледѣлію, обогатившій эти науки множествомъ фактовъ,—нельзя сомнѣваться, что столь же успѣшно шло развитіе наукъ математическихъ, которыми такъ усердно занимались Арабы*). И дѣйствительно это подтверждается блистательными работами *Кассири* **), *Розена* ***), *Седильо* ****) отца и сына, *Шаля*, *Вэпке*, *Штейншнейдера*, *Ганкеля* и другихъ. Разъ имѣя въ своихъ рукахъ сочиненія Грековъ, Арабы не могли ихъ не обработывать и прибавляли множество новаго къ теоріямъ своихъ предшественниковъ *****).

Propor. d. menschl. Körp. Leipzig. 1854, говоритъ, что „золотое дѣленіе" было основнымъ въ готической архитектурѣ.

Въ Средніе Вѣка, при сооруженіи различныхъ построекъ, обращали большое вниманіе на различныя мистическія соотношенія между числами и величинами. Соотношенія эти, вѣроятно выработанныя длиннымъ рядомъ опытовъ, сохранялись въ тайнѣ средневѣковыми архитекторами и были ими приведены къ эмпирическимъ правиламъ, которыми они пользовались при построеніи сводовъ, орнаментовъ, фундаментовъ и т. п. Большую роль играли эти правила при построеніи церквей.

*) Математическія науки Арабы называли „трудныя науки", въ противоположность Грекамъ, у которыхъ онѣ были извѣстны подъ именемъ „наукъ, въ полномъ значеніи этого слова".

**) *Кассири*, авторъ замѣчательнаго сочиненія „Bibliotheca Arabico-Hispana-Escurialensis" Mich. Cassiri. Matriti. 1760, 2 vol. in-fol. I-й томъ этого сочиненія содержитъ перечисленіе арабскихъ математиковъ и обзоръ сочиненій, написанныхъ ими.

***) *Розенъ* (Rosen), перевелъ Алгебру Магомеда-бенъ-Музы на англійскій языкъ, подъ заглавіемъ „The algebra of Mohammed-ben-Musa, London. 1831".

****) *Седильо*, отецъ и сынъ, всю свою жизнь посвятили изученію математическихъ наукъ и астрономіи у Арабовъ. Они написали много замѣчательныхъ сочиненій, изъ которыхъ самое главное, написано сыномъ, именно: „Matériaux pour servir a l'histoire comparé des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux, par L. Am. Sedillot. Paris. 1845—49".

*****) Много интересныхъ свѣдѣній о математической литературѣ Арабовъ можно найти въ сочиненіи *Herbelot*, Bibliotheque Orientale, и въ каталогахъ болѣе извѣстныхъ библіотекъ Европы. Извѣстный знатокъ восточныхъ языковъ *Едуардъ Бернардъ* упоминаетъ, что въ одной Оксфордской библіотекѣ сохраняется болѣе 400 арабскихъ рукописей сочиненій астрономическаго содержанія.

Также весьма много указаній на математическія сочиненія Арабовъ можно найти въ обширномъ сочиненіи: *Flügel*, Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum a Mustafa ben Abdallah, Katib Jelebi dicto et nomine Haji Khalfa celebrato compositum. Leipzig, T. I—VII, 1835—1858.

Самая богатая библіотека, по количеству хранящихся въ ней математическихъ сочиненій Арабовъ, это библіотека Эскуріала. Довольно подробный каталогъ этихъ сочиненій далъ Кассири.

Сравнивая оставшіеся памятники по математикѣ, астрономіи и географіи, мы видимъ, что Багдадская школа превышала школы Александрійскую и Афинскую.

Было бы весьма интересно прослѣдить развитіе наукъ математическихъ въ различныхъ странахъ подвластныхъ господству мусульманъ; можно-бы было показать какъ въ XIII столѣтіи монгольскіе ханы, познакомившись съ познаніями Арабовъ, распространили ихъ въ Китай, покоренный ими.

Самый древній памятникъ по Геометріи у Арабовъ, мы находимъ въ „Алгебрѣ“, написанной *Магомедъ-бенъ-Муза-аль-Говарезми* (Mohammed-ben-Musa-al-Hovarezmi), жившемъ въ началѣ IX столѣтія; въ этомъ сочиненіи мы находимъ предложеніе квадрата гипотенузы, названное Арабами *фигурой невѣсты* *); доказательство его приводится только для простѣйшаго случая, именно когда треугольникъ равнобедренный; затѣмъ онъ вычисляетъ высоту, а потомъ площадь треугольника, въ функціи его сторонъ, при чемъ для сторонъ даны числа 13, 14 и 15, *площадь* параллелограмма, поверхность пирамиды и площадь круга. Изъ стереометрическихъ предложеній заслуживаетъ вниманія выраженіе для нахожденія объема четыреугольной усѣченной пирамиды, высота которой равна 10 а стороны верхняго и нижняго основаній равны 4 и 2.

Несмотря на бѣдность содержанія этого отрывка, онъ носитъ на себѣ слѣды индусскаго вліянія. Кромѣ выраженія $\pi = \frac{22}{7}$, онъ заключаетъ въ себѣ еще выраженія $\pi = \sqrt{10}$ и $\pi = \frac{62832}{20000}$, названныя *индусскими значеніями* для π. Весьма странно, что въ послѣдствіи времени эти выраженія были совершенно забыты Арабами и замѣнены другими, менѣе точными.

Кромѣ „Алгебры“ Магомедъ-бенъ-Муза составилъ еще извлеченія изъ индусскихъ астрономическихъ сочиненій, извѣстныхъ подъ именемъ Синдгинтъ (Sindhind); имъ были также пересмотрѣны таблицы хордъ Птоломея, составлены астрономическія таблицы, впослѣдствіи переведенныя на латинскій языкъ Аделардомъ Батскимъ. Магомедъ-бенъ-Муза принималъ также участіе при опредѣленіи величины градуса земнаго меридіана.

Мы уже выше упомянули, въ началѣ нашего очерка (см. стр. 14), что Арабы заимствовали, вѣроятно изъ индусскихъ сочиненій выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ и примѣненіе этой формулы къ треугольнику, коего стороны 13, 14 и 15. Выраженіе это встрѣчается въ „Алгебрѣ“ Магомеда-бенъ-Музы, а также въ сочиненіи по Геометріи,

*) Теорема обратная Пиѳагоровой, т. е. 48-я первой книги „Началъ“, носила названіе *сестры невѣсты*. Нассиръ-Эддинъ далъ нѣсколько доказательствъ Пиѳагоровой теоремы.

написанномъ тремя сыновьями Муза-бенъ-Шакера: Магомедомъ, Газеномъ и Гаметомъ. Заглавіе этого сочиненія: Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti, Hameti, Hasen. Муза-бенъ-Шакеръ жилъ при дворѣ Аль-Мансора. Старшій изъ сыновей Магомедъ написалъ сочиненіе геометрическаго содержанія, предметъ котораго плоскія и сферическія фигуры, заглавіе его: De figuris planis et sphaericis. Кромѣ упомянутаго сочиненія по Геометріи сыновья Магомеда-бенъ-Шакера написали много другихъ сочиненій математическаго содержанія, списокъ которыхъ находится въ первомъ томѣ сочиненія Кассири. Содержаніе своихъ сочиненій, вѣроятно, они заимствовали изъ греческихъ сочиненій, такъ какъ извѣстно, что старшій изъ братьевъ предпринималъ путешествія въ греческія земли, вѣроятно для пріобрѣтенія сочиненій геометрическаго и астрономическаго содержанія.

Но вліяніе индусской математической литературы совершенно уступило мѣсто классической греческой Геометріи, которая проникла къ Арабамъ въ IX стол. нашей эры. Впервые познакомились Арабы съ сочиненіями Грековъ по перенесеніи столицы калифовъ въ Багдадъ (768 г.); несторіане, бывшіе въ качествѣ врачей при калифахъ, принесли съ собою изъ Сиріи греческія сочиненія, переведенныя на сирійскій языкъ *). Въ это время въ Сиріи процвѣтали науки, въ особенности славились школы въ Антіохіи, Емессѣ и знаменитая школа несторіанъ въ Едессѣ **).

При Гарунъ-аль-Рашидѣ были сдѣланы первые переводы на арабскій языкъ, греческихъ сочиненій по медицинѣ. Но такъ какъ медицина была изложена на аристотелевскихъ началахъ, то необходимо было перевесть и другія сочиненія греческихъ философовъ на арабскій языкъ. Къ этому времени относятъ и первый переводъ части „Началъ“ Евклида на арабскій языкъ ***). „Начала“ Евклида были переведены *Гаджаджемъ-Ибнъ-Юсуфомъ-Ибнъ-Матаромъ* (Haddschâdsch-Ibn-Jûsuf-Ibn-Matar) два раза, одинъ разъ по по-

*) Несторіане перевели большую часть сочиненій, написанныхъ древними греческими философами, на сирійскій и арабскій языки. Извѣстно, что всѣ сочиненія Аристотеля были переведены на халдейскій языкъ.

**) Уже въ V в. существовала въ г. Джондисабурѣ, въ Хузистанѣ, медицинская школа, основанная несторіанами. Въ этой школѣ получили образованіе почти всѣ извѣстные врачи калифовъ.

***) „Начала“ Евклида Арабы называли *Астаесатъ* (Astaesat), а самаго Евклида они называли *Аклидесъ* (Aclides) или *Оклидесъ* (Ocludes), именемъ Евклида они часто называли все содержаніе „Началъ“, т. е. Геометрію. На арабскомъ языкѣ Геометрія носитъ названіе *гендеза* (hendesah).

Имена многихъ греческихъ ученыхъ Арабы такъ переиначили, что съ трудомъ можно узнать о комъ именно идетъ рѣчь, такъ напр., Герона они называютъ *Иронъ* и *Iranus*, Менелая — *Milleius*, Архимеда — *Arsamites, Arsanides, Archimenides* и т. п.

тельно Гаруна-аль-Рашида, а другой переводъ былъ сдѣланъ во время Аль-Мамуна. По желанію Аль-Мамуна (Al-Mamun) (813—833 г.) византійскій императоръ Михаилъ III прислалъ ему множество греческихъ рукописей, которыя были по его желанію переведены на арабскій языкъ обществомъ сирійскихъ ученыхъ*). Преемники Аль-Мамуна продолжали начатое имъ дѣло перевода греческихъ писателей на арабскій языкъ. Самыми знаменитыми переводчиками этого времени были придворный врачъ калифа Мутаваккиля (847—861) *Гонейнъ бенъ-Исхакъ* (Honein-ben-Ishak) и сынъ его *Исхакъ-бенъ-*

*) При дворѣ Аль-Мамуна жилъ извѣстный *Алкинди* (Alkindi-Alchindius), настоящее имя котораго *Абу-Юсуфъ-Ибнъ-Исхакъ-Ибнъ-Ассабахъ*; современники прозвали его *философомъ*. Онъ написалъ *болѣе 200* различныхъ сочиненій, по самымъ разнообразнымъ отраслямъ знанія, какъ то: по астрономіи, ариѳметикѣ, Геометріи, медицинѣ, логикѣ и др. Списокъ этихъ сочиненій помѣщенъ въ сочиненіи Кассири „Biblioteca-Arabico-Hispana Escurialensis". Алкинди былъ хорошо знакомъ съ греческимъ языкомъ и сочиненіями греческихъ философовъ; онъ перевелъ большую часть сочиненій ученыхъ Александрійской и Аѳинской школъ на арабскій языкъ, переводы свои онъ дополнялъ весьма цѣнными комментаріями. Въ сочиненіяхъ Алкинди находится много любопытныхъ фактовъ по самымъ разнообразнымъ предметамъ.

Изъ сочиненій написанныхъ Алкинди особеннаго вниманія заслуживаетъ, упоминаемое Карданомъ, именно: De regulâ sex quantitatum. *Правило шести величинъ* заключается въ рѣшеніи слѣдующей задачи: Отношеніе первой величины ко второй, составлено изъ отношеній третьей величины къ четвертой и пятой къ шестой; требуется найти отношеніе одной изъ вторыхъ, третьихъ и пятыхъ величинъ къ одной изъ трехъ остальныхъ. Выражая алгебраически предложеніе это заключалось въ слѣдующемъ, если a, b, c, d, e и f данныя шесть величинъ и дано:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

то требуется найти отношеніе одной изъ трехъ величинъ b, c, e къ одной изъ трехъ остальныхъ a, d, f.

Правило шести величинъ было извѣстно еще въ древности это такъ называемая *теорема Птоломея*, относящаяся къ свойствамъ шести отрѣзковъ сторонъ треугольника раздѣленныхъ сѣкущей. Предложеніе это впервые встрѣчается въ „Сферикѣ" Менелая. Птоломей помѣстилъ его въ своемъ „Альмагестѣ", а Паппусъ воспользовался имъ въ 8-й книгѣ своихъ „Математическихъ Коллекцій". Впослѣдствіи, предложеніе это встрѣчается въ сочиненіяхъ: Пурбаха, Регіомонтануса, Оронса Фине, Стифеля, Кардана, который неправильно приписываетъ его нахожденіе Алкинди, Шонера, Мавролико, Паскаля, Стевина и др.

Шаль высказываетъ предположеніе, въ своемъ „Aperçu historique" на стр. 293, что вѣроятно первая мысль этого предложенія принадлежитъ Евклиду и что оно заключалось въ „Поризмахъ". Впослѣдствіи свойство это Гиппархъ распространилъ отъ плоскаго треугольника на сферическій. Но для чего это ему понадобилось и на основаніи какихъ геометрическихъ соображеній это было сдѣлано нельзя сказать утвердительно.

Кромѣ того изъ другихъ сочиненій Алкинди заслуживаютъ вниманія: „De Arithmeticâ Indicâ" и „De quantitate relativâ, seu Algebrâ", предметъ котораго Алгебра.

Гонейнъ (Ishak-ben-Honein), а также *Табитъ-бенъ-Корра* (Tabit-ben-Korra*) хорошо знавшіе сирійскій и греческій языки.

Переводъ „Началъ" Евклида, сдѣланный въ 827 году по приказанію Аль-Мамуна, былъ неточенъ, а потому Гонейнъ-бенъ-Исгакъ или сынъ его Исгакъ-бенъ-Гонейнъ сдѣлали новый переводъ первыхъ 13 книгъ „Началъ", прибавивъ къ нимъ книги 14 и 15, приписываемыя Гипсиклу. Но только Табитъ-бенъ-Корра далъ вполнѣ удовлетворительный переводъ „Началъ" **). Кромѣ „Началъ" были переведены на арабскій языкъ и другія сочиненія Евклида, какъ-то: „Данныя", „Феномены", „Оптика", маленькое сочиненіе „De divisionibus", „De levi et ponderoso" и „О рычагѣ". Сочиненіе „De divisionibus" Арабы приписываютъ *Магомеду-аль-Багдади* (Mohammed-al-Bagdadi***); но Вёпке и Грегори на основаніи различныхъ данныхъ полагаютъ, что это сочиненіе принадлежитъ Евклиду. Большая часть этихъ переводовъ была сдѣлана Исгакъ-бенъ-Гонейномъ и исправлена Табитъ-бенъ-Корра. Первыя четыре книги „Коническихъ Сѣченій" Аполлонія были переведены при Аль-Мамунѣ: переводъ этотъ былъ впослѣдствіи исправленъ *Ахмедомъ-бенъ-Муза-бенъ-Сакиромъ* (Ahmed-ben-Musa-ben-Sakir); книги V, VI и VII были переведены Табитъ-бенъ-Корра: эти то три книги и дошли до насъ только въ переводѣ на арабскій. Потерю VIII книги также жалѣли арабскіе математики, какъ и новѣйшіе, пока она не была возстановлена Галлеемъ; кромѣ того были переведены еще и другія сочиненія Аполлонія. Табитъ-бенъ-Корра перевелъ также сочиненія Птоломея и Теодосія. Сочиненія Автолика были переведены Исгакъ-бенъ-Гонейномъ подъ редакціей отца.

---

*) Табитъ-бенъ-Корра былъ ученикъ Магомеда бенъ-Музы, но не автора „Алгебры", а одного изъ трехъ сыновей Музы-бенъ-Шакера; онъ написалъ сочиненіе: De problematibus algebricis geometricâ ratione comprobandis. Сочиненіе это упоминается въ сочиненіи Кассири. Шаль полагаетъ, что предметъ этого сочиненія приложеніе Алгебры къ Геометріи.

**) Изъ другихъ арабскихъ геометровъ-комментаторовъ „Началъ" Евклида упомянемъ *Маймонъ-Решида*, котораго страсть къ „Началамъ" была такъ велика, что онъ одно изъ предложеній этой книги носилъ *постоянно вышитымъ* на рукавѣ своего платья.

***) Магомедъ-аль-Багдади жилъ въ X в. Предметъ сочиненія „De divisionibus" раздѣленіе фигуръ на части, пропорціональныя даннымъ числамъ, и тѣмъ образомъ проведенной прямой. Сочиненіе это состоитъ изъ 22 предложеній, изъ которыхъ семь относятся къ треугольнику, девять—четыреугольнику и шесть—пятиугольнику. Предложенія даны въ видѣ задачъ съ рѣшеніями. Сочиненіе это представляетъ собою дополненіе къ Геодезіи. Содержаніе этого сочиненія вполнѣ въ духѣ греческихъ геометровъ, а потому весьма вѣроятно предположеніе, что авторъ его Грекъ, можетъ быть даже Евклидъ, такъ какъ по словамъ Прокла, Евклидъ написалъ сочиненіе „De divisionibus". Такое мнѣніе раздѣляли *Ди* (Dee) и *Коммандинъ*, которые перевели это сочиненіе на латинскій языкъ подъ заглавіемъ: De superficierum divisionibus liber Mahometo Bagdedino ascriptus. Nunc primum Joannis Dee Londinensis, et Federici Commandini Urbinatis opera in lucem editus. Federici Commandini de eadem re libellus. Pisauri, 1570, in-4. Съ мнѣніемъ Ди несогласенъ Савиль (Savile).

Почти одновременно съ Табитъ-бенъ-Корра жилъ христіанскій ученый и врачъ *Куста-Ибнъ-Лука* (Kustâ Ibn-Lûkâ), который во время своихъ путешествій въ греческія земли собралъ множество рукописей. Въ числѣ этихъ рукописей находились сочиненія „Сферика" Теодосія, астрономическія сочиненія Аристарха Самосскаго, сочиненія Автолика, Гипсикла, Герона Старшаго и весьма вѣроятно также сочиненія Діофанта. Всѣ поименованныя сочиненія были переведены Куста-Ибнъ-Лукой въ промежутокъ времени между 864 и 923 гг.

Къ этому же времени относятся переводы на арабскій языкъ сочиненій Ямвлиха, Порфирія, Никомаха и Паппуса.

Изъ сочиненія Архимеда были переведены Гонейнъ-бенъ-Исгакомъ двѣ книги „О шарѣ и цилиндрѣ" съ приложеніемъ комментарія Евтокія. Затѣмъ было переведено сочиненіе: „Объ измѣреніи круга" и еще нѣкоторыя другія его сочиненія. Въ сочиненіи *Абулъ-Вефа* (Abul-Wefa), жившемъ въ X столѣтіи, „О геометрическихъ построеніяхъ" мы встрѣчаемъ впервые, впослѣдствіи столь знаменитое на Западѣ условіе, что всѣ построенія должны быть сдѣланы только при помощи циркуля и линейки; въ этомъ же сочиненіи мы находимъ построеніе вершинъ правильныхъ многогранниковъ, вписанныхъ въ шаръ. Сочиненіе это состоитъ изъ 12 главъ, а по своему содержанію оно можетъ быть раздѣлено на три части; въ первой, разобраны задачи, рѣшаемыя при помощи одного раствора циркуля, во второй—составленіе квадратовъ при помощи другихъ квадратовъ и наконецъ, въ третьей—построеніе правильныхъ многогранниковъ, вписанныхъ въ шаръ. Абулъ-Вефа также перевелъ „Начала" Евклида, на которыя сдѣлалъ комментаріи.

По словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей Абулъ-Вефа написалъ комментаріи на сочиненіе Гиппарха „О квадратныхъ уравненіяхъ". Къ сожалѣнію до насъ не дошло упомянутое сочиненіе Гиппарха, а также отъ комментарія Абулъ-Вефы сохранились ничтожные отрывки въ сочиненіяхъ различныхъ писателей. Сочиненіе Гиппарха заключало вѣроятно много интереснаго для насъ, такъ какъ по словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей сочиненіе это рѣзко выдѣлялось среди другихъ ариѳметическихъ сочиненій тѣмъ, что въ немъ ни разу не была примѣнена ни одна цифра.

Сочиненіе Евклида „De divisionibus" и Архимеда „Леммы" служили предметомъ для многихъ сочиненій. Кромѣ того было написано также много сочиненій „о геометрическихъ мѣстахъ"; такое сочиненіе написалъ *Гассанъ-бенъ-Гайтемъ* (Hassan-ben-Haithem, жившій въ Каиро съ 1009 г. по 1038 г. *).

---

*) Во время Гассанъ-бенъ-Гайтема въ Каиро существовала громадная библіотека, въ которой заключалось болѣе 6000 рукописей, математическаго и астрономическаго содержанія. Въ этой библіотекѣ находились также два небесные глобуса, одинъ устроенный Птоломеемъ, а другой Абдеррахманомъ Суфи.

Введеніе къ сочиненію Гассанъ-бенъ-Гайтема знакомитъ насъ довольно обстоятельно съ философскими взглядами арабскихъ математиковъ въ математическихъ наукахъ. Само сочиненіе состоитъ изъ двухъ частей; по словамъ автора: „первая заключаетъ совершенно новые предметы, коихъ содержаніе не было извѣстно древнимъ геометрамъ, вторая заключаетъ рядъ предложеній, сходныхъ съ предложеніями „Данныхъ" Евклида, но не находящихся въ этомъ сочиненіи". Знаменитый Шаль въ нѣкоторыхъ предложеніяхъ сочиненія Гассанъ-бенъ-Гайтема видитъ сходство съ „Поризмами" Евклида. По содержанію сочиненіе это весьма сходно съ сочиненіемъ Аполлонія „De locis planis". Изъ сказаннаго авторомъ, во введеніи къ своему сочиненію, видно, что ему были неизвѣстны, ни вышеупомянутое сочиненіе Аполлонія, ни „Математическія коллекціи" Паппуса; а потому автора этого сочиненія можно считать вполнѣ самостоятельнымъ и заслуживающимъ вниманія.

Сочиненіе свое Гассанъ-бенъ-Гайтемъ начинаетъ, подобно Евклиду, съ опредѣленій; сочиненіе это начинается такъ: „предувѣдомленія. опредѣленіе *извѣстныхъ*, ихъ раздѣленіе и подраздѣленіе". Затѣмъ авторъ начинаетъ съ опредѣленія *понятія*, изъ чего оно состоитъ; опредѣляетъ, что такое *извѣстное*, какія могутъ быть извѣстныя; потомъ онъ переходитъ къ количествамъ и говоритъ, что количества бываютъ двухъ видовъ, во первыхъ, количество *раздѣльное* и во вторыхъ, количество *непрерывное*. Количества раздѣльныя бываютъ двухъ родовъ, именно, примѣръ первыхъ—*буквы, составляющія слова*, а вторыхъ *числа*. Количества непрерывныя бываютъ пяти родовъ, именно: *линія, поверхность, тѣло, мѣсто, время* или *продолжительность*. За этимъ слѣдуетъ подробное разсмотрѣніе, раздѣленіе и подраздѣленіе, изслѣдованіе свойствъ всѣхъ этихъ величинъ. Опредѣленія, авторъ заканчиваетъ, опредѣленіемъ *отношеній* и объясняетъ, что нужно понимать подъ *линіями извѣстными по положенію* и *по величинѣ*. Послѣ этого слѣдуютъ предложенія, ихъ 24 въ первой книгѣ, и 25 во второй. Въ концѣ своего сочиненія Гассанъ говоритъ: „таково содержаніе предметовъ, о которыхъ мы хотѣли сказать; они имѣютъ важное значеніе при рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ и не были высказаны ни однимъ изъ древнихъ геометровъ, а такъ какъ сказаннаго о нихъ достаточно для нашей цѣли, то мы на этомъ и заканчиваемъ наше сочиненіе".

Приведемъ нѣкоторыя изъ предложеній этого сочиненія. Первая книга: Пред. 1. Если изъ точки, коей положеніе извѣстно проведемъ прямую, извѣстной величины, то оконечность этой прямой будетъ лежать на окружности круга, коего положеніе извѣстно. Пред. 24. Если въ кругѣ, коего величина и положеніе извѣстны, проведемъ какую нибудь хорду и раздѣлимъ ее на какія нибудь двѣ части, то если произведеніе этихъ двухъ частей извѣстно, то точка дѣленія лежитъ на окружности круга, коего

положеніе и величина извѣстны. Вторая книга: Пред. 1. Если изъ точки, которой положеніе извѣстно, проведемъ сѣкущую къ кругу, коего положеніе и величина даны; если точка лежитъ внѣ круга и если отношеніе внѣшней части прямой къ отрѣзку, лежащему внутри круга, извѣстно, то положеніе прямой будетъ извѣстно. Пред. 19. Одинъ изъ угловъ треугольника извѣстенъ, если проведена изъ вершины этого угла прямая, дѣлящая его на двѣ извѣстныя части, и если отношеніе двухъ отрѣзковъ основанія равно отношенію одной изъ сторонъ угла къ прямой, то отношеніе этой прямой къ другой сторонѣ будетъ извѣстно.

Седильо, первый нашелъ это сочиненіе и перевелъ его на французскій языкъ подъ именемъ: „Traité des connues géométriques" *). Нѣкоторые математики видятъ въ этомъ сочиненіи начало той отрасли Геометріи, которая впослѣдствіи была названа Даламберомъ и Карно Géométrie de position. Впрочемъ, съ такимъ взглядомъ не вполнѣ согласенъ Шаль. Сочиненіе это еще тѣмъ интересно, что оно есть единственное представляющее сходство съ знаменитымъ сочиненіемъ Евклида „Поризмы". Сочиненіе Гассанъ-бенъ-Гайтема, подтверждаетъ мнѣніе *Кастильона* (Castillon), что въ XIII столѣтіи „Поризмы" были извѣстны арабскимъ математикамъ. Гассанъ-бенъ-Гайтемъ написалъ болѣе 80 сочиненій по математикѣ, въ томъ числѣ нѣсколько сочиненій по Астрономіи и комментаріи на опредѣленія „Началъ" Евклида и „Альмагеста" Птоломея **). Онъ много занимался основными началами эле-

---

*) Рукопись этого сочиненія находится въ Національной библіотекѣ въ Парижѣ, она написана въ 1141 г. Седильо назвалъ это сочиненіе „Трактатъ о геометрическихъ извѣстныхъ". Не только по своему содержанію, но и по формѣ изложенія сочиненіе это имѣетъ много общаго съ „Данными" Евклида. Содержаніе этого сочиненія подробно изложено въ сочиненіи Седильо: Materiaux pour servir à l'histoire comparee des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux, Paris. 1845. T. I—II, in 8.

**) Въ сочиненіи *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, помѣщены интересныя указанія относительно сочиненій, написанныхъ Гассанъ-бенъ-Гайтемомъ. Указанія эти Вепке заимствовалъ изъ арабскихъ рукописей, принадлежащихъ Національной библіотекѣ, содержаніе которыхъ, біографіи знаменитыхъ арабскихъ врачей, написанныя Ibn-Abi-Oçaïbiah. Авторъ біографій приводитъ слова самаго Гассанъ-бенъ-Гайтема, который говоритъ, что имъ написано двадцать пять сочиненій математическаго содержанія. Сочиненія эти слѣдующія:

1) Комментаріи и извлеченія изъ Геометріи и Ариѳметики Евклида; 2) Сборникъ по Геометріи и Ариѳметикѣ, составленный по сочиненіямъ Евклида и Аполлонія; 3) Комментаріи и извлеченія изъ Альмагеста; 4) Сборникъ, въ которомъ помѣщены начала счисленія. По словамъ автора „имъ найдены методы для рѣшеній задачъ счисленія при помощи двухъ способовъ, одного на основаніи геометрическаго анализа, а другаго—ариѳметической повѣрки, но вмѣстѣ съ тѣмъ имъ не примѣнены начала и техническіе термины, употребляемые алгебраистами"; 5) Извлеченіе изъ „Оптики" Евклида и Птоломея; авторъ также возстановилъ первую книгу изъ утеряннаго сочиненія Птоломея; 6) Сочиненіе, въ которомъ изложенъ анализъ геометрическихъ задачъ, 7) Сочиненіе въ которомъ изложено изслѣдованіе ариѳмети-

ментарной Геометріи, изъ чего видно, какое важное значеніе онъ придавалъ основамъ этой науки. Гассанъ-бенъ-Гайтемъ, можетъ служить типомъ ученыхъ того времени, которые занимались наукой для науки и старались всѣ вопросы изслѣдовать со всѣхъ точекъ зрѣнія *).

Многочисленныя сочиненія, написанныя о коническихъ сѣченіяхъ, указываютъ намъ, что этотъ вопросъ не мало занималъ арабскихъ математиковъ. Сочиненіе марокканца *Абулъ-Гассанъ-Али* (Abul-Hassan-Ali) объ астро-

---

ческихъ задачъ при помощи алгебраическаго метода, при чемъ приведены доказательства; 8) Полный трактатъ объ анализѣ геометрическихъ и ариѳметическихъ задачъ; 9) Трактатъ объ измѣреніи, подобно какъ въ „Началахъ", 10) Сочиненіе объ коммерческихъ счетахъ и дѣйствіяхъ; 11) Усовершенствованіе науки объ углубленіи и воздвиганіи, 12) Извлеченіе изъ книгъ Аполлонія объ коническихъ сѣченіяхъ; 13) Мемуаръ объ индусскомъ счисленіи; 14) Мемуаръ объ опредѣленіи азимута Кибла (Kiblah), 15) Объ нѣкоторыхъ геометрическихъ задачахъ необходимыхъ при религіозныхъ обрядахъ; 16) Письмо, написанное къ нѣсколькимъ равамъ, приглашающее ихъ заниматься астрономическими наблюденіями; 17) Введеніе въ Геометрію; 18) Мемуаръ объ опроверженіи доказательства, что гипербола и ея двѣ асимптоты постоянно сближаясь, никогда не пересѣкаются, 19) Отвѣты на семь математическихъ задачъ предложенныхъ автору въ Багдадѣ, 20) Трактатъ объ анализѣ и синтезѣ геометровъ, составленный авторомъ для учащихся, съ приложеніемъ собранія ариѳметическихъ и геометрическихъ задачъ, 21) Трактатъ объ всеобщемъ инструментѣ, извлеченный изъ сочиненія Ибрагима-бенъ-Генана, 22) Мемуаръ объ геометрическомъ опредѣленіи разстоянія между двумя точками, находящихся на поверхности земли; 23) Мемуаръ объ основахъ ариѳметическихъ задачъ и объ ихъ изслѣдованіи; 24) Мемуаръ, касающійся рѣшенія одного недоразумѣнія, находящагося въ V-й книгѣ математическихъ сочиненій Евклида и 25) Мемуаръ, относящійся къ задачѣ, предложенной Архимедомъ, объ трисекціи угла, которая не была имъ рѣшена (вѣроятно это ошибка, а должно быть „къ дѣленію прямой").

Далѣе, авторъ „Біографіи знаменитыхъ врачей" приводитъ еще одинъ списокъ математическихъ сочиненій Гассанъ-бенъ-Гайтема, въ которомъ приведены заглавія еще 92 сочиненій.

*) Нѣкоторые оріенталисты полагаютъ, что Гассанъ-бенъ-Гайтемъ и *Аль-Газенъ* одно лицо, они приписываютъ ему сочиненіе по Оптикѣ, переведенное подъ заглавіемъ: „Alhazen Opticae thesaurus, libri VII, Basileae, 1572". Седилло говоритъ, что Гассанъ-бенъ-Гайтемъ написалъ сочиненіе по Оптикѣ, но оно утеряно. Полное имя Гассана-бенъ-Гайтема, слѣдующее: Abou-Ali-al-Hassan-ben-al-Hassan-ben-al-Haithem.

„Оптика" Альгазена была издана нѣсколько разъ. Объ изданіяхъ этого сочиненія мы упоминали говоря объ „Оптикѣ" Вителія. Журдень (Jourdain) полагаетъ, что Герардъ Кремонскій былъ однимъ изъ первыхъ переводчиковъ этого сочиненія съ арабскаго языка на латинскій. „Оптика" Альгазена была также переведена на итальянскій языкъ въ XIV в. Объ этомъ переводѣ подробно говорится въ статьѣ: *Enrico Narducci*, Intorno ad una traduzione italiana fatta nel secolo decimo quarto del trattato d'Ottica d'Alhazen, matematico del secolo undecimo, e ad altri lavori di questo scienziato. (Estratto dal Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. T. IV, *Gennaio*, 1871 in 4.

номическихъ инструментахъ*) указываетъ на основательное знакомство съ „Коническими Сѣченіями“ Аполлонія и ихъ примѣненіями къ различнымъ вопросамъ. Онъ написалъ также сочиненіе „Коническія Сѣченія“.

Сочиненія Діофанта были переведены Абуль-Вефой, умершимъ въ 998 г. въ Багдадѣ. Онъ принадлежалъ къ числу самыхъ извѣстныхъ арабскихъ ученыхъ и написалъ комментаріи на сочиненія Евклида, перевелъ сочиненія Аристарха и составилъ „Новый Альмагестъ“, въ которомъ помѣщены его собственныя наблюденія и важнѣйшія изъ открытій его предшественниковъ**). Почти всѣ предложенія, находящіяся въ сочиненіяхъ Діофанта, встрѣчаются въ самомъ обширномъ изъ сочиненій по Алгебрѣ, написанномъ въ началѣ XI столѣтія математикомъ *Аль-Карги* (Al-Karhi) и названномъ имъ *Факри* (Fachri). Пріемы Діофанта примѣняются съ умѣніемъ. Въ историческомъ отношеніи интересно сочиненіе Аль Карги въ томъ, что въ немъ нѣтъ и слѣда индусскаго вліянія, что указываетъ на полное незнакомство автора съ сочиненіями индусскихъ математиковъ. Сочиненіе Аль-Карги состоитъ собственно изъ двухъ *совершенно* отдѣльныхъ частей: первая часть заключаетъ Ариѳметику и озаглавлена „*Аль-Кафи-филь-гисабъ*“ (Al-Kâfi-fil-

*) Сочиненіе это было переведено Седильо (отцемъ) и издано А. Седильо (сыномъ), подъ заглавіемъ: Traité des instruments astronomiques des Arabes. 2 vol. Paris, 1834, in-4.

Сочиненіе это есть самое полное изъ числа написанныхъ арабскими учеными по Гномоникѣ. Методъ, впервые приложенный Табитъ-бенъ-Корра для устройства солнечныхъ часовъ, въ позднѣйшее время былъ снова употребленъ Мавролико.

Изъ сочиненій написанныхъ арабскими учеными по Гномоникѣ, упомянемъ сочиненія Алкинди и Табитъ-бенъ-Корра. Первый изъ нихъ авторъ сочиненій: „De horologium sciathericorum descriptione“ и „De horolog. horisontali proestantiore“; второй написалъ „De horometria seu horis diurnis ac nocturnis“; и „De figurâ linearum quas gnomometrum (styli apicis umbra, percurrit“.

**) Въ Лейденской библіотекѣ сохраняется рукопись сочиненія Абулъ-Вефы, которая озаглавлена. „Сочиненіе Абулъ-Вефы о познаніяхъ необходимыхъ конторщикамъ, дѣловымъ людямъ и другимъ въ искусствѣ счисленія“. Сочиненіе это состоитъ изъ семи книгъ, содержаніе которыхъ слѣдующее. Въ 1-й книгѣ изложены отношенія, различнаго рода дроби и правило шести величинъ; во 2-й, умноженіе и дѣленіе цѣлыхъ чиселъ, а также дробей простыхъ и составныхъ, сложеніе и вычитаніе дробей, и сокращенное умноженіе и дѣленіе; въ 3-й книгѣ: объ измѣреніи плоскихъ фигуръ и измѣреніе разстояній; въ 4-й книгѣ: объ различнаго рода налогахъ, счетоводствѣ и книговодствѣ и дѣйствіяхъ къ нимъ относящихся; книга 5-я, объ мѣнѣ стадъ верблюдовъ, хлѣба, земель и ихъ раздѣлѣ, въ 6-й книгѣ, о торговлѣ и мѣнѣ золота и монетъ, о платѣ войскамъ, о золотыхъ вещахъ, одеждахъ и объ коммерческихъ ассоціаціяхъ; въ 7-й книгѣ, о различныхъ дѣйствіяхъ надъ числами, которыя необходимы при торговыхъ оборотахъ. Каждая изъ книгъ этого сочиненія раздѣлена на семь главъ, а каждая глава въ свою очередь на отдѣлы. До насъ дошли только первыя три книги. Содержаніе остальныхъ четырехъ извѣстно только по оглавленію. Къ сожалѣнію это интересное сочиненіе не издано до сихъ поръ.

hisâb)", т. е. „все извѣстное о счисленіи"; вторая часть заключаетъ Алгебру— „*Аль-Факри* (Al-Fachri)" *).

Въ концѣ X и началѣ XI столѣтій начинаетъ развиваться у Арабовъ самостоятельная литература по чистой математикѣ, ей уступаетъ мѣсто переводная—съ греческаго на арабскій. Знакомство свое съ греческою литературою Арабы не расширяютъ. Въ это время начинается переписка между математиками о различныхъ вопросахъ, производятся ученыя состязанія, на которыхъ предлагали для рѣшенія различныя задачи, какъ то: трисекціи угла, раздѣленіе шара въ данномъ отношеніи, построеніе семи-и-девятиугольниковъ изъ алгебраическихъ уравненій при помощи коническихъ сѣченій и множество другихъ. Задачи эти были предметомъ многочисленныхъ сочиненій.

Изъ математиковъ того времени мы упомянемъ имена *Аль-Карги* (Al-Karhi), *Абу-Гафара* (Abu-Gafar), *Аль-Сингари* (Al-Singari)**), *Абуль-Гуда* (Abul-Gud), въ особенности занимавшійся построеніемъ уравненій при помощи коническихъ сѣченій. Въ это же время жилъ при дворѣ Газневида Махмуда (998—1030) въ Газнѣ, одинъ изъ самыхъ знаменитыхъ поэтовъ и философовъ, первый математикъ того времени *Аль-Бируни* (Al-Biruni), написавшій сочиненіе о состояніи наукъ въ той части Индостана, которая была подвластна Махмуду. Но въ это время блистящему развитію математики и вообще всѣхъ наукъ положили конецъ Турки Сельджуки, завоевавшіе всѣ страны, покоренныя Арабами. Изъ математиковъ позднѣйшаго времени извѣстенъ персидскій астрономъ *Кади-Заде-Аръ-Руми* (Kâdi-Zâdeh-Ar-Rûmi), умершій въ 1412 или 1413 гг., который написалъ объясненія къ „Нача-

---

*) Первую часть этого сочиненія, т. е. Ариѳметику издалъ на нѣмецкомъ языкѣ *Ad. Hochheim* въ 1878—80 гг. въ Галле; вторую часть—Алгебру издалъ въ извлеченіяхъ на французскомъ языкѣ, *Woepcke* въ 1853 г. въ Парижѣ.

**) До насъ дошло нѣсколько сочиненій Аль-Сингари, изъ нихъ самое интересное, это „отвѣтъ на вопросы, предложенные ему по поводу рѣшенія предложеній взятыхъ изъ сочиненія „Леммы" Архимеда". Сочиненіе это начинается такъ: „я получилъ ваше письмо, содержащее вопросы, относящіеся къ предложеніямъ, рѣшеніе которыхъ вы желаете узнать; я съ большимъ удовольствіемъ объясню ихъ вамъ, но я увидѣлъ, что предложенія эти заимствованы изъ сочиненія Архимеда „Леммы", рѣшенія этихъ предложеній таковы, какъ въ упомянутомъ сочиненіи. Но, впрочемъ я могу быть вамъ полезнымъ въ этомъ дѣлѣ, такъ какъ я спеціально занимался нѣкоторыми предложеніями, которыя Архимедъ не разсматриваетъ; о всѣхъ же тѣхъ предложеніямъ, которыя онъ разсмотрѣлъ, я отсылаю васъ къ упомянутому выше сочиненію".

Мы привели, вышеприведанное мѣсто, какъ примѣръ переписки между арабскими математиками.

Аль-Сингари написалъ еще сочиненія. „Геометрическія правила", „Замѣтки по Геометріи" и „О свойствахъ элипса", но, къ сожалѣнію, они до насъ не дошли.

ламъ" Евклида, а также составилъ біографію Евклида на основаніи греческихъ источниковъ. Весьма жаль что сочиненіе это до сихъ поръ остается въ рукописи; кромѣ того упомянемъ еще *Бега-Еддина* (Beha-Eddin), жившаго въ XVI столѣтіи, написавшаго ничтожное сочиненіе по Алгебрѣ и Ариѳметикѣ, служащее и нынѣ руководствомъ въ школахъ южной и западной Азіи *).

На сколько подвинули впередъ Арабы элементарную Геометрію мы не знаемъ точно. Но извѣстно, что „Начала" Евклида заняли почетное мѣсто въ преподаваніи, они были введены во всѣхъ школахъ, и служили основаніемъ для всякаго ученія; они были комментированы и дополняемы и намъ извѣстно до 50 различныхъ переводовъ „Началъ" на арабскій языкъ **). Въ особенности много занимались Арабы X-й книгой „Началъ", опредѣленіями и аксіомами; кромѣ того они анализировали методъ изложенія Евклида ***). Дока-

---

*) Сочиненіе Бега-Еддина было издано Нессельманомъ на арабскомъ языкѣ съ нѣмецкимъ переводомъ подъ заглавіемъ. *Beha-Eddins* Essenz der Rechenkunst arabisch und deutsch herausgegeben von Nesselmann. Berlin 1843. Сочиненіе это было также издано Марромъ подъ заглавіемъ: *Beha-Eddin*, Quintessence du calcul traduit par A. Marre. 2 ed. Rome. 1864.

**) Объ арабскихъ комментаторахъ „Началъ" и другихъ сочиненій Евклида можно найти много любопытныхъ свѣдѣній въ сочиненіи: *Gartz*, De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis. Halle, 1823, In-4.

***) Въ отдѣлѣ „Греки" въ статьѣ объ Аполлоніѣ Пергскомъ мы въ примѣчаніи указали на арабскую рукопись, находящуюся нынѣ въ Парижской Національной Библіотекѣ, въ которой помѣщенъ переводъ комментарія Веттія Валенса на X-ю книгу „Началъ" Евклида. Рукопись эта весьма цѣнна для исторіи развитія математическихъ наукъ у Арабовъ, изъ ея содержанія можно видѣть какого высокаго и всесторонняго развитія достигла математика у Арабовъ въ концѣ X-го столѣтія. Кромѣ того рукопись эта интересна еще въ томъ отношеніи, что это есть одинъ изъ самыхъ древнихъ памятниковъ математической литературы Арабовъ.

Рукопись эта есть Сборникъ, составленный въ 969 и 970 гг. въ Ширазѣ Ахметомъ-бенъ-Магомедомъ-Алсиджи, и состоящій изъ 51 сочиненія, или отрывковъ изъ сочиненій, различныхъ писателей. Сборникъ заключаетъ 220 страницъ. Съ вѣроятностью можно предположить, что Сборникъ этотъ составленъ Ахметомъ для собственнаго употребленія. Мы вкратцѣ перечислимъ названія сочиненій, заключающихся въ указанномъ нами Сборникѣ, въ послѣдовательномъ порядкѣ.

1) Сочиненіе Ибрагима-бенъ-Синана: Объ аналитическомъ и синтетическомъ методахъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ.

2) Сочиненіе Виджана-бенъ-Вастама, извѣстнаго подъ именемъ Абу-Салъ-Алкуги: О центрахъ соприкасающихся круговъ, расположенныхъ на данныхъ прямыхъ, на основаніи аналитическаго метода.

3) Сочиненіе Евклида: О рычагѣ.

4) Сочиненіе Архимеда: О тяжести и легкости.

5) Первая книга сочиненія: О раціональныхъ и мнимыхъ величинахъ, о которомъ говорится въ X-й книгѣ „Началъ" Евклида, переведенной Абу-Отманомъ изъ Дамаска.

зательствомъ тому, какъ далеко Арабы ушли въ своихъ изысканіяхъ, слу-

6) Вторая книга комментарія на X-ю книгу „Началъ" Евклида.

7) О значеніи X-й книги „Началъ".

8) Сочиненіе. О способѣ провести изъ точки двѣ прямыя, заключающія данный уголъ, на основаніи аналитическаго метода, составленное Виджаномъ бенъ-Растамомъ.

9) О предметѣ и содержаніи „Началъ" Евклида.

10) Письмо Ахмеда-бенъ-Магомеда, относящееся къ рѣшенію задачи, заимствованной изъ сочиненія Юганна-бенъ-Юзуфа: О раздѣленіи прямой линіи на двѣ равныя части съ указаніемъ ошибки, сдѣланной Юзуфомъ въ этомъ рѣшеніи.

11) Сочиненіе Евклида: О дѣленіи плоскихъ фигуръ.

12) Отрывокъ астрономическаго содержанія.

13) Сочиненіе астрономическаго содержанія, написанное Табитъ бенъ-Корра.

14) Отрывокъ, относящійся къ движенію луны.

15) Сочиненіе Табитъ-бенъ-Корра: „О составленіи отношеній".

16) Письмо, содержащее вычисленіе мнимыхъ корней, написанное Магомедомъ-бенъ-Алгахиммъ эмиру Абулу-Джафару-Алмохтафи.

17) Письмо Алфадги-бенъ-Гатимъ-Алнаиризи: Объ азимутѣ Кибла.

18) Прибавленія къ нѣкоторымъ изъ предложеній X-й книги „Началъ", извѣстнымъ на греческомъ языкѣ, и переведенныхъ врачемъ Назифъ-Ямапомъ.

19) Отрывокъ, относящійся къ построенію прямоугольныхъ треугольниковъ, изъ раціональныхъ или цѣлыхъ чиселъ.

20) Письмо шейха Абу-Джафара къ Абу Магомеду-Абдаллѣ, извѣстнаго подъ именемъ *вычислителя:* объ образованіи прямоугольныхъ треугольниковъ, коихъ стороны раціональны, и о пользѣ знанія этого.

21) Отрывокъ астрономическаго содержанія.

22) Рецептъ всеобщаго лекарства и указаніе какъ имъ пользоваться.

23) Сочиненіе астрономическаго содержанія.

24) Сочиненіе Табитъ-бенъ-Корра „Объ измѣреніи параболическихъ тѣлъ".

25) Сочиненіе Табитъ-бенъ-Корра „Объ измѣреніи параболы".

26) Сочиненіе Ибрагима-бенъ-Синана „Объ измѣреніи параболы".

27) Письмо Ахмеда-бенъ-Магомеда-Алджалила къ врачу Абу-Ямапу „О построеніи остроугольнаго треугольника при помощи двухъ неравныхъ прямыхъ".

28) Письмо Ахмеда-Алджалила къ шейху Абулу Магомеду-бенъ-Алджалилу „О сѣченіяхъ, полученныхъ на параболоидахъ и гиперболоидахъ вращенія.

29) Мемуаръ Алала-бенъ-Сала: О свойствахъ трехъ (коническихъ) сѣченій.

30) Сочиненіе объ устройствѣ астролябіи, извѣстной подъ названіемъ Almobthakh, написанное Абу-Джафаромъ-бенъ Абдала.

31) Сочиненіе Ахмеда-бенъ-Алджалила, относящееся къ рѣшенію задачъ, предложенныхъ ему ширазскими геометрами.

32) Сочиненіе Табитъ-бенъ-Корра, относящееся къ предложенію, что „двѣ прямыя, образующія съ третьею углы, коихъ сумма менѣе двухъ прямыхъ, пересѣкаются".

33) Построеніе трисекціи угла.

34) Отрывокъ, относящійся къ свойствамъ ирраціональныхъ величинъ.

35) Интересныя и изящныя задачи, относящіяся къ числамъ.

36) Сочиненіе Гипсикла „О восхожденіяхъ", переведенное Исгакъ-бенъ-Гонейномъ и просмотрѣнное Табитъ-бенъ-Корра.

жить то, что извѣстное доказательство *постулата* параллельныхъ линій,

37) Письмо Табитъ-бенъ-Корра „О фигурѣ сѣченія (alkatha)“.

38) Сочиненіе Табитъ-бенъ-Корра „О нахожденіи подобныхъ чиселъ, весьма простымъ способомъ“.

39) Отрывокъ изъ комментарія Алмагани на X-ю книгу „Началъ“.

40) Доказательство одного геометрическаго предложенія.

41) Изложеніе способа вычислять рычаги и прямыя, послѣ ихъ названія.

42) Разборъ и доказательство предложенія, что всякая непрерывная величина дѣлима до безконечности.

43) Сочиненіе Табитъ-бенъ-Корра, написанное къ Ибнъ-Вагабу, „О способахъ находить построенія геометрическихъ задачъ“.

44) Отрывокъ изъ комментарія Евтокія на 2-е предложеніе, II-й книги, сочиненія Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ“, въ переводѣ сдѣланномъ Табитъ-бенъ-Корра.

45) Трисекція прямолинейнаго угла, данная Табитъ-бенъ-Корра.

46) Сочиненіе Ахмеда-бенъ-Алджалила „Объ измѣреніи шаровъ при помощи шаровъ“.

47) Сочиненіе шейха Абу-Джафара: „О построеніи двухъ средне-пропорціональныхъ при помощи метода неподвижной Геометріи“.

48) Сочиненіе Юганна-бенъ-Юзуфа: „О раціональныхъ и ирраціональныхъ количествахъ“.

49) Письма шейха Абу-Джафара-Магомеда къ Абдаллѣ-бенъ-Али, извѣстному подъ именемъ *вычислителя* „О доказательствѣ нѣкоторыхъ свойствъ чиселъ“ и „О построеніи прямоугольныхъ треугольниковъ въ раціональныхъ числахъ“.

50) Оглавленіе сочиненій, заключающихся въ Сборникѣ.

51) Различныя предложенія, относящіяся къ теоріи ирраціональныхъ величинъ.

Оглавленіе Сборника помѣчено 8-мъ января 1259 г. Большая часть изъ поименованныхъ сочиненій написана въ Ширазѣ въ 969 и 970 гг. Сборникъ этотъ еще тѣмъ интересенъ, что многіе подлинники сочиненій, копіи которыхъ въ немъ находятся, до насъ дошли. Такъ напр. подлинникъ 22-го сочиненія былъ найденъ Гейхомъ въ Египтѣ и находится нынѣ въ одной изъ библіотекъ Парижа.

Изъ содержанія этого Сборника видно, какое важное значеніе придавали арабскіе геометры X-й книгѣ „Началъ“ Евклида. Въ этомъ отношеніи они стоятъ несравненно выше новѣйшихъ математиковъ. Шаль въ своемъ разборѣ сочиненія Венке „Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius“, говоритъ: „въ теченіи долгаго времени между новѣйшими математиками изученіе X-й книги „Началъ“ Евклида, считалось трудомъ безплоднымъ и труднымъ, а потому они ею почти не занимались“. Не только новѣйшіе математики совершенно выключали X-ю книгу „Началъ“ при преподаваніи, но еще въ Средніе Вѣка и въ эпоху возрожденія X-я книга считалась самою трудною, ее называли *крестомъ* математиковъ. Стевинъ въ своей „Ариѳметикѣ“, въ I-й книгѣ говоритъ: „трудность X-й книги „Началъ“ Евклида сдѣлалась для многихъ предметомъ отвращенія, ее даже стали называть крестомъ математиковъ, изученіе ея и пониманіе считались слишкомъ трудными, а также не приносящими пользы совершенно безплодными“. Причина почему новѣйшіе математики стали придавать мало значенія изученію X-й книги „Началъ“, безъ сомнѣнія та, что многочисленныя предложенія этой книги, относящіяся къ соизмѣримости и несоизмѣримости и свойствамъ раціональныхъ и ирраціональныхъ прямыхъ линій относятся не только къ линіямъ, но и къ величинамъ вообще и кромѣ того входятъ въ область „Теоріи чиселъ“. Замѣтимъ еще, что

данное арабскимъ математикомъ персомъ *Нассиръ-Еддинъ-ат-Туси* *), ничѣмъ не уступаетъ доказательствамъ даннымъ въ послѣднее столѣтіе; доказательство это Валлисъ (Wallis) находилъ необыкновенно остроумнымъ. Арабы приписываютъ *Абу-Гафару-аль-Газину* первому мысль построенія кубическихъ уравненій съ помощью коническихъ сѣченій; къ кубическимъ уравненіямъ была приведена *Аль-Магани* (Al-Mahani) задача Архимеда „раздѣленія шара въ данномъ отношеніи". Но извѣстно, что еще Архимедъ занимался этой задачей, а Евтокій въ своемъ комментаріѣ къ сочиненію Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ" далъ нѣсколько построеній помощью коническихъ сѣченій рѣшенія задачъ „двухъ средне-пропорціональныхъ" и „дѣленія шара въ данномъ отношеніи". Седильо нашелъ отрывокъ по Алгебрѣ, въ которомъ уравненія 3-й степени рѣшены *геометрически*. Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію уравненій 3-й степени, авторъ этого отрывка рѣшаетъ задачу: „двухъ средне-пропорціональныхъ", которую онъ рѣшаетъ съ помощью двухъ параболъ. Но замѣтилъ-ли авторъ, что всѣ уравненія 3-й степени могутъ быть рѣшены съ помощью двухъ средне-пропорціональныхъ и трисекціи угла, трудно сказать. Шаль полагаетъ, что дѣло идетъ о численныхъ уравненіяхъ, которыми только и занимались Арабы, а также новѣйшіе математики до Віета, которому первому принадлежитъ переходъ къ рѣшенію буквенныхъ уравненій.

Изъ сказаннаго видно, что Арабы умѣли выражать геометрически формулы и тѣмъ самымъ дать имъ *болѣе ясное значеніе*. Извѣстно, что Кеплеръ сильно жалѣлъ, что не умѣлъ строить геометрически алгебраическихъ выраженій.

алгебраическія обозначенія почти совершенно устранили трудности, встрѣчаемыя при геометрическихъ доказательствахъ этихъ предложеній. Въ Средніе же вѣка X-й книгой „Началъ" незанимались по причинѣ низкаго состоянія математическихъ наукъ вообще. Арабы первые послѣ Грековъ оцѣнили должнымъ образомъ значеніе и важность X-й книги „Началъ". Многочисленныя сочиненія ихъ по этому предмету суть самыя лучшія доказательства сказаннаго [illegible]

*) Персъ *Нассиръ-Еддинъ-Туси* родился въ 1201 г. въ Хоросанѣ и умеръ въ 1274 г. въ Багдадѣ; онъ былъ астрономъ. По повелѣнію монгольскаго хана Гулагу, внука Чингисъ-Хана, онъ устроилъ обсерваторію въ городѣ Мерагѣ, въ Адвербейджанѣ. Въ зданіи обсерваторіи находилась библіотека, собраніе астрономическихъ приборовъ, небесные и земные глобусы. Нассиръ-Еддинъ составилъ астрономическія таблицы, извѣстныя подъ именемъ *Ильханіевыхъ*, названныя такъ въ честь Гулагу-Илеку-Хана. Нассиръ Еддинъ перевелъ также „Начала" Евклида на арабскій языкъ. Переводъ этотъ былъ напечатанъ два раза, именно: Euclid. Elementorum LL. XIII. Studio Nassireddini Tusini pr. arab. impressi. Romae. 1594 in-fol., а другой разъ Euclid. Elementorum LL. XIII. Studio Nassireddini Tusini pr. arab. impressi. London. 1657 in-fol. съ латинскимъ переводомъ. Кромѣ того онъ перевелъ еще много другихъ сочиненій на арабскій языкъ, изъ числа которыхъ назовемъ: сочиненія Архимеда и Теодосія. Онъ написалъ также сочиненіе по Алгебрѣ и руководство по Алгебрѣ и Ариѳметикѣ.

Съ перваго разу это кажется страннымъ, что Арабы себѣ приписываютъ сдѣланное Греками, тѣмъ болѣе, что сочиненіе Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ" и комментарій на него Евтокія были уже давно извѣстны Арабамъ; это объясняется тѣмъ, что въ тѣ времена книги были извѣстны только въ видѣ рукописей, а потому были мало распространены. Многія сочиненія арабскихъ математиковъ, дошедшія до насъ, не были извѣстны ихъ современникамъ.

Построеніе кубическихъ уравненій помощью коническихъ сѣченій стало извѣстно на Западѣ только въ недавнее время; Декарту пришлось снова находить эти построенія, и только въ 1684 г. англичанинъ *Томасъ Бэкеръ* (Baker) далъ способъ построенія уравненій 3-й и 4-й степени, сходный съ способомъ предложеннымъ для уравненій 3-й степени 600 лѣтъ тому назадъ арабскимъ математикомъ *Омаръ-аль-Гайами* (Omar-al-Hayyami)*).

Наиболѣе всего трудились Арабы надъ переводомъ „Альмагеста" Птоломея. Первый переводъ былъ сдѣланъ во времена Гарунъ-аль-Рашида и за тѣмъ исправленъ въ правленіе того же калифа двумя математиками, именно: *Абу-Гассаномъ* (Abû-Hasan) и *Салманомъ* (Salmân), за тѣмъ было сдѣлано еще нѣсколько переводовъ, и наконецъ Табитъ-бенъ-Корра далъ вполнѣ пригодный переводъ**).

Переходомъ отъ „Началъ" Евклида къ изученію „Альмагеста", въ школахъ, служили такъ называемыя „среднія книги", состоявшія изъ „Данныхъ" Евклида, „Оптики" Птоломея, „Сферики" Теодосія, „Сферики" Менелая и другихъ***). Большую часть этихъ книгъ перевелъ на арабскій языкъ Табитъ-бенъ-Корра.

---

*) Въ Лейденской библіотекѣ находится сочиненіе Алкаями (Alkhayyâmi), содержаніе котораго объясненіе трудностей представляемыхъ опредѣленіями, находящимися въ введеніи къ „Началамъ" Евклида.

**) Кассири упоминаетъ, что около 800 г. надъ переводомъ „Альмагеста" на арабскій языкъ трудились: Abou-Hajan, Salam и Hedjadj-ben-Mathar. Впослѣдствіи, въ 827 г., Исгакъ-бенъ-Гонейнъ издалъ полный переводъ этого сочиненія. Кассири приводитъ также имена многихъ арабскихъ математиковъ, написавшихъ комментаріи и извлеченія изъ „Альмагеста".

***) По мнѣнію Гартца (Gartz) подъ именемъ *среднихъ книгъ* (mutawassatât) были извѣстны между арабскими математиками слѣдующія сочиненія: „Данныя", „Оптика", „Катоптрика" и „Феномены" Евклида; „Сферика", „О жилищахъ" и „О дняхъ и ночахъ" Теодосія; „Движущаяся сфера" и „Восхожденіе и захожденіе свѣтилъ" Автолика; „О шарѣ и цилиндрѣ", „Объ измѣреніи круга" и „*Леммы*" (Assumta) Архимеда; „О величинахъ и разстояніяхъ солнца и луны" Аристарха; „Сферика" Менелая, „О восхожденіяхъ" Гипсикла; „Данныя" и „De figura sectore" Табита-бенъ-Корра; „De mensura figurarum" Магомеда-бенъ-Муза; и „De figurae secantis proprietatib et demonstr." Нассиръ-Еддина-Туси.

Вопросъ о *среднихъ* книгахъ былъ въ послѣднее время обстоятельно разобранъ въ

О развитіи математическихъ наукъ въ Испаніи мы знаемъ очень мало. Болѣе извѣстны намъ астрономы. Изъ математиковъ славился марокканецъ *Ибнъ-аль-Банна* (Ibn-al-Banna), жившій въ XIII вѣкѣ. Мы знаемъ, что науки вообще были въ Испаніи на высокой степени развитія, чему служатъ доказательствомъ основанные Маврами университеты въ Севильѣ, Толедо, Кордовѣ, Гранадѣ и другихъ городахъ*), громадныя библіотеки**), такъ напр. библіотека въ Кордовѣ заключала въ себѣ 600000 томовъ. Извѣстно также, что король Альфонсъ X Кастильскій (1252 —1284), слѣдуя примѣру калифовъ***), пригласилъ къ своему двору еврейскихъ и мавританскихъ астрономовъ для перевода на испанскій языкъ многочисленныхъ сочиненій арабовъ по Математикѣ и Астрономіи и для устройства новыхъ астрономическихъ таблицъ, впослѣдствіи названныхъ *Алфонсовыми*****).

Въ заключеніи скажемъ нѣсколько словъ о развитіи Тригонометріи у Арабовъ. Главнымъ источникомъ для изученія Тригонометріи служилъ Арабамъ „Альмагестъ" Птоломея, отъ Индусовъ они заимствовали *kardagaf*ы, т. е. Sin и Sin. vers, Тригонометрическія предложенія, которыя у Грековъ *носятъ совершенно геометрическій характеръ*, у Арабовъ имѣютъ видъ *алгебраическихъ формулъ*. Кромѣ тригонометрическихъ выраженій, находящихся въ „Альмагестѣ" Арабамъ была извѣстна формула:

$$\text{Cos}\, a = \text{Cos}\, b\, \text{Cos}\, c + \text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, A$$

Формулу эту*****) находимъ въ сочиненіи *Аль-Батани* (Al-Battani), жившемъ

статьѣ: *M. Steinschneider*, Die „mittleren" Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Статья эта помѣщена въ Zeitschrift für Mathematik und Physik. X Jahrg. 6. Heft. 1865. Leipzig. in-8.

*) Нѣкоторые полагаютъ, что правила первыхъ европейскихъ университетовъ заимствованы изъ уставовъ мавританскихъ университетовъ. Въ сочиненіи: *Middeldorph*, Commentatio de institutis litterariis in Hispania, находится много весьма интересныхъ свѣдѣній и описаній арабо-испанскихъ университетовъ въ Кордовѣ, Гранадѣ, Толедо, Севильѣ и др. Въ университетахъ этихъ существовало два факультета. Для полученія степени необходимо было держать экзаменъ.

**) Въ Испаніи существовало болѣе 70 библіотекъ. Каталогъ Кордовской библіотеки состоялъ изъ 44 томовъ.

***) Въ XII и XIII вв. знаніе арабскаго языка было весьма распространено на Западѣ. На многихъ общественныхъ памятникахъ надписи сдѣланы на арабскомъ языкѣ. Монеты чеканенныя при Фридрихѣ II и при нѣкоторыхъ норманскихъ короляхъ носятъ арабскія надписи. Въ XIV в. въ Испаніи часто писали по испански арабскими буквами.

****) Въ настоящее время еще сохранились многіе арабскіе термины, въ особенности въ Астрономіи; изъ числа ихъ укажемъ на: *зенитъ, надиръ, азимутъ, алидада* и мн. др.

*****) Соотвѣтствующая этой формулѣ, формула:

$$\text{Cos.}\, A = \text{Sin.}\, B\, \text{Sin.}\, C\, \text{Cos}\, a - \text{Cos.}\, B\, \text{Cos.}\, C$$

дана Віетомъ въ 1593 г., въ сочиненіи: Variorum de rebus mathematicis responsorum.

въ X вѣкѣ *); онъ ввелъ первый вмѣсто хордъ Sin'ы. Въ сочиненіяхъ Аль-Батани въ первый разъ встрѣчаются тангенсы дугъ, въ видѣ выраженія $\frac{\text{Sinus}}{\text{Cosinus}}$. Выраженіемъ этимъ Аль-Батани пользуется при своихъ вычисленіяхъ въ Гномоникѣ. Тангенсъ онъ называетъ *растянутая тѣнь*. Аль-Батани прозвалъ *арабскимъ Птоломеемъ*. Удивительно какъ Птоломею не пришла мысль замѣнить свои полухорды Sin'ми, такъ какъ онъ первый замѣнилъ цѣлыя хорды—полухордами.

Для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ Арабамъ были извѣстны пять формулъ, которыми пользуются и въ настоящее время. Пятая формула $\text{Cos}\, C = \text{Sin}\, B\, \text{Cos}\, c$ дана была Геберомъ, жившимъ около 1058 г. Шестая изъ тригонометрическихъ формулъ, которыми мы пользуемся въ настоящее время, т. е. $\text{Cos.}\, a = \text{Cotg.}\, B\, \text{Cotg.}\, C$ была дана только въ XVI в. Віетомъ.

Абуль-Вефа значительно подвинулъ впередъ Тригонометрію, введя новое начало, именно, онъ ввелъ Tang. какъ самостоятельную тригонометрическую функцію **); кромѣ этого онъ ввелъ еще Cotang., Sec. и Cosec. о которыхъ до него не упоминаетъ ни одинъ изъ писателей. Тангенсы и котангенсы онъ называетъ *вертикальная и горизонтальная тѣни*, а секансъ и косекансъ онъ называетъ *діаметръ вертикальной тѣни и діаметръ горизонтальной тѣни*. Абуль-Вефа построилъ тригонометрическія таблицы для Tang. и Cotang. Этими новыми функціями онъ воспользовался для упрощенія извѣстныхъ уже до него тригонометрическихъ выраженій, но самостоятельныхъ формулъ для нихъ онъ не далъ. Къ сожалѣнію, на такое важное

---

*) *Альбатани*, настоящее имя котораго Магомедъ-бенъ-Джефаръ, былъ родомъ изъ города Батена, въ Месопотаміи. Онъ производилъ астрономическія наблюденія отъ 877 г до 918 г въ городахъ Раккѣ, на Эфратѣ, а потомъ Антіохіи, въ Сиріи. Альбатани написалъ нѣсколько астрономическихъ сочиненій, изъ которыхъ самое главное „Zydge-Seby", которое было издано въ Нюренбергѣ, въ 1537 г. in-8, подъ заглавіемъ „De scientia stellarum". Сочиненіе это перевелъ на латинскій языкъ Платонъ Тивольскій; впослѣдствіи оно было комментировано Регіомонтанусомъ. Почти всѣ свои астрономическія познанія Альбатани заимствовалъ изъ сочиненій Птоломея. На основаніи наблюденій, произведенныхъ въ Ракки, Альбатани опредѣлилъ наклоненіе эклиптики къ экватору въ 23°. 35'.

**) Введеніе тангенсовъ въ тригонометрическія выраженія весьма упростило вычисленія. Къ сожалѣнію такой важный шагъ въ Тригонометріи оставался мало извѣстнымъ, такъ что введеніе тангенсовъ многіе приписываютъ Регіомонтанусу, до котораго европейскіе математики пользовались неудобными и сложными тригонометрическими формулами, въ которыя входили одни только синусы и косинусы неизвѣстной величины. Понятіе о тангенсахъ вошло въ Тригонометрію весьма туго, такъ напримѣръ, Коперникъ, жившій сто лѣтъ послѣ Регіомонтануса, не зналъ ихъ примѣненія.

нововведеніе, какъ Tang., не было обращено должнаго вниманія; труды Абулъ-Вефы были почти совершенно забыты. Впослѣдствіи одинъ только *Улу-Бекъ* *), внукъ Тамерлана, воспользовался ими, и только въ XV столѣтіи, когда Регіомонтанусъ снова нашелъ тангенсы, они были окончательно введены въ Тригонометрію.

Прямолинейная Тригонометрія оставалась почти въ такомъ же состояніи, какъ во времена Менелая. Весьма интересно то, что извѣстный математикъ Габиръ вычисляетъ двойные углы при помощи хордъ, тогда какъ въ Сферической Тригонометріи онъ съ умѣніемъ примѣняетъ Sin. и Cos.

Тригонометрическія таблицы были необходимы Арабамъ при ихъ астрономическихъ вычисленіяхъ, а потому онѣ были доведены ими до значительной степени точности. Первыя тригонометрическія таблицы Арабы заимствовали у Индусовъ. Таблицы хордъ „Альмагеста" Птоломея были ими доведены до большей степени точности.

Изъ ученыхъ занимавшихся Тригонометріей упомянемъ еще знаменитаго врача и философа *Аверроэса* (Averrhoës), который много занимался астрономіей и написалъ сочиненіе „Сокращенный Альмагестъ" на еврейскомъ языкѣ; кромѣ этого онъ написалъ сочиненіе по Сферической Тригонометріи. Настоящее имя Аверроэса было Абенъ-Рохдъ; онъ былъ испанскій еврей. Онъ родился въ Кордовѣ въ 1126 г. и умеръ въ Марокко въ 1198 г.

Особенное вниманіе было обращено Арабами на приложеніе Геометріи къ Гномоникѣ, такъ какъ вопросъ объ устройствѣ солнечныхъ часовъ являлся существенно важнымъ при измѣреніи времени. Вопросъ же этотъ принадлежитъ къ числу самыхъ важныхъ въ Астрономіи. Начиная съ IX в.

---

*) Извѣстный Тамерланъ столицей, основаннаго имъ громаднаго государства, избралъ Самаркандъ, который сдѣлался однимъ изъ самыхъ богатыхъ и цвѣтущихъ городовъ Востока. По приглашенію Тамерлана въ Самаркандъ съѣхалось большое число ученыхъ, которые сдѣлались членами основанной имъ Академіи наукъ. Сынъ Тамерлана *Шахъ-Рокъ* (1[illegible] г.— 1447 г.) основалъ громадную библіотеку и воспользовался своими сношеніями съ большею частью государей Западной Европы, пріобрѣтая самыя рѣдкія и замѣчательныя рукописи. Самаркандъ продолжалъ процвѣтать и послѣ перенесенія столицы въ Гератъ. Сынъ Шахъ-Рока, *Улу-Бекъ* (1393 г.—1449 г.) извѣстенъ болѣе какъ ученый, чѣмъ какъ правитель. Назначенный правителемъ Туркестана и Трансоксаніи въ 1400 г., онъ построилъ въ Самаркандѣ коллегію, которую считали чудомъ свѣта. Подъ руководствомъ Улу-Бека астрономы составили астрономическія таблицы, извѣстныя подъ именемъ *таблицъ Улу-Бека*; таблицы эти предпочитали таблицамъ составленнымъ Нассиръ-Еддиномъ, они пользовались извѣстностью и долгое время были въ ходу. Производя астрономическія наблюденія Улу-Бекъ прочелъ на небѣ, что онъ погибнетъ отъ руки сына, не смотря на всѣ мѣры предосторожности принятыя имъ, онъ дѣйствительно былъ убитъ, по приказанію своего сына, въ 1449 г. Улу-Бекъ былъ послѣдній изъ астрономовъ и математиковъ между восточными мусульманами; съ нимъ прекращается развитіе математическихъ наукъ на Востокѣ.

многіе ученые начинають заниматься вопросомъ объ устройствѣ солнечныхъ часовъ и многія сочиненія написаны по этому предмету. Вопросомъ этимъ много занимался Алкинди и Табитъ-бенъ-Корра, который воспользовался свойствами коническихъ сѣченій при построеніи солнечныхъ часовъ. Методъ этотъ былъ впослѣдствіи снова примѣненъ марокканцемъ Абулъ-Гассаномъ-Али, жившимъ въ началѣ XIII в., и написавшимъ сочиненіе подъ заглавіемъ „Книга соединяющая начала съ концами". Сочиненіе это состоитъ изъ двухъ частей, въ первой изложены *вычисленія*, а во второй—*описаніе инструментовъ* и ихъ примѣненіе.

Арабскіе математики были первыми, которые поняли и оцѣнили должнымъ образомъ сочиненія древнихъ греческихъ геометровъ. Начиная съ Альмамуна сочиненія Евклида, Теодосія, Аполлонія, Гипсикла, Менелая и многихъ другихъ математиковъ были переведены и комментированы арабскими учеными. Многочисленныя и разнообразныя сочиненія арабскихъ математиковъ могутъ служить лучшимъ подтвержденіемъ сказаннаго*). Весьма много тонкихъ и сложныхъ вопросовъ были ими глубоко и всесторонне изслѣдованы, что видно напримѣръ по рѣшенію вопроса: по данному положенію предмета и глаза наблюдателя, найти изображеніе въ сферическомъ зеркалѣ. Рѣшеніе этого вопроса аналитически, сводится на рѣшеніе уравненія 4-й степени. Задача эта находится въ „Оптикѣ" Альгазена **). Арабскіе математики не ограничились тѣмъ, что переводили сочиненія греческихъ геометровъ, въ нѣкоторыхъ частяхъ математики ими сдѣланы были важныя усовершенствованія и нововведенія. Изъ числа самостоятельныхъ трудовъ арабскихъ математиковъ упомянемъ: введеніе ими трехъ или четырехъ основныхъ предложеній, которыя въ настоящее время суть основанія Тригонометріи; введеніе синусовъ дугъ вмѣсто двойныхъ хордъ; введеніе тангенсовъ въ тригонометрическія выраженія, чрезъ что послѣднія значительно упростились; приложеніе алгебры къ Геометріи; розысканія относительно рѣшеній уравненій третьей степени; правильные взгляды на катоптрику; и наконецъ то философское направленіе, которое

*) Въ одномъ изъ энциклопедическихъ сочиненій принадлежащихъ Національной библіотекѣ и озаглавленномъ „Мемуары Ихвановъ Альцафа (Ikhwân Alçafa," находится слѣдующая классификація наукъ: „Философскія науки дѣлятся на четыре отдѣла: 1) науки математическія, 2) науки логическія, 3) науки физическія, 4) науки метафизическія. Математическія науки, въ свою очередь, дѣлятся на четыре класса: 1) ариѳметика, 2) Геометрія, 3) астрономія и 4) музыка". Энциклопедія эта состоитъ изъ цѣлаго ряда сочиненій, изъ которыхъ первыя относятся къ математическимъ наукамъ.

**) Задачей этой занимались многіе первоклассные математики, какъ напр. Слюзъ (Sluze), Гюйгенсъ, Барровъ, Лопиталь, Симсонъ и др. Симсонъ рѣшилъ эту задачу на основаніи геометрическихъ соображеній.

ими было внесено въ изслѣдованіе и толкованіе различныхъ геометрическихъ вопросовъ. Все это указываетъ на то, что ученые Багдадской школы были вполнѣ усвоены съ различными отраслями математическихъ наукъ и занимались толкованіемъ и объясненіемъ самыхъ отвлеченныхъ вопросовъ, а потому труды ихъ заслуживаютъ полнаго вниманія и уваженія.

Итакъ мы видимъ, изъ этого краткаго очерка развитія Геометріи у Арабовъ, что хотя они не отличались творческимъ духомъ, подобно грекамъ и индусамъ, но благодаря ихъ любознательности къ наукамъ *), желаніемъ все объяснить, что заставляло ихъ заниматься съ одинаковымъ рвеніемъ алгеброй и поэзіей, философіей **) и грамматикой; мы имъ будемъ вѣчно благодарны за то, что они намъ сохранили науки грековъ и индусовъ, когда эти народы уже ничего не производили, а Европа была еще слишкомъ невѣжественна, чтобы сохранить это цѣнное наслѣдство. Соединивъ геометрическія познанія грековъ съ познаніями по Алгебрѣ индусовъ, Арабы дали математическимъ наукамъ то направленіе, которое онѣ до тѣхъ поръ не имѣли; направленіе это въ послѣдствіи послужило къ быстрому развитію Геометріи, начавшемуся въ XVI вѣкѣ.

---

*) Арабами было подмѣчено весьма много любопытныхъ явленій, такъ напримѣръ имъ были извѣстны: искусственное оплодотвореніе нѣкоторыхъ растеній, сохраненіе растеній во время зимы, окрашиваніе лепестковъ растеній въ разные цвѣта, поливаніемъ земли растворами разныхъ веществъ; они знали также примѣненіе аконита въ медицинѣ, имѣли понятіе о камнесѣченіи. Всѣ тѣла природы были ими расположены въ послѣдовательномъ порядкѣ, что они назвали „цѣпью существъ". Цѣпь эта начиналась съ минераловъ и кончалась ангелами. Много свѣдѣній о познаніяхъ арабовъ въ различныхъ отрасляхъ знанія помѣщено въ сочиненіи: *Abraham Ecchellensis*, Synopsis sapientiae Arabum, 1661. Также много трудились арабы надъ усовершенствованіемъ различныхъ приборовъ, въ особенности же надъ усовершенствованіемъ часовъ. По мнѣнію нѣкоторыхъ арабамъ были извѣстны приборы приближающіе предметы, подтвержденіе этого они находятъ въ разсказѣ о зеркалѣ, установленномъ на александрійскомъ маякѣ, при помощи котораго можно было видѣть суда выходящіе изъ портовъ Греціи. Въ нѣкоторыхъ арабскихъ сочиненіяхъ помѣщено даже описаніе этого зеркала.

**) Италіанскій оріенталистъ Палія (Pallia) высказалъ мнѣніе, что арабы оказали большое вліяніе на развитіе философіи у христіанъ и что они первые положили основы схоластической философіи.

Краткій историческій очеркъ развитія алгебры.

Съ IV-го вѣка прекращается самостоятельное развитіе Геометріи. Діофантъ полагаетъ новое направленіе въ развитіи математическихъ наукъ, на сцену является Алгебра, первые слѣды которой мы уже находимъ у Египтянъ, Ассирянъ, Китайцевъ, Индусовъ и Арабовъ. Сначала развитіе Алгебры шло медленно и слабо, и только съ XVI-го столѣтія она начинаетъ дѣлать неимовѣрные успѣхи и въ настоящее время стоитъ на такой высотѣ предъ которой невольно преклоняешся.

Въ XVI-мъ столѣтіи начали прилагать Алгебру къ Геометріи, которая вслѣдствіи этого получаетъ совершенно иной видъ и необыкновенную общность, изъ науки конкретной она дѣлается наукой отвлеченной, глазъ перестаетъ участвовать въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, чертежъ перестаетъ имѣть значеніе, а всѣ теоремы выражаются отвлеченной комбинаціей алгебраическихъ символовъ, которые продолжаютъ существовать и въ то время, когда теорема исчезаетъ для глаза при извѣстномъ положеніи данныхъ протяженій. Тамъ гдѣ древніе геометры руководимые глазомъ, теряли теорему и должны были доказывать ее отдѣльно для различныхъ данныхъ положеній, Алгебра даетъ ее всегда въ одной комбинаціи символовъ. Каждую геометрическую теорему или задачу старались выразить съ помощью алгебраическихъ комбинацій и обратно, каждую алгебраическую комбинацію символовъ старались выразить, если возможно, конкретнымъ геометрическимъ представленіемъ. Отсюда вытекла Аналитическая Геометрія и построеніе алгебраическихъ выраженій, а также Воображаемая Геометрія, какъ относительно измѣненнаго пространства трехъ измѣреній, такъ и относительно отвлеченныхъ пространствъ имѣющихъ болѣе трехъ измѣреній.

Но по мѣрѣ того какъ Алгебра все болѣе и болѣе обнимала Геометрію падалъ глубокій синтезъ древнихъ геометровъ и самыя глубокія изслѣдованія дѣлаются механически, усиленная дѣятельность ума, съ помощью которой древніе открывали самыя запутанныя связи между геометрическими величинами, слабѣетъ. Трудные и запутанные переходы отъ одной мысли

къ другой совершаются механическими преобразованіями количественныхъ символовъ съ помощью трехъ основныхъ законовъ Алгебры, о которыхъ мы будемъ подробно говорить ниже.

Такъ какъ съ XVI-го столѣтія Алгебра и Геометрія идутъ рука объ руку, одна другую дополняютъ и поясняютъ, то необходимо бросить хотя бѣглый взглядъ на содержаніе Алгебры и на происхожденіе того количественнаго матеріала, надъ которымъ она производитъ свои дѣйствія, а затѣмъ исторически прослѣдить постепенное ея развитіе до XVI-го вѣка.

Но прежде чѣмъ мы начнемъ излагать содержаніе Алгебры, мы считаемъ не лишнимъ сказать нѣсколько словъ объ историческомъ происхожденіи слова *алгебра* и нѣкоторыхъ изъ алгебраическихъ знаковъ.

Происхожденіе слова *алгебра* было предметомъ многихъ споровъ между учеными. Нѣкоторые утверждали, что слово это произошло отъ имени арабскаго математика Гебера *). Въ настоящее время вполнѣ выяснено, что слово *алгебра*, произошло отъ арабскаго слова ***jebr***, которое означаетъ вправку вывихнутаго члена или перелома. Въ сочиненіи „**Chirurgia**“ знаменитаго итальянскаго врача Салицето (**Guiglielmo di Saliceto di Piacenza**), написаннаго имъ въ Болоньѣ въ 1258 г., находится слѣдующее мѣсто: „**Liber tertius de algebra, id es restauratione convenienti circa fracturam et dissolutionem ossium**“. Въ математикѣ словомъ *алгебра* выражали возстановленіе отрицательнаго члена уравненія, перенесомъ въ другую часть, гдѣ онъ становился положительнымъ. Въ продолженіи Среднихъ Вѣковъ слово ***algebra*** употребляли въ смыслѣ вправки вывихнутаго члена или перелома. Названіе это еще сохранилось и до настоящаго времени въ первоначальномъ своемъ значеніи; въ Испаніи и Португаліи до сихъ поръ еще хирурговъ называютъ ***algebrista*** **).

*) *Геберъ* (Jeber) астрономъ XII столѣтія жилъ въ Севильѣ; его не надо смѣшивать съ химикомъ Геберомъ, жившимъ въ VIII в.

**) *Существуетъ много объясненій происхожденія слова алгебра*, изъ числа ихъ укажемъ еще на производство отъ халдейскаго слова *Aklala*, т. е. противоставленіе (contrarietas, oppositio).

Весьма часто многія объясненія различныхъ математическихъ терминовъ не только ни на чемъ не основаны, но лишены всякаго здраваго смысла. Кестнеръ въ своей „Исторіи математическихъ наукъ“, въ I-мъ томѣ на стр. 147, 148, указываетъ на слѣдующее курьезное мѣсто изъ предисловія къ „Ариѳметикѣ“ Гельмрейха (Andreas Helmreich), написанной въ 1595 г.: „Великій египетскій геометръ *Algebras* наставникъ мегарскаго князя Евклида, жившій во время Александра Великаго, былъ весьма свѣдущъ въ числахъ и раскрылъ многія ихъ замѣчательныя свойства; сочиненіе свое онъ озаглавилъ на арабскомъ языкѣ *Gebra* и *Almchabula*; предметъ этого сочиненія выразить при помощи числа и вопроса неизвѣстныя числа и вопросы. Впослѣдствіи книга эта была переведена съ арабскаго языка на гре-

Въ Средніе Вѣка Алгебру часто называли ***almucabala***, названіе это встрѣчается въ сочиненіи „Liber Abaci", написанномъ въ 1202 г. Фибоначчи. Слово это производятъ отъ арабскаго слова ***mokâbalah*** — сравненіе, противопоставленіе. Термины ***algebra*** и ***almokâbalah*** встрѣчаются еще въ сочиненіи арабскаго математика IX в. *Магомеда-бенъ-Музы-Говарезми*, написавшаго въ 820 г. по повелѣнію Аль-Мамуна общедоступную Алгебру „**Al-gebr w'el mukabala**". Магомедъ-бенъ-Муза не даетъ объясненія этимъ терминамъ, изъ чего можно заключить, что они были хорошо извѣстны въ VIII в. Объясненіе и значеніе этихъ словъ находится въ сочиненіи Бега-Еддина, жившаго въ XVI в., который говоритъ: „Та часть, въ которой находится отрицательная величина, дополняется, а къ другой части прибавляется нѣчто равное тому, что дополняетъ первую часть; подобное дѣйствіе называется ***al-jebr***. Подобные и равные члены въ обѣихъ частяхъ отбрасываются, это дѣйствіе носитъ названіе ***al-mokâbalah***" *).

Италіанскіе математики XV и XVI столѣтія слово *алгебра* замѣняютъ другими, именно: **Ars magna, Practica speculativa, Ars rei, Ars rei et census.** Разсмотримъ кратко происхожденіе этихъ названій. Названіе ***Ars magna*** по италіански ***Arte maggiore***, употребляли италіанскіе математики для от-

ческій *Arethmedo*, а затѣмъ съ греческаго на латинскій *Альмагестъ*. Сочиненіе это также было въ большомъ употребленіи у евреевъ и индусовъ, а также у другихъ народовъ, и названо было ими *Alboreth*".

Впрочемъ, необходимо замѣтить, что Гельперихъ занималъ мѣсто нотаріуса, изслѣдованія же свои въ области математическихъ наукъ онъ вѣроятно производилъ въ часы досуга.

*) Подобное же объясненіе терминовъ: algebra и almokâbalah находится въ сочиненіи персидскаго математика *Неджима-Еддина-Али-Хана*. Въ этомъ сочиненіи въ стихотворной формѣ дано слѣдующее правило, переведенное на нѣмецкій языкъ Нессельманомъ

Die Seite, die ein Minusglied enthält,
Ergänz' und setze ein demselben gleiches
Bejahend auf die andre, o Gelehrter!
Im Kunstausdrucke nennt man dieses Djebr
Zur Zeit, wenn Du die Gleichung bildest, wisse:
Wenn sich's ereignet, dass gewisse Glieder
Einander homogen und völlig gleich,
Auf beiden Seiten unverhüllt sich zeigen,
So wirf auf beiden Seiten sie heraus,
Und dieses nenne dann Mokabala.

Мы уже выше замѣтили, говоря объ индусскихъ математикахъ, что излагать правила въ формѣ стиховъ, было весьма распространено на Востокѣ.

Сочиненіе Неджима-Еддина было напечатано, въ видѣ прибавленія къ сочиненію Бега-Еддина (см. стр. 127. примѣчаніе), и озаглавлено: „Nujm-ood-Deen Ulee Khan, head Qazee, to the Sudr Dee-wanee and Nizamut Udalut ect., Treatise on algebra. Revised and edited by Tarinee Churun Mitr, Maoluwee Jun Ulee and Gholam Ukbur. Calcutta. 1812".

личія Алгебры отъ Ариѳметики, которую они называли *Ars minor*. Названіе *Ars magna*, на сколько намъ извѣстно, было впервые употреблено Карданомъ. Италіанскіе математики XVI столѣтія на Алгебру смотрятъ какъ на чисто теоретическую науку и называютъ ее *Practica speculativa*. Практическую часть *Ars minor*—Ариѳметику, они называютъ *Practica mercantilis*.

Неизвѣстная величина у арабскихъ математиковъ называлась *schai*, т. е. предметъ, а ея квадратъ *mâl*. Иногда также неизвѣстную величину они называютъ *gidr*, т. е. корень (radix); слово это производное отъ *gadr*, что на арабскомъ языкѣ означаетъ корень растенія. Изъ сказаннаго видно, что терминъ *корень*, заимствованъ у арабскихъ математиковъ; греческіе математики понятіе корень выражали словомъ *сторона* πλευρά (квадрата). Фибоначчи, заимствовавшій Алгебру у Арабовъ, перевелъ эти названія на латинскій языкъ, назвавъ неизвѣстное *res*, а его квадратъ *census*; отсюда и произошли названія *Ars rei et census* или просто *Ars rei*.

Въ XIV столѣтіи италіанскіе математики начинаютъ употреблять италіанскій языкъ вмѣсто латинскаго; неизвѣстная величина принимаетъ названіе *cosa* или *cossa*, а ея квадратъ *censo*; а сама Алгебра получаетъ названіе *Arte* или *Regola della cosa*. Послѣднія названія въ большомъ ходу въ Италіи въ концѣ XV столѣтія. Съ теченіемъ времени названіе *Arte della cosa* принимаетъ латинскую форму, въ особенности внѣ Италіи; оно постепенно превращается въ *Ars cossica*, *ars cosae* или прямо *Cossa*. Алгебры, написанныя въ Германіи въ XVI столѣтіи Христофоромъ Рудольфомъ (Christoph Rudolph) въ 1524 г. и Михаиломъ Стифелемъ (Michael Stifel) въ 1553 г., носятъ уже прямо названіе „Die Coss“. Неизвѣстное они называютъ *numerus cossicus*, *die cossische Zahl*. Названія эти удерживаются въ продолженіи всего XVII и XVIII столѣтій.

Въ концѣ XVI-го столѣтія Віетъ значительно подвигаетъ впередъ Алгебру, замѣнивъ численные коэфиціенты—буквенными; до него вся теорія уравненій основывалась на численныхъ примѣрахъ. Такіе обобщенные коэфиціенты Віетъ называетъ *species*, а саму Алгебру—*logistica* или *arithmetica speciosa*, въ отличіе отъ обыкновенной Ариѳметики, носившей названіе *arithmetica numerosa*. Послѣ Віета названіе *arithmetica speciosa*, замѣнили другимъ—*arithmetica universalis*. Віету также обязаны своимъ происхожденіемъ названія *ars analytica*, *arithmetica analytica*. Сочиненіе, въ которомъ Віетъ далъ Алгебрѣ такое болѣе широкое обобщеніе названо имъ „In artem analyticam isagoge“.

Знаки + и —, на сколько намъ извѣстно, впервые встрѣчаются въ „Ариѳметикѣ“ Видмана Эгера, написанной въ 1489 г.; объ этомъ сочиненіи мы уже говорили на стр. 226 настоящаго сочиненія. Впрочемъ прошло не

мало времени пока знаки эти вошли во всеобщее употребленіе между математиками. Различные авторы различнымъ образомъ обозначали тотъ или другой символъ, такъ напримѣръ Пелетье въ своей „Ариѳметикѣ", написанной въ 1551 г., и „Алгебрѣ", написанной въ 1554 г., вмѣсто символовъ + и — употребляетъ буквы *p* и *m*. Тоже самое встрѣчается въ „Алгебрѣ" Бомбелли, написанной въ 1572 г.

Сравнительно позже былъ введенъ знакъ =. Знакъ этотъ былъ изобрѣтенъ англійскимъ геометромъ *Рикордомъ (Record)* и примѣненъ имъ въ сочиненіи „Whetstone of Wit" (т. е. *брусокъ для ума)*, вышедшемъ въ 1557 г. Декартъ вмѣсто знака равенства (=) употреблялъ перевороченную букву *a*, т. е. символъ ∞.

Символы > и < въ первый разъ были употреблены Гарріотомъ въ сочиненіи „Artis analyticae praxis, ect.", вышедшемъ въ 1623 г.

Віетъ первый замѣнившій числа буквами, при этомъ онъ употреблялъ всегда заглавныя буквы алфавита; маленькія же буквы въ первый разъ ввелъ Гарріотъ.

Знаки + и — примѣнены также въ сочиненіяхъ Рудольфа и Риса, написанныхъ въ 1522 и 1526 гг.

Введеніе показателей, или экспонентовъ, долгое время приписывали Гарріоту и Декарту, но въ настоящее время символы эти отысканы въ сочиненіи „Larismethique nouvellement composée par maistre Estienne de la Roche dict Villefranche, natif de Lyon", 1520 in-4. Степени какого нибудь числа, напримѣръ 5, авторъ обозначаетъ: 5^2, 5^3, 5^4, 5^5 и т. д. Подобное же обозначеніе онъ примѣняетъ къ корнямъ, при чемъ вмѣсто символа $\sqrt{}$ употребляетъ букву R, именно: $R^2 6$, $R^3 6$, $R^4 6$, $R^5 6$ и т. д.

Сочиненіе Лароша интересно еще въ томъ отношеніи, что оно есть первое сочиненіе по Алгебрѣ написанное на французскомъ языкѣ. Къ тому же времени относится другое сочиненіе, по тому же предмету, написанное въ 1520 г. *Шюкъ* (Nicolas Chuquet); къ сожалѣнію о послѣднемъ сочиненіи не существуетъ никакихъ указаній, оно утеряно. Весьма интересно было-бы знать какіе символы были употреблены авторомъ.

Неизвѣстныя величины и ихъ степени италіанскія алгебраисты обозначали словами: cosa, censo, cubo, censo de censo, relato primo и т. д. Если въ выраженіи входили двѣ неизвѣстныя величины, то одну называли cosa, а другую seconda cosa. Лука де Борго вмѣсто выраженія seconda cosa употребилъ слово quantita.

Галигай (Ghaligai) въ своемъ сочиненіи „Summa de Arithmeticâ", вышедшемъ въ 1521 г., а по его примѣру Бомбелли въ своей „Algebra",

вмѣсто выраженій censo, cubo и т. п. стали употреблять символы. Гамлигай различныя степени неизвѣстнаго выражалъ при помощи квадрата, раздѣленнаго прямыми линіями, а Бомбелли различныя степени $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ выражалъ символами $\underset{\smile}{1}, \underset{\smile}{2}, \underset{\smile}{3}, \underset{\smile}{4}, \ldots\ldots$ Символы $\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt{3}, +\sqrt{-1}$ Бомбелли обозначаетъ R.*q.*, R.*c.*, R.*q.*3, и *di* m. Скобки ( ) выражались символомъ L J.

Мы приведемъ для примѣра нѣсколько алгебраическихъ выраженій, взятыхъ изъ „Алгебры" Бомбелли, чтобы читатель могъ себѣ представить наглядно въ чемъ состоялъ символическій пріемъ, употребленный италіанскими математиками XVI в. Каждое изъ приведенныхъ выраженій мы переведемъ на нынѣшній алгебраическій языкъ.

$$2\underset{\smile}{2}\ m\ 20\underset{\smile}{1}\ p\ 22 = 2x^2 - 2x + 22$$

R.*c.*LR.*q.* 4352 *p.* 16J*m.* R.*c.* LR.*q.* 4352 *m.* 16J =

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{4352} + 16)} - \sqrt[3]{(\sqrt{4352} - 16)}$$

R.*q.* LR.*c.* LR.*q.* 278528.*p.* 128 J.*m.* R.*c.* L 278528.*p.* 128 JJ =

$$= \sqrt{\left(\sqrt[3]{(\sqrt{278528} + 128)} - \sqrt[3]{(278527 + 128)}\right)}$$

Приведенныхъ примѣровъ, мы полагаемъ, достаточно, чтобы составить себѣ понятіе о символическомъ способѣ италіанскихъ алгебраистовъ, и тѣхъ затрудненіяхъ съ которыми сопряжено въ настоящее время чтеніе сочиненій ихъ въ подлинникахъ.

Первый количественный матеріалъ Алгебры составляетъ рядъ натуральныхъ чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

который получается прибавленіемъ къ взятой единицѣ другой такой-же, къ полученному результату третьей и т. д. до безконечности, такъ какъ подобное прибавленіе не имѣетъ предѣла. Слѣдовательно рядъ натуральныхъ чиселъ безконеченъ. Безконечность, т. е. число *большее всякаго даннаго числа*, въ Алгебрѣ изображаютъ символомъ ∞.

Въ Алгебрѣ извѣстное число единицъ, но неопредѣленное, т. е. вообще собраніе единицъ обозначаютъ буквами $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Такое собраніе единицъ называютъ *количествомъ*, говорятъ напримѣръ количество a, количество b и т. д. Если же количество неизвѣстно, и требуется опредѣлить его по извѣстнымъ условіямъ, то такія количества обозначаются буквами $x, y, z, \ldots \xi, \eta, \zeta, \ldots$

Сложеніе. Первое основное и самое простое дѣйствіе въ Алгебрѣ есть прибавленіе къ a единицамъ, взятымъ изъ ряда (1), b единицъ того же ряда. Такое дѣйствіе обозначаютъ символомъ

$$a+b \tag{2}$$

знакъ $+$ называется *плюсъ.* Очевидно результатъ подобнаго дѣйствія есть нѣкоторое число c, изъ того же ряда (1). Что число c есть результатъ дѣйствія (2) обозначаютъ такъ:

$$a+b=c \tag{3}$$

знакъ $=$ обозначаетъ *равенство.*

Количества a и b называются *слагаемыми,* результатъ c *суммою,* а само дѣйствіе—*сложеніемъ.*

Всѣ слѣдующія дѣйствія надъ количествами суть только преобразованіе этого послѣдняго. Изъ него вытекаютъ всѣ тѣ разнообразныя дѣйствія надъ количествами, которыя носятъ въ анализѣ названіе *функцій.*

Законъ перестановительный. Такъ какъ прибавить къ a единицамъ b единицъ все равно, что прибавить къ b единицамъ a единицъ, то мы имѣемъ:

$$a+b=b+a \tag{4}$$

это законъ *перестановительный,* а выраженіе (4) есть *тождество,* т. е. одна и та же количественная мысль выражается двумя способами въ силу *перваго основнаго закона* (4).

Сложеніе есть дѣйствіе прямое и всегда возможное, т. е. всегда въ ряду (1) находится число c, которое есть сумма двухъ данныхъ чиселъ a и b взятыхъ изъ того же ряда.

Изъ опредѣленія суммы слѣдуетъ, что c всегда больше каждаго изъ слагаемыхъ a и b. Это неравенство выражается символамъ:

$$c>a \quad \text{и} \quad c>b \tag{5}$$

Умноженіе. Второе прямое дѣйствіе есть умноженіе, когда одно и то же число изъ ряда (1) слагается нѣсколько разъ: два, три, четыре и т. д.

$$a+a,\ a+a+a,\ a+a+a+a, \ldots\ldots,$$

Что для сокращенія пишутъ такъ:

$$1 . a,\ 2 . a,\ 3 . a,\ 4 . a, \ldots\ldots,\ n . a \tag{6}$$

Результатъ такого сложенія называется *произведеніемъ.* Число, показывающее сколько разъ другое сложено называется *множителемъ.* Въ рядѣ (6), числа 1, 2, 3, ... n суть множители, они всегда ставятся передъ слагае-

мымъ числомъ и носятъ названіе также *коэфиціентовъ.* Если результатъ сложенія числа b a разъ назовемъ c, то это пишется такъ:

$$a \,.\, b = c \quad \text{или} \quad ab = c \tag{7}$$

Умноженіе есть дѣйствіе всегда возможное, такъ какъ оно есть *сложеніе*, т. е. по даннымъ числамъ a и b изъ ряда (1) одно какъ множитель, другое какъ множимое, произведеніе c будетъ всегда число находящееся въ томъ же ряду.

Изъ опредѣленія умноженія слѣдуетъ, что:

$$c > a \quad \text{и} \quad c > b \tag{8}$$

Законъ перестановительный въ умноженіи. Такъ какъ въ произведеніи ab число b состоитъ изъ b единицъ, и каждая его единица взята a разъ, то очевидно, что каждая единица числа a взята b разъ, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$ab = ba \tag{9}$$

это законъ перестановительный въ умноженіи.

Законъ распредѣлительный. Если два числа a и b изъ ряда (1) сложены и сумма умножена на число n, то это пишутъ такъ:

$$n(a+b)$$

но складывая $a+b$ n разъ, каждое изъ чиселъ a и b будетъ сложено n разъ, слѣдовательно предъидущее выраженіе можно написать еще въ формѣ $na+nb$, т. е. мы имѣемъ:

$$n(a+b) = na+nb \tag{10}$$

этимъ тождествомъ выражается второй основной законъ алгебраическихъ количествъ, который называется *закономъ распредѣлительнымъ*, такъ какъ множитель n распредѣляется по слагаемымъ a и b.

Возвышеніе въ степень. Третее прямое дѣйствіе есть возвышеніе въ степень, когда взятое число a изъ ряда (1) множится само на себя: два, три, четыре и т. д. раза:

$$a \;,\; aa \;,\; aaa \;,\; aaaa, \ldots\ldots$$

эти выраженія пишутся такъ:

$$a^1 \;,\; a^2 \;,\; a^3 \;,\; a^4, \ldots\ldots\; a^n$$

гдѣ числа 1, 2, 3, 4, ... n показываютъ сколько разъ число a умножено само на себя. Числа эти называются *показателями* или *экспонентами.* Результатъ дѣйствія называется *степенью.*

Дѣйствіе возвышенія всегда возможно, каждая степень произвольно взятаго числа изъ ряда (1), находится всегда въ томъ же рядѣ, такъ какъ

возвышеніе есть преобразованное сложеніе. Если результатъ возвышенія числа a въ n-ю степень означимъ чрезъ b, то будемъ имѣть:

$$a^n = b \tag{11}$$

Законъ повторительный. Изъ опредѣленія показателей слѣдуетъ, что:

$$a^n . a^m = a^{n+m} \tag{12}$$

этимъ тождествомъ и выражается третій основной законъ Алгебры—законъ *повторительный.*

Три основные закона, выраженные тождествами:

$$\begin{aligned} &1. \quad a+b = b+a \quad , \quad ab = ba \\ &2. \quad n(a+b) = na+nb \\ &3. \quad a^n . a^m = a^{n+m} \end{aligned} \tag{13}$$

служатъ основаніемъ всѣхъ алгебраическихъ преобразованій одного выраженія въ другое, такими преобразованіями выражаются свойства принадлежащія всѣмъ числамъ ряда (1).

Возьмемъ для примѣра:

$$(a+b)(c+d)$$

по второму закону мы имѣемъ:

$$(a+b)c+(a+b)d$$

по первому:

$$c(a+b)+d(a+b);$$

опять по второму:

$$ca+cb+da+db$$

Слѣдовательно мы имѣемъ:

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c+(a+b)d = ac+bc+ad+bd.$$

Всѣ три предъидущія выраженія представляютъ одну и ту же количественную мысль въ различныхъ формахъ.

Возьмемъ еще примѣръ

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

По второму закону, мы имѣемъ:

$$(a+b)^2 = (a+b)a+(a+b)b$$

По первому:

$$(a+b)^2 = a(a+b)+b(a+b)$$

По второму также:

$$(a+b)^2 = aa+ab+ba+bb$$

или по первому закону и по третьему:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

или наконецъ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Изъ этихъ простыхъ примѣровъ видимъ, какъ съ помощью трехъ основныхъ законовъ преобразуется одна и таже количественная мысль въ различныя формы.

Алгебраическія изслѣдованія и доказательства теоремъ состоятъ въ томъ, что выбираютъ ту изъ формъ количественной мысли, которая удобнѣе комбинируется съ другими выраженіями.

Три *прямыя* дѣйствія: *сложеніе*, *умноженіе* и *возвышеніе* имѣютъ *обратныя*, когда по данному результату прямаго дѣйствія и одному изъ дѣйствующихъ количественныхъ символовъ требуется отыскать другой? Изъ этого видимъ, что прямое дѣйствіе есть *опредѣленіе*, а обратное —*вопросъ*, на который иногда можно, а иногда и нельзя дать отвѣта.

Вычитаніе. Первое обратное дѣйствіе есть *вычитаніе*, когда по данной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ требуется найти другое слагаемое.

Такъ какъ мы всегда имѣемъ:

$$a + b = b + a$$

то сложеніе имѣетъ только одно обратное дѣйствіе, т. е. дѣйствіе будетъ одно и тоже будетъ-ли опредѣляться одно или другое изъ слагаемыхъ a или b. Означая данное слагаемое чрезъ a, данный результатъ чрезъ c, искомое слагаемое чрезъ x, будемъ имѣть:

$$a + x = c \qquad (14)$$

Такъ какъ для полученія результата c надобно къ x единицамъ прибавить a единицъ, то очевидно для опредѣленія x надобно отъ c отнять a единицъ, такое дѣйствіе, т. е. отнятіе отъ c единицъ a единицъ изображается символомъ:

$$c - a$$

Знакъ — называется *минусомъ* и означаетъ отнятіе a единицъ отъ числа c. Слѣдовательно искомое число x будетъ символически изображаться такъ:

$$x = c - a \qquad (15)$$

Число c называется *уменьшаемымъ*, a —*вычитаемымъ*, а результатъ $c-a$ *разностью*.

Мы выше замѣтили, что каждое изъ слагаемыхъ меньше суммы, слѣдовательно дѣйствіе обозначенное символомъ (15) только тогда возможно, когда $c > a$, въ противномъ же случаѣ оно дѣлается невозможнымъ.

Алгебра не останавливается передъ этой невозможностью, она логически вводитъ рядъ количествъ, которыя нетолько дѣлаютъ вычитаніе всегда возможнымъ, но обращаютъ его въ дѣйствіе прямое.

Разсмотримъ какіе случаи представляются въ символѣ:

$$x = c - a$$

Случай 1. $c > a$, въ этомъ случаѣ дѣйствіе $c - a$ всегда возможно и результатъ получается отнявъ отъ c единицъ a единицъ.

Случай 2. $c = a$; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$x = a - a \tag{16}$$

такой результатъ обозначаетъ символомъ 0 и называютъ *нулемъ*. Этимъ числомъ пополняютъ рядъ (1) и дѣлаютъ возможнымъ рѣшеніе вопроса $a + x = c$ и въ томъ случаѣ, когда $c = a$. Пополненный числомъ 0 рядъ (1) сдѣлается:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\ldots, n, \ldots \tag{17}$$

Такъ какъ нуль есть число рѣшающее вопросъ, выраженный уравненіемъ:

$$a + x = a$$

или

$$a + 0 = a \tag{18}$$

то изъ этого видимъ, что нуль есть такое число, которое будучи прибавлено къ какому угодно числу ряда (1), неизмѣняетъ этого числа.

Случай 3. $a > c$. Если a больше c, то можно положить $a = c + b$ и задача:

$$a + x = c$$

сдѣлается:

$$c + b + x = c$$

Если отъ обѣихъ частей этого равенства отымемъ по c, то найдемъ:

$$0 + b + x = 0$$

но вмѣсто $0 + b$ можно поставить просто b, въ силу (18), слѣдовательно задача сводиться на слѣдующую:

$$b + x = 0$$

Но мы выше видѣли, что $b - b = 0$, слѣдовательно искомое число будетъ $-b$, т. е.

$$x = -b$$

Изъ полученнаго рѣшенія предложенной задачи видимъ, что рѣшеніе ея есть число взятое изъ ряда (17), но сопровождаемое знакомъ минусомъ или

Если такія числа мы введемъ въ Алгебру, то вычитаніе сдѣлается нетолько всегда возможнымъ, но оно сдѣлается дѣйствіемъ *прямымъ*. Такія числа назвали *отрицательными* и ими пополняется рядъ (17), который сдѣлается:

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots \qquad (19)$$

Въ противоположность отрицательнымъ числамъ числа 1, 2, 3,... пишутся со знакомъ $+$, $+1$, $+2$, $+3$,..... и называются *положительными*. Впрочемъ знакъ $+$ передъ положительными числами не пишется, но всегда подразумѣвается.

Всякое число называется *абсолютнымъ*, если говорятъ о числѣ единицъ не обращая вниманія на знакъ

Когда изъ сравненія выраженій $b+x$ и $b-b$ мы заключаемъ, что $x=-b$, то здѣсь встрѣчается недоразумѣніе. Въ выраженіяхъ $a+b$ и $a-b$ знаки $+$ и $-$ показываютъ дѣйствіе одинъ сложенія, другой вычитанія, слѣдовательно суть дѣйственные символы, когда же мы изъ $b-b$ заключаемъ, что $x=-b$, то дѣйственный символъ $-$ обращается въ этомъ случаѣ въ характеристику количественнаго символа. Спрашивается, какой же знакъ остается въ дѣйствіи $b-b$ послѣ перваго b, т. е. передъ знакомъ $-$?

Чтобы объяснить это обстоятельство мы дѣйствіе $b-b$ напишемъ въ формѣ $-b+b$, сравнивая его съ выраженіемъ $x+b$ мы находимъ $x=-b$ и при этомъ видно, что выраженіе $b-b$ должно писать въ формѣ $b+(-b)$, гдѣ уже знакъ $-$ дѣлается характеристикой количества b.

Введеніе отрицательныхъ количествъ въ Алгебру, обращаетъ дѣйствіе вычитанія, которое есть обратное сложенію, въ прямое, на которое распространяется и законъ *перестановительный*, такъ какъ мы имѣемъ:

$$a-b=-b+a \qquad (20)$$

Замѣтимъ еще, что дѣйствія $a+b$ и $a-b$ со введеніемъ положительныхъ и отрицательныхъ количествъ или чиселъ, напишутся:

$$+a+b \quad , \quad +a-b,$$

но когда алгебраическая фраза начинается количествомъ положительнымъ, то знакъ $+$ передъ нимъ не пишется, а потому фразы $a+b$, $a-b$, тоже что и $+a+b$ и $+a-b$.

Если въ фразѣ $a-a=0$ или $-a+a=0$ вмѣсто $+a$ поставимъ $a+0$, то она сдѣлается:

$$-a+a+0=0$$

нуль въ первой части можно считать прибавленнымъ къ $-a$, а слѣдовательно

нуль есть такое число, которое будучи прибавлено къ числу отрицательному неизмѣняетъ его, т. е.

$$-a+0=-a \quad \text{или} \quad 0-a=-a \tag{21}$$

Сложеніе и вычитаніе отрицательныхъ чиселъ. Числа $-1, -2, -3,\ldots$ показываютъ, что взяты одна отрицательная единица, двѣ, три и т. д., слѣдовательно ихъ можно писать въ формѣ:

$$-1, \quad 2.-1, \quad 3.-1,\ldots\ldots$$

или

$$-1, \quad -1.2, \quad -1.3,\ldots\ldots$$

откуда видно, что сложить два отрицательныя числа $-a$ и $-b$ это значитъ къ a отрицательнымъ единицамъ прибавить b отрицательныхъ единицъ, сумма будетъ равна суммѣ абсолютныхъ чиселъ a и b, взятая съ отрицательнымъ знакомъ, т. е. сумма будетъ $-a-b$. Если $a+b=c$, то:

$$-c=-a-b$$

Но $c=a+b$, а $-c=-1.c$, слѣдовательно:

$$-a-b=-1.c=-1.(a+b)=-(a+b)$$

Если складывается положительное число $+a$ съ отрицательнымъ $-b$, то сумма этихъ чиселъ будетъ равна абсолютной разности чиселъ a и b, взятой со знакомъ $+$ или со знакомъ $-$, смотря потому будетъ ли $a>b$ или $a<b$. Это слѣдуетъ изъ опредѣленія отрицательныхъ количествъ.

Если изъ положительнаго числа $+a$ требуется вычесть отрицательное число $-b$, то надобно найти рѣшеніе слѣдующаго вопроса:

$$-b+x=a$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по $+b$ и замѣчая что $b-b=0$, мы найдемъ:

$$x=a+b$$

откуда слѣдуетъ, что:

$$a-(-b)=a+b$$

Если изъ отрицательнаго числа $-a$ требуется вычесть отрицательное число $-b$, т. е. $-a-(-b)$, то необходимо рѣшить вопросъ:

$$-b+x=-a$$

если къ обѣимъ частямъ этого равенства прибавимъ $+b$, то найдемъ, какъ выше, что

$$x=-a+b$$

или

$$-a-(-b)=-a+b=b-a$$

Изъ этого видимъ, что если отрицательное число вычитается изъ положительнаго или отрицательнаго, то оно къ нему прибавляется.

Изъ выраженій

$$+a-(-b)=a+b \quad \text{и} \quad -a-(-b)=-a+b$$

слѣдуетъ, что отрицательное число $-b$, взятое отрицательно, т. е. $-(-b)$, дѣлается положительнымъ, т. е. $-(-b)=+b$.

Умноженіе отрицательныхъ чиселъ. Если множимое будетъ отрицательное число $-b$, а множитель положительное число a, то произведеніе $+a.-b$ есть сумма a отрицательныхъ чиселъ $-b$, т. е.

$$+a.-b=-b-b-b-b\ldots\ldots$$

a разъ, что даетъ

$$+a.-b=-a.b=-ab$$

Если на числа отрицательныя мы распространимъ законъ перемѣстительный, то мы будемъ имѣть:

$$+a.-b=-b.+a=-ab$$

откуда слѣдуетъ, что если множится два числа, положительное и отрицательное, то произведеніе будетъ отрицательное число, равное произведенію абсолютныхъ чиселъ множимаго и множителя.

Теперь если оба множителя будутъ отрицательныя числа, какой знакъ будетъ имѣть произведеніе?

Для рѣшенія этого вопроса опредѣлимъ умноженіе слѣдующимъ образомъ: умножить одно число на другое значитъ составить изъ втораго такъ число, какъ первое составлено изъ единицы.

Умножить $-a$ на $-b$, значитъ составить изъ $-b$ такъ число, какъ $-a$ составлено изъ единицы. $-a$ составлено изъ единицы слѣдующимъ образомъ: взята $+1$, перемѣненъ въ ней знакъ, а затѣмъ она сложена a разъ, слѣдовательно надобно взять $-b$, перемѣнить въ немъ знакъ, что даетъ $+b$ и сложить a разъ, результатъ будетъ $+ab$, слѣдовательно:

$$-a.-b=+ab$$

т. е. произведеніе двухъ отрицательныхъ чиселъ равно положительному числу, коего величина равна произведенію абсолютныхъ чиселъ a и b.

Такимъ же точно разсужденіемъ можно доказать предъидущіе результаты:

$$+a.-b=-ab \quad \text{и} \quad -a.+b=-ab$$

Какъ только введена въ Алгебру отрицательная единица и изъ нея составлены отрицательныя числа $-1, -2, -3, -4, \ldots$, такъ какъ изъ поло-

жительной единицы составлены положительныя числа $+1, +2, +3, +4, \ldots\ldots$, то необходимо распространяются и три основные алгебраическіе законы (13) на отрицательныя числа, т. е.

$$+a - b = -b + a \quad , \quad -a - b = -b - a$$

$$+a - b = -b . +a \quad , \quad -a . -b = -b . -a$$

$$+a(-b - c) = +a . -b + a . \; c$$

$$-a(-b - c) = -a . -b \;\; -a . -c$$

и

$$(-a)^m . (-a)^n = (\;\; a)^{m+n}$$

Допустивши составленіе отрицательныхъ чиселъ изъ отрицательной единицы, какъ положительныя изъ положительной единицы, само собою на нихъ распространяются и основные законы (13), а затѣмъ и правило знаковъ при умноженіи, которое, собственно говоря, логически доказано быть не можетъ, а можетъ логически быть допущено. Всѣ извѣстныя доказательства, если ихъ внимательно разобрать, составляютъ логическій кругъ, такъ какъ разъ допустивши тѣ же законы и для отрицательныхъ количествъ, правило для знаковъ есть необходимое слѣдствіе такого допущенія.

Дѣленіе. Второе обратное дѣйствіе есть *дѣленіе,* когда по данному произведенію b и одному изъ множителей a требуется отыскать другой x, т. е. требуется найти число x, которое-бы удовлетворяло равенству:

$$ax = b \qquad (22)$$

числа a и b взяты изъ ряда (1).

Такъ какъ мы имѣемъ $ab = ba$, то умноженіе имѣетъ только одно обратное дѣйствіе, т. е. будетъ-ли данъ одинъ или другой множитель дѣйствіе для ихъ опредѣленія будетъ одно и тоже. Это дѣйствіе называется *дѣленіемъ.* Число b называется *дѣлимымъ,* a — *дѣлителемъ,* а искомый результатъ называется *частнымъ.*

Дѣйствіе это какъ легко видѣть изъ примѣровъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ возможно, а въ другихъ невозможно, т. е. по даннымъ числамъ a и b изъ ряда (1) искомое число x иногда находится въ томъ же ряду, а иногда его нѣтъ. Напримѣръ:

$$3x = 6$$

очевидно $x = 2$; но если будетъ дано, напримѣръ:

$$2x = 1$$

то нѣтъ ни въ ряду (1), ни въ ряду (19) чиселъ, которыя-бы дали отвѣтъ на предложенный вопросъ. Слѣдовательно искомое число есть новое, которое должно быть выведено изъ опредѣленія *дѣленія*. А по опредѣленію надобно искать для x такое число, которое-бы будучи умножено на 2 дало въ результатѣ единицу. Возвратимся для этого къ опредѣленію умноженія $ax=b$. Произведеніе b множителей a и x есть сумма a слагаемыхъ b, т. е.

$$\overset{1}{x}+\overset{2}{x}+\overset{3}{x}+\overset{4}{x}+\overset{5}{x}+\ldots+\overset{a}{x}=b$$

Изъ этого равенства видимъ, что число b раздѣлено на a равныхъ частей и одна изъ нихъ есть число x. Это число называется *частнымъ* или *дробью*. Его означаютъ символомъ $x=\frac{b}{a}$. Число b называется *дѣлимымъ* или *числителемъ*, а a—*дѣлителемъ* или *знаменателемъ*. Умноженіемъ дроби $\frac{b}{a}$ на ея знаменателя a, мы будемъ называть дѣйствіе, которое даетъ въ результатѣ числитель b.

Слѣдовательно символъ $\frac{b}{a}$, или дробь означаетъ, что числитель b долженъ быть раздѣленъ на столько равныхъ частей, сколько въ знаменателѣ a содержится единицъ.

Но это опредѣленіе дроби неудобно, такъ какъ въ дробяхъ, имѣющихъ одного знаменателя приходится всегда снова дѣлить числителя, потому лучше опредѣлить дробь слѣдующимъ образомъ:

Дробь $\frac{b}{a}$ означаетъ, что единица раздѣлена на столько равныхъ частей, сколько въ знаменателѣ содержится единицъ, и что этихъ равныхъ частей единицы было взято столько, сколько единицъ содержитъ числитель.

Очевидно, что оба опредѣленія тождественны. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить b единицъ на a равныхъ частей—это раздѣлить каждую единицу числа b на a равныхъ частей и взять отъ каждой единицы по такой части, т. е. b частей, или раздѣлить единицу на a равныхъ частей и взять такихъ частей той-же единицы b.

Цѣлыя числа 1, 2, 3, 4, ... можно разсматривать какъ дроби, имѣющія знаменателемъ единицу:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \ldots\ldots$$

Возьмемъ теперь дробь $\frac{1}{a}$, которая показываетъ, что единица раздѣлена

на a равныхъ частей и взята одна такая часть. Эту часть въ свою очередь можно разсматривать какъ единицу и чтобы ее отличить отъ первоначальной единицы назовемъ ее единицею a-го порядка. Одна, двѣ, три и т. д. единицы будутъ дроби:

$$\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a}, \frac{4}{a}, \ldots \frac{n}{a}, \ldots\ldots$$

этотъ рядъ такъ составленъ изъ единицы a-го порядка, какъ рядъ (1) цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ составленъ изъ единицы.

Если единицу a-го порядка принять за единицу, то единица 1-го порядка сдѣлается числомъ a, число 2, сдѣлается $2a$ и т. д.; получается такой же безконечный рядъ положительныхъ чиселъ какъ и рядъ (1), только единица его будетъ a-я часть первоначальной единицы.

Числа:

$$-\frac{1}{a}, \quad \frac{2}{a}, -\frac{3}{a}, -\frac{4}{a}, \ldots\ldots$$

будутъ отрицательныя числа, выраженныя единицей a-го порядка. Слѣдовательно на дроби можно распространить всѣ алгебраическіе законы, которымъ подчинены цѣлыя положительныя и отрицательныя числа.

Итакъ рядъ (19) долженъ быть пополненъ еще числами различныхъ порядковъ, чтобы обратное дѣйствіе умноженію —дѣленіе было всегда возможно и обратилось въ прямое.

Вводя такія числа въ рядъ (19) рѣшеніе вопроса, выраженнаго равенствомъ:

$$ax = b$$

сдѣлается всегда возможнымъ какія-бы числа a и b нибыли. Мы говоримъ въ отвлеченномъ смыслѣ, но въ конкретномъ—полученіе дробнаго числа, какъ рѣшеніе предложеннаго вопроса, показываетъ часто его несообразность. Напримѣръ, колесо имѣетъ сто зубцовъ, сколько должно быть зубцовъ на колесѣ, которое-бы дѣлало семь оборотовъ, въ то время когда первое дѣлаетъ одинъ? Очевидно, чтобы получить число зубцовъ надобно раздѣлить 100 на 7, что дастъ 14 и $\frac{2}{7}$ зубца—нелѣпость, потому что дробныхъ зубцовъ быть не можетъ.

Не мѣсто намъ, здѣсь, говорить о свойствахъ дробей и о дѣйствіяхъ надъ ними, такъ какъ мы говоримъ здѣсь только о ихъ происхожденіи и значеніи.

Остается сказать теперь о произведеніи, въ которомъ одинъ изъ множ-

жителей есть нуль и о дроби, въ которой или числитель или знаменатель или и то и другое суть нули.

Легко видѣть изъ опредѣленія умноженія, что:

$$a.0 = 0$$

такъ какъ $a.0$ показываетъ, что нуль долженъ быть сложенъ a разъ, что даетъ въ результатѣ также нуль.

Если множитель будетъ нуль, т. е. если дано выраженіе $0.a$, то оно получаетъ только тогда смыслъ, когда мы распространимъ и на нуль законъ перестановительный, т. е. положимъ, что

$$0.a = a.0$$

откуда $0.a = 0$.

Если въ дроби $\frac{b}{a}$ числитель $b = 0$, то дробь будетъ также равна нулю, что видно изъ выраженія $b = a.x$, которое служило опредѣленіемъ дроби.

Если въ дроби $\frac{b}{a}$ знаменатель $a = 0$, то для опредѣленія смысла такого выраженія положимъ $a = \frac{1}{n}$. По мѣрѣ того, какъ число n возрастаетъ, $\frac{1}{n}$ приближается все болѣе и болѣе къ нулю и дробь $\frac{b}{a} = x$ сдѣлается:

$$x = bn$$

слѣдовательно съ возрастаніемъ n возрастаетъ также x. Когда n сдѣлается безконечно большимъ числомъ дробь, $\frac{b}{0}$ сдѣлается также безконечно большою, т. е.:

$$\frac{b}{0} = \infty$$

Извлеченіе корней. Третье прямое дѣйствіе есть возвышеніе въ степень, оно выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$a^n = b$$

которое будетъ выражать прямое дѣйствіе, когда по данному числу a, показателю степени n, взятыхъ изъ ряда (1) требуется опредѣлить степень b. Дѣйствіе это всегда возможно, т. е. въ ряду (1) всегда найдется искомое число b.

Дѣйствіе будетъ обратное, когда по данному результату или степени b, взятому изъ ряда (1), и одному изъ чиселъ a или n требуется найти

другое, т. е. если искомое число означимъ чрезъ x, то задача будетъ выражена слѣдующими двумя равенствами:

$$x^n = b \quad , \quad a^x = b$$

Такъ какъ a^b не равно b^a, то возвышеніе имѣетъ два обратныхъ дѣйствія, совершенно различныя; о второмъ мы будемъ говорить ниже, а здѣсь скажемъ о первомъ, т. е. о:

$$x^n = b$$

Это равенство требуетъ найти такое число для неизвѣстнаго x, которое-бы будучи умножено само на себя дало въ результатѣ данное число b.

То дѣйствіе съ помощью котораго, въ этомъ случаѣ, отыскивается требуемое число называется извлеченіемъ корня n-й степени и обозначается символомъ $\sqrt[n]{\ }$ поставленнымъ надъ числомъ b, т. е. изъ

$$x^n = b$$

мы имѣемъ:

$$x = \sqrt[n]{b}$$

слѣдовательно подъ этимъ символомъ разумѣется совокупность всѣхъ тѣхъ дѣйствій, которыя надобно совершить надъ b для полученія искомаго числа.

Разсмотримъ сначала самый простой случай когда $n = 2$, слѣдовательно требуется найти такое число въ ряду (19), которое бы удовлетворяло равенству:

$$x^2 = b \tag{23}$$

символическое выраженіе для x будетъ $x = \sqrt[2]{b}$, или просто $x = \sqrt{b}$.

Иногда при извѣстномъ числовомъ значеніи b, легко найти въ ряду (19) число для x, которое будучи умножено само на себя дастъ b, напримѣръ, положимъ $b = 16$, то легко видѣть, что $x = 4$, слѣдовательно $\sqrt{16} = 4$.

Замѣтимъ при этомъ, что не только $+4$ удовлетворяетъ уравненію

$$x^2 = 16 \tag{24}$$

но и -4, такъ какъ и $+4$ и -4, будучи возвышены во вторую степень даютъ $+16$. Слѣдовательно на вопросъ, выраженный уравненіемъ (24) есть два отвѣта, коихъ числовыя величины равны, но имѣющіе противные знаки. Въ силу этого передъ корнемъ второй степени ставиться всегда два знака $+$ и $-$, т. е. пишется:

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Или вообще:

$$x = \pm\sqrt{b}$$

Слѣдовательно символъ $\pm\sqrt{b}$ имѣетъ слѣдующее свойство:

$$(\pm\sqrt{b})^2 = b$$

Но въ большей части случаевъ, при извѣстномъ числовомъ значеніи b, въ ряду (19), пополненномъ числами всѣхъ возможныхъ порядковъ нѣтъ такого числа, которое-бы удовлетворяло уравненію (23). например положимъ $b = 2, 3, 5, \ldots$; если $b = 2$, то подставляя въ уравненіе:

$$x^2 = 2$$

вмѣсто x единицу, мы найдемъ, $1^2 = 1$, а подставляя два, мы найдемъ $2^2 = 4$, слѣдовательно искомое число для x заключается между 1 и 2; но между 1 и 2 лежатъ числа всѣхъ возможныхъ порядковъ, т. е. дроби больше единицы и меньше 2, изъ которыхъ ни одна, какъ легко показать, не можетъ удовлетворить уравненію $x^2 = 2$. Но можно найти всегда такія два послѣдовательныя числа, извѣстнаго порядка, между которыми находится искомое число. Если одно изъ такихъ чиселъ, напримѣръ, a-го порядка $\frac{m}{a}$ или $\frac{m+1}{a}$ примемъ за искомое число, то погрѣшность, сдѣланная при этомъ будетъ меньше единицы этого порядка, т. е. меньше $\frac{1}{a}$.

Чѣмъ порядокъ чиселъ $\frac{m}{a}$ и $\frac{m+1}{a}$ будетъ выше, т. е. чѣмъ число a будетъ больше, тѣмъ числа $\frac{m}{a}$ или $\frac{m+1}{a}$ будутъ ближе къ искомому идеальному числу, которое называется *ирраціональнымъ* и въ настоящемъ случаѣ такія числа выражаются символами:

$$\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{5}, \ldots\ldots$$

Слѣдовательно чтобы возможно было всегда рѣшить вопросъ, выраженный уравненіемъ:

$$x^2 = b$$

надобно ввести въ рядъ (19), пополненный числами различныхъ порядковъ, числа *ирраціональныя*—идеальныя, относительно числовой единицы, но дѣйствительно существующія, какъ протяженія.

Самый простой примѣръ тому служитъ діагональ квадрата, коего стороны равны единицѣ. И въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что діагональ такого квадрата выражается символомъ $x = \sqrt{2}$.

Такое же разсужденіе можно сдѣлать относительно уравненія:

$$x^n = +b$$

при $n = 3, 4, 5, \ldots\ldots$

Изъ опредѣленія символа a^x слѣдуетъ, что:

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

откуда слѣдуетъ, что отвѣтъ на вопросъ выраженный уравненіемъ:

$$a^n . x = a^m$$

будетъ:

$$x = a^{m-n}$$

т. е. при дѣленіи a^m на a^n показатель дѣлителя n вычитается изъ показателя дѣлимаго m.

Если $m = n$, то отвѣтъ будетъ имѣть двѣ формы: одну ариѳметическую, другую символическую.

Въ самомъ дѣлѣ, если $m = n$, то уравненіе

$$a^n . x = a^m$$

даетъ $x = 1$, или $x = a^0$. Поэтому говорятъ, что

$$a^0 = 1$$

Если въ уравненіи:

$$a^n . x = a^m$$

$n > m$, положимъ $n = p + m$, то мы будемъ имѣть.

$$a^n . x = a^{p+m} . x = a^p . a^m . x = a^m$$

или

$$a^p . x = 1$$

откуда:

$$x = \frac{1}{a^p}$$

но мы имѣемъ также:

$$x = a^{m-n} = a^{-p}$$

слѣдовательно:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

или

$$a^p . a^{-p} = 1$$

Если a^n надобно возвысить въ m-ю степень, то нужно a^n помножить само на себя m разъ, что даетъ:

$$\left[a^n\right]^m = a^n . a^n . a^n \ldots . = a^{n+n+n+\ldots} = a^{mn}$$

Такъ какъ мы имѣемъ:

$$\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = a$$

то очевидно можно писать вмѣсто символа $\sqrt[n]{a}$ символъ $a^{\frac{1}{n}}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы будемъ имѣть, примѣняя правило возвышенія:

$$\left[a^{\frac{1}{n}}\right]^n = a$$

Очевидно, что символъ $\sqrt[n]{a^m}$ можно написать въ формѣ:

$$a^{\frac{m}{n}}$$

Идея дробныхъ показателей принадлежитъ Декарту.

Остается разсмотрѣть тотъ случай, когда *число* b *отрицательное*, т. е. требуется рѣшить вопросъ.

$$x^2 = -b$$

Возвышая во вторую степень числа положительныя и числа отрицательныя, мы всегда получаемъ въ результатѣ числа положительныя, а предъидущій вопросъ требуетъ найти такое число, которое-бы будучи возвышено во вторую степень дало отрицательное число $-b$ взятое изъ пополненнаго всѣми возможными числами, ряда (19). Очевидно въ этомъ рядѣ такого числа нѣтъ.

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ положимъ $b = 1$, т. е. требуется рѣшить уравненіе:

$$x^2 = -1$$

Искомое число, удовлетворяющее этому уравненію есть *новое*, его называютъ *мнимой единицей* и обозначаютъ буквой i, слѣдовательно i есть такой числовой символъ, который будучи возвышенъ въ квадратъ даетъ -1, т. е.:

$$i^2 = -1$$

или распространяя на это уравненіе символическое рѣшеніе, мы найдемъ, что:

$$i = \sqrt{-1}$$

Изъ мнимой единицы i составляются *мнимыя числа* положительныя и отрицательныя, точно также, какъ изъ положительной и отрицательной единицы составляются числа положительныя и отрицательныя дѣйствительныя:

$$i, 2i, 3i, 4i, \ldots\ldots$$
$$-i, -2i, -3i, -4i, \ldots\ldots$$

Точно также получаются и мнимыя числа различныхъ порядковъ:

$$\frac{1}{a}i, \frac{2}{a}i, \frac{3}{a}i, \ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{a}i, -\frac{2}{a}i, -\frac{3}{a}i, \ldots\ldots$$

Изъ чиселъ дѣйствительныхъ и мнимыхъ составляются числа извѣстныя въ Анализѣ подъ именемъ *составныхъ чиселъ* или *количествъ*; онѣ имѣютъ форму:

$$a+bi$$

гдѣ a и b суть дѣйствительныя числа положительныя или отрицательныя.

Изъ дѣйствій прямыхъ и обратныхъ, вытекающихъ изъ трехъ основныхъ законовъ Алгебры, другихъ числовыхъ символовъ получиться не можетъ, слѣдовательно это и весь количественный матеріалъ надъ которымъ Алгебра производитъ свои дѣйствія и въ формѣ которыхъ получаются результаты при рѣшеніи всевозможныхъ вопросовъ.

Если замѣтимъ, что:

$$i^2=-1\ ,\ i^3=-i\ \ i^4=+1$$

то легко видѣть, что вообще:

$$i^{4n}=+1\ \ ,\ \ i^{4n+1}=i\ \ ,\ \ i^{4n+2}=-1\ \ ,\ \ i^{4n+3}=-i$$

поэтому какое-бы алгебраическое дѣйствіе не совершали надъ составнымъ количествомъ $a+bi$ мы всегда получимъ количество такой же формы: $A+Bi$.

Итакъ весь количественный матеріалъ Алгебры, надъ которымъ она производитъ свои дѣйствія и въ формѣ котораго получаетъ результаты, представляется въ слѣдующей формѣ:

$$+a,\ -a,\ +ai,\ -ai,\ a+bi$$

гдѣ a и b суть числа дѣйствительныя цѣлыя, дробныя или ирраціональныя.

Посмотримъ теперь какъ эти числа представляются геометрически.

Для этого надобно найти такія геометрическія предложенія и факты, которыя бы указали, что должны собою представлять въ Геометріи числа отрицательныя, мнимыя и составныя, когда положительныя представляютъ извѣстный родъ протяженія.

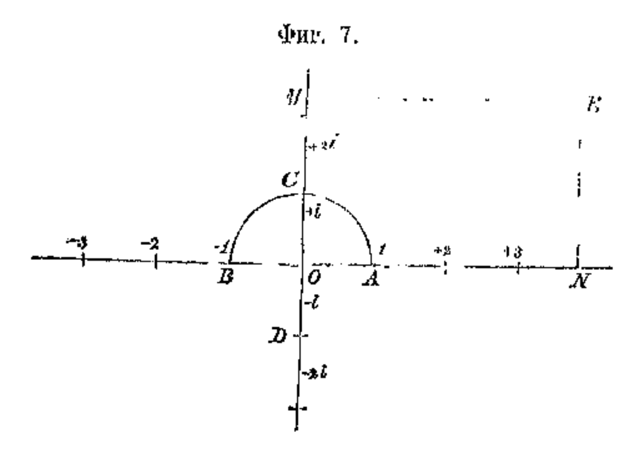
Возьмемъ прямую линію и на ней въ извѣстной точкѣ поставимъ нуль и отъ этой точки вправо на равныхъ разстояніяхъ поставимъ числа 1, 2, 3, 4,... ∞; значитъ отъ нуля отсчитывается вправо 1, 2, 3,.... единицы.

Дѣйствіе $3+4$ означаетъ, отсчитываніе, начиная отъ нуля, сначала 3 единицы, а потомъ еще четыре, всего слѣдовательно надобно отсчитать 7 единицъ вправо отъ нуля. Если будетъ дано $7-4$, то это значитъ требуется отсчитать вправо отъ нуля 7 единицъ, а потомъ возвратиться назадъ на четыре единицы. Слѣдуя логически такому дѣйствію мы должны въ выраженіи $3-5$ сначала отсчитать вправо отъ нуля 3 единицы, и потомъ возвратиться на 5 единицъ назадъ, слѣдовательно еще на двѣ единицы отъ нуля влѣво, но $3-5=-2$ слѣдовательно числа отсчитываемыя влѣво отъ нуля должны быть приняты за отрицательныя. Изъ этого мы заключаемъ вообще, что если мы отсчитываемъ извѣстныя величины въ извѣстномъ направленіи, то въ противоположномъ направленіи мы должны отсчитывать числа отрицательныя. Всѣ геометрическія изслѣдованія подтверждаютъ правильность такого условія, а геометрическія истины или предложенія получаютъ необыкновенную общность.

Посмотримъ теперь, какъ слѣдуетъ представлять геометрически мнимыя и составныя числа?

Если изъ точки нуль (фиг. 7) радіусомъ равнымъ единицѣ опишемъ кругъ и проведемъ діаметръ CD перпендикулярный къ прямой AB, то

Фиг. 7.



радіусъ OC будетъ, какъ извѣстно средне-пропорціональная величина между радіусами OA и OB, изъ коихъ первый есть $+1$, а второй -1, слѣдовательно $OC^2=-1$, т. е. $OC=i$. Изъ этого мы должны заключить, что числа i, $2i$, $3i$,..... должны отсчитываться на перпендикулярѣ OC, а $-i$, $-2i$, $-3i$,.... въ противоположную сторону, т. е. на OD. Остается показать какъ представить геометрически число $a+bi$. Для этого на прямой AB, отъ нуля въ ту или другую сторону откладываютъ число a, смотря потому будетъ-ли оно положительное или отрицательное. Затѣмъ на прямой CD

отъ нуля откладываютъ число bi въ ту или другую сторону, смотря потому будетъ-ли число bi положительное или отрицательное, изъ точекъ a и bi возставляютъ перпендикуляры, пересѣченіе которыхъ и даетъ точку E, которая геометрически и представляетъ число $a+bi$.

Такое геометрическое представленіе мнимыхъ и составныхъ количествъ нѣмцы приписываютъ Кюну *) и Гауссу, а французы Коши.

Всѣ геометрическія слѣдствія вытекающія изъ такого условія, показываютъ его логичность. Впрочемъ есть и другой способъ, принадлежащій французскому геометру Максимиліану Мари (**Maximilien Marie**), представлять геометрически мнимыя и составныя числа, который дѣлаетъ нѣкоторые геометрическіе выводы и заключенія проще, но онъ еще не вошелъ въ общее употребленіе, мы объ немъ будемъ говорить ниже.

Изъ геометрическаго представленія дѣйствительныхъ и составныхъ количествъ видимъ, что первыя изъ нихъ представляютъ точки лежащія на одной прямой, а вторыя всѣ точки одной плоскости. Были попытки представить точки въ пространствѣ, но тѣ условія, которыя необходимы для этого выходятъ изъ предѣловъ основныхъ законовъ Алгебры, которые не могутъ дать количественныхъ символовъ отличныхъ отъ тѣхъ, къ которымъ мы были приведены прямыми и обратными дѣйствіями Алгебры.

Гауссъ, въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ, говоритъ, что онъ доказалъ эту невозможность, но такого доказательства ни въ одномъ изъ его сочиненій не нашли. Мы приведемъ здѣсь доказательство, предложенное Кенигсбергеромъ **). Пусть такой символъ будетъ:

$$z = a + bi + ci'$$

гдѣ a, b, c, суть алгебраическія числа, а i и i' символы между которыми

---

*) *Кюнъ* (Heinrich Kühn) прусскій геометръ, родился въ 1690 г. въ Кенигсбергѣ, умеръ въ 1769 г. въ Данцигѣ. Онъ былъ членомъ Петербургской Академіи наукъ. Соображенія свои относительно геометрическаго построенія мнимыхъ величинъ Кюнъ изложилъ въ III-мъ томѣ „Novi Commentarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae" за 1750 г., въ мемуарѣ подъ заглавіемъ: Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis.

Къ сожалѣнію Кюнъ не достаточно развилъ свою мысль; его мемуаръ интересенъ въ историческомъ отношеніи, какъ первая попытка геометрическаго построенія мнимыхъ величинъ. На этотъ вопросъ снова было обращено вниманіе только пятьдесятъ лѣтъ послѣ появленія мемуара Кюна. Впослѣдствіи, когда мы будемъ говорить о трудахъ Аргана и Максимиліана Мари, мы изложимъ историческое развитіе вопроса объ геометрическомъ построеніи мнимыхъ выраженій.

**) *Leo Koenigsberger*, Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Functionen nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionenlehre. T. I—II, Leipzig. 1874. in-8.

не существуетъ однородной линейной зависимости съ дѣйствительными коэфиціентами, т. е. если мы имѣемъ:

$$a+bi+ci'=0$$

то это уравненіе можетъ существовать только при условіи

$$a=0 \quad , \quad b=0 \quad , \quad c=0.$$

Если такой символъ можетъ вытекать изъ трехъ основныхъ законовъ Алгебры, то онъ долженъ подлежать этимъ законамъ. Основной законъ всѣхъ алгебраическихъ количественныхъ символовъ состоитъ въ томъ, что произведеніе равно нулю, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю и обратно. Мы говоримъ, что символы формы:

$$z=a+bi+ci'$$

распространяя на нихъ три основные законы Алгебры, неудовлетворяютъ основному свойству умноженія, упомянутому выше.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$z_1=a_0+a_1i+a_2i' \qquad z_2=\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 i'$$

Если положимъ, что:

$$i^2=\rho_0+\rho_1 i+\rho_2 i'$$

$$i'^2=\sigma_0+\sigma_1 i+\sigma_2 i'$$

$$ii'=\tau_0+\tau_1 i+\tau_2 i'$$

то произведеніе будетъ:

$$z_1z_2=(a_0+a_1 i+a_2 i')(\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 i')=$$

$$=a_0\alpha_0+(a_1\rho_0+a_2\tau_0)\alpha_1+(a_1\tau_0+a_2\sigma_0)\alpha_2+$$

$$+i\Big[a_1\alpha_0+(a_0+a_1\rho_1+a_2\tau_1)\alpha_1+(a_1\tau_1+a_2\sigma_1)\alpha_2\Big]+$$

$$+i'\Big[a_2\alpha_0+(a_1\rho_2+a_2\tau_2)\alpha_1+(a_0+a_1\tau_2+a_2\sigma_2)\alpha_2\Big]$$

Но это произведеніе должно быть равно нулю тогда, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю, т. е. когда:

$$a_0+a_1i+a_2i'=0 \quad \text{или} \quad \alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 i'=0$$

или когда:

$$a_0=0\ ,\ a_1=0\ ,\ a_2=0 \quad \text{или} \quad \alpha_0=0\ ,\ \alpha_1=0\ ,\ \alpha_2=0$$

между тѣмъ оно равно нулю безъ этого условія.

Въ самомъ дѣлѣ, вторая часть произведенія равна нулю когда:

$$a_0\alpha_0+(a_1\rho_0+a_2\tau_0)\alpha_1+(a_1\tau_0+a_2\sigma_0)\alpha_2=0$$

$$a_1\alpha_0+(a_2+a_1\rho_1+a_2\tau_1)\alpha_1+(a_1\tau_1+a_2\sigma_1)\alpha_2=0$$

$$a_2\alpha_0+(a_1\rho_2+a_2\tau_2)\alpha_1+(a_0+a_1\tau_2+a_2\sigma_2)\alpha_2=0$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} a_0\ , & a_1\rho_0+a_2\tau_0\ , & a_1\tau_0+a_2\sigma_0 \\ a_1\ , & a_0+a_1\rho_1+a_2\tau_1\ , & a_1\tau_1+a_2\sigma_2 \\ a_2\ , & a_1\rho_2+a_2\tau_2\ , & a_0+a_1\tau_2+a_2\sigma_2 \end{vmatrix}=0$$

Но это есть однородное уравненіе 3-й степени относительно a_0, a_1, a_2. Слѣдовательно для совершенно произвольныхъ количествъ $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_0, \tau_1, \tau_2$ и для дѣйствительнаго значенія количествъ a_1 и a_2 оно даетъ хотя одно дѣйствительное значеніе для a_0. Изъ такимъ образомъ опредѣленныхъ количествъ a_0, a_1, a_2, мы найдемъ дѣйствительныя величины для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Слѣдовательно произведеніе:

$$(a_0+a_1i+a_2i')(\alpha_0+\alpha_1i+\alpha_2i')$$

для дѣйствительнаго конечнаго значенія величинъ $a_0, a_1, a_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ уничтожается помимо уничтоженія одного изъ множителей,—законъ которому подлежатъ всѣ алгебраическіе символы. Слѣдовательно такого символа формы $s=a+bi+ci'$, удовлетворяющаго всѣмъ основнымъ законамъ алгебраическихъ количествъ, быть не можетъ.

Теперь, имѣя весь количественный матеріалъ, посмотримъ къ какимъ дѣйствіямъ надъ этимъ матеріаломъ приводитъ Алгебра.

Прежде всего опредѣлимъ, что такое *перемѣнное* количество?

Перемѣннымъ количествомъ въ Алгебрѣ называютъ такое количество, которое можетъ получить неопредѣленное число значеній въ продолженіи вычисленій, т. е. не имѣетъ опредѣленнаго значенія.

Количества перемѣнныя обозначаются буквами x, y, z,.... и ξ, η, ζ,....

Если количество въ продолженіи вычисленія или изслѣдованія имѣетъ опредѣленную величину, то оно называется *постояннымъ*, и оно обозначается буквами a, b, c,....., α, β, γ,....

Если надъ перемѣннымъ количествомъ или надъ перемѣнными совершаютъ алгебраическія дѣйствія, прямыя или обратныя, то совокупность этихъ дѣйствій называется *функціею* того количества надъ которымъ совершено дѣйствіе.

Напримѣръ:

$$x+a\ ,\ x-a\ ,\ a-x\ ,\ ax\ ,\ \frac{a}{x}\ ,\ ax^n\ ,\ \frac{a}{x^n},\ldots$$

всѣ эти выраженія суть функціи количества x, такъ какъ надъ ними совершены дѣйствія: къ x прибавлено постоянное количество a, изъ него вычтено a, оно вычтено изъ a, x помножено на a, a раздѣлено на x, x возвышено въ n-ю степень и умножено на a, a раздѣлено на x^n, и т. д.

Если въ совокупность дѣйствій совершенныхъ надъ перемѣннымъ x входятъ только дѣйствія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и возвышеніе въ степень, то функція называется *раціональною*. Если-же входитъ и дѣйствіе обратное возвышенію, т. е. извлеченіе корней, то функція называется *ирраціональною* или *радикальною*.

Напримѣръ функція:

$$\frac{1+x^2}{x^3-a}$$

есть раціональная, но:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+x^2}$$

есть функція радикальная.

Для обозначенія функціи, когда не показаны явно всѣ дѣйствія совершенныя надъ x, употребляются символы:

$$f(x)\ ,\ \varphi(x)\ ,\ F(x)\ ,\ \psi(x),\ldots\ldots$$

гдѣ буквы f, φ, F, ψ,... обозначаютъ совокупность дѣйствій совершенныхъ надъ x.

Если надъ функціей совершается снова извѣстный рядъ дѣйствій, то говорятъ *функція функціи отъ* x и обозначаютъ символомъ $\psi f(x)$, т. е. надъ x совершенъ рядъ дѣйствій, выраженный символомъ f, и надъ результатомъ совершенъ рядъ дѣйствій, выраженный символомъ ψ. Очевидно, что означаетъ символъ $F\psi f(x)$ и т. д.

Символы F, f,... суть символы *дѣйственные;* x, y, z, a, b, c,... суть символы *количественные*, которые можно также разсматривать какъ дѣйственные. Въ выраженіи $f(x)$, f есть символъ дѣйствія, а x есть субъектъ дѣйствія. Если на количественный символъ x или a мы будемъ смотрѣть какъ на дѣйствіе надъ единицей, то $x(1)$ или $a(1)$ будутъ функціи отъ единицы, а x и a обращаются въ символы дѣйственные.

Символы количественные, разсматриваемые какъ дѣйственные, подле-

жать трем основным законам, которые выражаются въ слѣдующей формѣ:

$$x(1)+a(1)=(x+a)(1)$$

$$x(1)\,a(1)=a(1)\,x(1)=x\,.\,a(1)$$

$$y(1)[x(1)+a(1)]=y(1)x(1)+y(1)a(1)=y(x+a)(1)$$

$$x^n(1)\,.\,x^m(1)=x^{n+m}(1)$$

Въ этой формѣ основные законы Алгебры разсматриваются какъ принадлежащие не количественнымъ символамъ, а дѣйственнымъ.

Смотря по характеру и роду дѣйственныхъ символовъ $f, F, \phi, \ldots$ они подлежатъ многоразличнымъ законамъ.

Между дѣйственными символами, которые не имѣютъ количественнаго значенія, а только дѣйственное, есть такіе, которые подлежатъ тремъ основнымъ законамъ Алгебры. На такіе символы распространяются всѣ алгебраическія преобразованія количественныхъ символовъ, вытекающія изъ трехъ основныхъ законовъ. Таковы напримѣръ символы дифференцированія, или производныхъ:

$$\frac{d}{dx}\,,\ \frac{d}{dy}\,,\ Dx\,,\ Dy\,,$$

такіе символы въ преобразованіяхъ ничѣмъ не отличаются отъ количественныхъ, разница только въ томъ, что въ послѣднихъ субъектъ дѣйствія есть единица, а въ первыхъ функція отъ x, y, z,....

Обратной функціей, какой нибудь данной функціи, называется такая, которая уничтожаетъ дѣйствія данной, напримѣръ символы f и φ будутъ обратные, если мы имѣемъ:

$$f\varphi(x)=x$$

или

$$\varphi f(x)=x$$

Если мы вспомнимъ, что $x^{-n}.\,x^n=1$ или $x^{-1}.\,x^1(1)=1$, то по аналогіи, разсматривая x и x^{-1} какъ символы дѣйственные, мы можемъ писать обратные функціональные символы въ формѣ f и f^{-1}; слѣдовательно f и f^{-1} суть такіе функціональные символы, которые даютъ $f^{-1}f(x)=x$ или $ff^{-1}(x)=x$.

Поэтому если мы будемъ имѣть двѣ функціи, обратныя одна другой, то всегда, если одну изъ нихъ будемъ обозначать символомъ f, то другую необходимо должны обозначить символомъ f^{-1}.

Возьмемъ, напримѣръ, самую простую функцію x^2; обратная ей, какъ извѣстно, есть $\sqrt{x}$ или $x^{\frac{1}{2}}$ и мы имѣемъ $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ или $\sqrt{x^2}=x$.

Если функція $\frac{1+x}{1-x}$ прямая, то обратная ей будетъ $\frac{x-1}{x+1}$, совершивъ надъ этой послѣдней дѣйствіе означенное въ первой получимъ x.

Если надъ x совершено дѣйствіе выраженное символомъ φ, надъ полученнымъ результатомъ совершено опять тоже дѣйствіе φ, т. е. $\varphi\varphi(x)$, то это изображаютъ по аналогіи съ $xx=x^2$, черезъ $\varphi^2(x)$, если надъ этимъ результатомъ совершено еще разъ тоже дѣйствіе, то это изображаютъ символомъ $\varphi^3(x)$ и т. д.

Бываютъ функціи такого рода, что по совершеніи нѣсколько разъ одного и того же дѣйствія, мы возвратимся опять къ перемѣнному x. Напримѣръ, если:

$$\varphi(x)=1-x$$

то

$$\varphi^2(x)=x$$

Если

$$\varphi(x)=\frac{1}{1-x}$$

то

$$\varphi^3(x)=x$$

и т. д.

Если функція $\varphi(x)$ будетъ такого свойства, что $\varphi^n(x)=x$, то написавъ ее въ формѣ $\varphi^{n-1}\varphi(x)=x$ мы видимъ, что $\varphi^{-1}=\varphi^{n-1}$, т. е. въ этомъ случаѣ обратная функція будетъ та функція, которая получается, совершивъ надъ данною функціею $n-1$ дѣйствіе указанное символомъ φ.

Самая простая раціональная цѣлая функція есть x^n, изъ которой составляется болѣе общая, цѣлая раціональная функція вида:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=f(x)=y$$

эта функція для каждаго числоваго значенія x даетъ для $f(x)$ или для y только одно значеніе, поэтому она называется *функцией однозначной.*

Здѣсь представляется два вопроса: одинъ прямой, а другой обратный, именно:

По данной числовой величинѣ x, найти величину функціи $f(x)$ или y?

Этотъ вопросъ рѣшается весьма легко и даетъ всегда одно только значеніе для y.

Второй вопросъ обратный, по данному значенію y или $f(x)$, найти значеніе для x?

Это одинъ изъ самыхъ трудныхъ вопросовъ, которые составляютъ предметъ Алгебраическаго Анализа и составляютъ ту его часть, которую мы называемъ рѣшеніемъ уравненій всѣхъ степеней.

Всякая функція приравненная нулю называется *уравненіемъ*. Если функція будетъ такого рода, что всѣ части ея между собою сокращаются, то уравненіе называется *тождественнымъ*, напримѣръ:

$$(x-4)(x+4)-(x^2-16)=0$$

независимо отъ числового значенія x, а только въ силу трехъ основныхъ законовъ. Но $x^2-16=0$ будетъ уравненіе, такъ какъ оно будетъ только тогда равно нулю, когда $x=4$ или $x=-4$, другихъ же значеній x имѣть, въ этомъ случаѣ, не можетъ.

Пріемъ съ помощью котораго находятъ ту величину, которая обращаетъ данную функцію въ нуль, называется *рѣшеніемъ уравненія*.

Самая общая форма алгебраическаго уравненія есть:

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0$$

гдѣ A_0, A_1, A_2,... суть извѣстныя количества изъ всего алгебраическаго матеріала.

Рѣшить это уравненіе значитъ найти такое выраженіе или же такую алгебраическую комбинацію изъ A_0, A_1, ..., которая-бы, будучи подставлена вмѣсто x, обращала $f(x)$ въ тождество.

Здѣсь надобно различать два случая: первый когда A_0, A_1,... суть буквенныя количества, а второй когда A_0, A_1,... суть числа, какой угодно формы и рода.

Въ первомъ случаѣ требуется найти алгебраическую комбинацію изъ количествъ A_0, A_1, A_2,..., которая-бы будучи подставлена въ $f(x)$ обратила-бы ее въ нуль, а во второмъ случаѣ требуется найти такое число для x, которое бы обратило $f(x)$ въ нуль.

Такая алгебраическая комбинація изъ A_0, A_1, A_2,..., или такое число, называется *корнемъ* уравненія $f(x)=0$.

При буквенномъ значеніи A_0, A_1,.... можно найти для x алгебраическую комбинацію только въ томъ случаѣ, когда степень функціи $f(x)$ не выше четырехъ; для уравненій же высшихъ степеней такой алгебраической комбинаціи не существуетъ и доказано, что ея и быть не можетъ, полагая, что комбинація должна быть составлена только изъ всѣхъ прямыхъ и обратныхъ алгебраическихъ дѣйствій.

Для уравненія первой степени:

$$f(x)=A_0x+A_1=0$$

комбинація есть

$$x = -\frac{A_1}{A_0}$$

Если мы положимъ:

$$f(x) = A_0x + A_1 = y$$

то:

$$x = \frac{y - A_1}{A_0}$$

слѣдовательно обратная функція функціи $f(x)$, въ этомъ случаѣ будетъ:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - A_1}{A_0}$$

т. е. $ff^{-1}(x) = x$ или $f^{-1}f(x) = x$.

Если:

$$f(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0$$

то извѣстно, что:

$$x = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_0}$$

Если положить:

$$f(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2 = y$$

то обратная функція функціи $f(x)$, въ этомъ случаѣ будетъ:

$$f^{-1}(x) = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0(A_2 - x)}}{2A_0}$$

также точно можно найти рѣшенія уравненій 3-й и 4-й степеней.

Слѣдовательно рѣшить уравненіе значитъ, вмѣстѣ съ этимъ, и найти обратную функцію данной.

Пусть, напримѣръ, данное уравненіе будетъ:

$$f(x) = 0$$

если положить $f(x) = y$ и рѣшить уравненіе $f(x) - y = 0$, то положивъ, что рѣшеніе его есть:

$$x = \varphi(y)$$

мы будемъ имѣть:

$$f^{-1}(x) = \varphi(x)$$

Такъ какъ для уравненія 1-й степени существуетъ только одно рѣшеніе, то для функціи

$$f(x) = A_0x + A_1 = y$$

есть только одна обратная, какъ мы выше видѣли, именно:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - A_1}{A_0}$$

Для уравненія 2-й степени существуетъ два рѣшенія, а потому функція:

$$f(x)=A_0x^2+A_1x+A_2=y$$

имѣетъ двѣ обратныя, именно:

$$f^{-1}(x)=\frac{-A_1+\sqrt{A_1^2-4A_0(A_2-x)}}{2A_0}$$

и

$$f^{-1}(x)=\frac{-A_1-\sqrt{A_1^2-4A_0(A_2-x)}}{2A_0}$$

Уравненіе 3-й степени имѣетъ три рѣшенія, а поэтому функція

$$f(x)=A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=y$$

имѣемъ три обратныя.

Уравненіе 4-й степени имѣетъ четыре рѣшенія, а слѣдовательно функція четвертой степени:

$$f(x)=A_0x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=y$$

имѣетъ четыре обратныя и т. д.

Если коэфиціенты A_0, A_1, ... суть *числа*, то всегда можно найти столько чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію $f(x)=0$, сколько въ показателѣ функціи находится единицъ; слѣдовательно $f(x)$ имѣетъ и столько-же обратныхъ функцій.

Для уравненія пятой степени и высшихъ степеней нѣтъ такой алгебраической комбинаціи, составленной изъ коэфиціентовъ уравненія, которая-бы была обратная функція; но если коэфиціенты суть числа, то всегда возможно найти такія числа, которыя удовлетворять уравненію какой-бы то нибыло степени. Что же касается до обратной функціи вообще, то ее всегда возможно представить извѣстнымъ символомъ и изслѣдовать ея свойства.

Такъ если мы будемъ имѣть уравненіе вида:

$$f(x)=A_0x^n+A_2x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A^{n-1}x+A_n=y$$

то рѣшеніе этого уравненія можно представить въ видѣ символа, какъ мы уже условились:

$$x=f^{-1}(y)$$

Функція $f^{-1}(y)$ имѣетъ столько значеній, сколько въ показателѣ уравненія единицъ; въ настоящемъ случаѣ она имѣетъ n значеній.

Изъ Анализа мы знаемъ, что если корни уравненія извѣстны, то первая часть уравненія можетъ быть преобразована въ произведеніе n линейныхъ множителей, т. е. если $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ суть корни уравненія:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0$$

то мы имѣемъ:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_nx+A_n=A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Слѣдовательно цѣлый раціональный полиномъ можно преобразовать въ произведеніе линейныхъ множителей.

Таково происхожденіе алгебраическихъ функцій, за ними слѣдуютъ функціи трансцендентныя, какъ прямыя такъ и обратныя; онѣ имѣютъ большую аналогію съ алгебраическими.

Прямыя трансцендентныя функціи суть полиномы безконечно-большой степени или произведенія изъ безконечнаго числа линейныхъ множителей.

Подъ первой формой онѣ извѣстны подъ именемъ *безконечныхъ рядовъ*, а подъ второй формой онѣ извѣстны подъ именемъ *безконечныхъ произведеній*.

Функціи трансцендентныя. Одна изъ самыхъ замѣчательныхъ прямыхъ трансцендентныхъ функцій, которая служитъ основаніемъ всѣхъ трансцендентныхъ функцій, есть функція выраженная, весьма правильнымъ, безконечнымъ рядомъ:

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots \tag{1}$$

Этотъ рядъ для всякой величины перемѣннаго x имѣетъ конечную сумму, и поэтому называется *сходящійся*.

Если вмѣсто x поставимъ въ рядъ (1) z, то получимъ:

$$f(z)=1+z+\frac{z^2}{1\,.\,2}+\frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots \tag{2}$$

Если эти два ряда перемножимъ, то найдемъ, что:

$$f(x)\,.\,f(z)=1+(x+z)+\frac{(x+z)^2}{1\,.\,2}+\frac{(x+z)^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots=f(x+z)$$

слѣдовательно:

$$f(x)\,.\,f(z)=f(x+z) \tag{3}$$

Это первое свойство функціи $f(x)$, опредѣляемой рядомъ (1).

Изъ (3) слѣдуетъ:

$$f(x_1).f(x_2).f(x_3)\ldots f(x_n)=f(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n) \qquad (4)$$

полагая $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n=x$, найдемъ:

$$\left[f(x)\right]^n=f(nx) \qquad (5)$$

Если въ рядѣ (1) положимъ $x=1$, то:

$$f(1)=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots \qquad (6)$$

Сумма этого ряда, продолженная до безконечности, *больше* 2 и *меньше* 3, какъ это легко показать. Если это несоизмѣримое число означимъ чрезъ e, то:

$$f(1)=e$$

Если теперь въ (5) сдѣлаемъ $x=1$, то:

$$\left[f(1)\right]^n=e^n=f(n)$$

т. е. если x есть цѣлое число, то:

$$f(x)=e^x$$

Функція $f(x)$ имѣетъ то-же значеніе и при x дробномъ.

Сдѣлаемъ опять въ (5) $x=\frac{1}{n}$, то:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=f(1)=e$$

откуда:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=e^{\frac{1}{n}}$$

возвышая обѣ части этого уравненія въ m-ю степень, m число цѣлое, найдемъ:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m=e^{\frac{m}{n}}$$

но при m цѣломъ мы имѣемъ:

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m=f\left(\frac{m}{n}\right)$$

слѣдовательно:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=e^{\frac{m}{n}}$$

т. е. мы имѣемъ при всякомъ значеніи x:

$$f(x)=e^{x}$$

эта функція извѣстна въ Анализѣ подъ названіемъ *экспоненціальной*.

Итакъ мы имѣемъ:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{1.2}+\frac{x^{3}}{1.2.3}+\frac{x^{4}}{1.2.3.4}+\cdots \tag{7}$$

Если обобщимъ перемѣнное x, т. е. распространимъ предъидущее тождество и на мнимыя количества, замѣнивъ x чрезъ xi, то найдемъ:

$$e^{xi}=\left(1-\frac{x^{2}}{1.2}+\frac{x^{4}}{1.2.3.4}\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^{3}}{1.2.3}+\frac{x^{5}}{1.2.3.4.5}\cdots\right)$$

Два безконечные ряда:

$$1-\frac{x^{2}}{1.2}+\frac{x^{4}}{1.2.3.4}-\frac{x^{6}}{1.2.3.4.5.6}+\cdots \tag{8}$$

$$x-\frac{x^{3}}{1.2.3}+\frac{x^{5}}{1.2.3.4.5}-\frac{x^{7}}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots\cdots \tag{9}$$

опять для всякой величины перемѣннаго x будутъ имѣть сумму конечную, слѣдовательно суть непрерывныя функціи перемѣннаго x; означимъ первую изъ этихъ функцій чрезъ $\varphi_1(x)$, а вторую чрезъ $\varphi_2(x)$, мы будемъ имѣть.

$$e^{xi}=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$$

легко видѣть, что:

$$e^{-xi}=\varphi_1(x)-i\varphi_2(x)$$

Перемножая эти два равенства, найдемъ;

$$\varphi_1{}^{2}(x)+\varphi_2{}^{2}(x)=1 \tag{10}$$

Это первое основное свойство функцій выраженныхъ рядами (8) и (9).

Если возьмемъ двѣ функціи:

$$e^{xi}=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$$

$$e^{zi}=\varphi_1(z)+i\varphi_2(z)$$

и перемножимъ ихъ, то найдемъ:

$$e^{(x+z)i}=\varphi_1(x+z)+i\varphi_2(x+z)=\varphi_1(x).\varphi_1(z)-\varphi_2(x).\varphi_2(z)+$$
$$+i\left[\varphi_2(x)\varphi_1(z)+\varphi_1(x)\varphi_2(z)\right]$$

откуда:

$$\begin{aligned}\varphi_2(x+z)&=\varphi_2(x).\varphi_1(z)+\varphi_2(z).\varphi_1(x)\\ \varphi_1(x+z)&=\varphi_1(x).\varphi_1(z)-\varphi_2(x).\varphi_2(z)\end{aligned}\qquad(11)$$

Это второе свойство функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Легко также видѣть, что:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x-z)&=\varphi_1(x).\varphi_1(z)+\varphi_2(x).\varphi_2(z)\\ \varphi_2(x-z)&=\varphi_1(x).\varphi_2(z)-\varphi_2(x).\varphi_1(z)\end{aligned}\qquad(12)$$

Изъ опредѣленія функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ видно, что:

$$\varphi_1(-x)=\varphi_1(x)\ ,\ \varphi_2(-x)=-\varphi_2(x)\qquad(13)$$

и что:

$$\varphi_1(0)=1\qquad\varphi_2(0)=0\qquad(14)$$

Если въ функціи

$$\varphi_1(x)=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}\ldots\ldots$$

вмѣсто x поставимъ 2, то получимъ:

$$\varphi_1(2)=-\frac{1}{3}-\frac{2^6}{1.2.3.4.5.6}\left(1-\frac{2^2}{7.8}\right)-\frac{2^{10}}{1.2.3\ldots10}\left(1-\frac{2^2}{9.10}\right)-\ldots$$

Очевидно вторая часть есть величина отрицательная. Но $\varphi_1(0)=1$, а $\varphi_1(2)$ есть величина отрицательная, слѣдовательно существуетъ число между 0 и 2, которое обращаетъ $\varphi_1(x)$ въ нуль.

Означимъ это число чрезъ $\frac{\pi}{2}$, слѣдовательно:

$$\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Если $\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, то изъ уравненія (10) слѣдуетъ:

$$\varphi_2{}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

откуда:

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pm 1$$

Остается рѣшить будетъ-ли $\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=+1$ или -1?

Для этого рядъ (9) можно написать въ слѣдующей формѣ, поставивъ вмѣсто x выраженіе $\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_0^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}}{\Pi(4n+1)}\left[1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{(4n+2)(4n+3)}\right]$$

но:

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{(4n+2)(4n+3)}<1$$

откуда слѣдуетъ, что $\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ есть величина положительная, слѣдовательно:

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=+1$$

Число π трансцендентное, выражающее въ Геометріи отношеніе окружности къ діаметру.

Если выраженіе:

$$e^{x}=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$$

возвысить въ m-ю степень, то найдемъ:

$$e^{mx}=\left[\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)\right]^m=\varphi_1(mx)+i\varphi_2(mx) \qquad (15)$$

Функціи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ равны нулю и ± 1 для безконечнаго числа значеній перемѣннаго x, содержащихся въ формулѣ:

$$x=\frac{2n+1}{2}\cdot\pi$$

дѣлая $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots$

Въ самомъ дѣлѣ, сдѣлаемъ въ уравненіи (15) $x=\frac{\pi}{2}$, $m=2n+1$, то найдемъ:

$$\varphi_1\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right)+i\varphi_2\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right)=\left[\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2n+1}=(-1)^n\cdot i$$

откуда:

$$\varphi_1\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right)=0 \qquad \varphi_2\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right)=(-1)^n \tag{16}$$

Функціи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ равны ± 1 и нулю для безконечнаго числа значеній перемѣннаго x, содержащихся въ формулѣ $2n\pi$.

Если въ уравненіи (15) сдѣлаемъ $x=\frac{\pi}{2}$, $m=2n$, то найдемъ:

$$\varphi_1(n\pi)+i\varphi_2(n\pi)=\left[\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\varphi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2n}=(-1)^n$$

откуда:

$$\varphi_1(n\pi)=(-1)^n \qquad \varphi_2(n\pi)=0$$

Но всего замѣчательнѣе, что функціи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ періодическія, имѣющія періодомъ 2π. *Періодическими функціями* называются такія, которыя удовлетворяютъ условію:

$$f(x+a)=f(x)$$

т. е. функція $f(x)$ неизмѣняется, если x получаетъ приращеніе a, которое называется *періодомъ* функціи. Очевидно изъ предъидущаго условія, что

$$f(x\pm na)=f(x)$$

т. е. функція $f(x)$ неизмѣняется, если перемѣнное x получаетъ приращеніе na, гдѣ n есть цѣлое число.

Періодичность функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ вытекаетъ изъ уравненій (11) и (12). Полагая въ этихъ уравненіяхъ $z=2\pi$, найдемъ:

$$\varphi_1(x\pm 2\pi)=\varphi_1(x) \qquad \varphi_2(x\pm 2\pi)=\varphi_2(x)$$

откуда:

$$\varphi_1(x\pm 2n\pi)=\varphi_1(x) \qquad \varphi_2(x\pm 2n\pi)=\varphi_2(x)$$

легко видѣть также, что:

$$\varphi_1\left(x+\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right)=(-1)^{n+1}\cdot\varphi_2(x) \quad , \quad \varphi_2\left(x+\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right)=(-1)^n\cdot\varphi_1(x)$$

$$\varphi_1(x+n\pi)=(-1)^n\cdot\varphi_1(x) \quad , \quad \varphi_2(x+n\pi)=(-1)^n\cdot\varphi_2(x)$$

Изъ этихъ условій видимъ, что надобно знать числовое значеніе функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ для x отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, чтобы имѣть значенія для всѣхъ величинъ перемѣннаго x.

Изъ свойствъ функцій $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ видимъ, что эти функціи суть ничто иное, какъ извѣстныя тригонометрическія функціи $\operatorname{Cos} x$ и $\operatorname{Sin} x$.

Легко видѣть теперь, что экспоненціальная функція e^x есть также функція періодическая. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$e^{xi} = \text{Cos}\, x + i\, \text{Sin}\, x$$

откуда:

$$e^{(x+2\pi)i} = \text{Cos}\,(x+2\pi) + i\,\text{Sin}\,(x+2\pi) = \text{Cos}\, x + i\,\text{Sin}\, x = e^{xi}$$

слѣдовательно:

$$e^{xi+2\pi i} = e^{xi} \cdot e^{2\pi i} = e^{xi}$$

откуда:

$$e^{2\pi i} = 1$$

слѣдовательно:

$$e^{x+2\pi i} = e^{x}$$

или вообще:

$$e^{x \pm 2n\pi i} = e^{x}$$

т. е. періодъ функціи e^x есть $2\pi i$—мнимый.

Періодичность функцій $\text{Sin}\, x$ и $\text{Cos}\, x$ можно показать гораздо легче изъ ихъ выраженій, какъ произведенія безконечнаго числа множителей.

Для этого возьмемъ функцію:

$$\varphi(x) = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x}{m}\right)\times$$

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{x}{m}\right)$$

Легко показать, что при всякомъ значеніи перемѣннаго x и при $m = \infty$ это произведеніе имѣетъ конечную величину. Слѣдовательно функція $\varphi(x)$ вполнѣ опредѣленная и однозначная.

Изъ ея формы сейчасъ видно, что:

$$\varphi(x+1) = -\varphi(x)\,\frac{m+1+x}{m}$$

если $m = \infty$, то:

$$\varphi(x+1) = -\varphi(x)$$

откуда:

$$\varphi(x+2) = \varphi(x)$$

слѣдовательно наша функція періодическая и ея періодъ есть число 2.

Положимъ теперь $\varphi(x) = \operatorname{Sin}(\pi x)$, то такъ какъ $\operatorname{Sin} x$ уничтожается при $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\ldots\ldots$, мы имѣемъ:

$$\operatorname{Sin}\pi x = \pi x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\ldots\ldots$$

откуда видимъ, что:

$$\operatorname{Sin}(\pi x+\pi) = -\operatorname{Sin}(\pi x)$$

замѣщая πx чрезъ x, мы найдемъ:

$$\operatorname{Sin}(x+\pi) = -\operatorname{Sin} x$$

откуда:

$$\operatorname{Sin}(x+2\pi) = \operatorname{Sin} x$$

или вообще.

$$\operatorname{Sin}(x\pm 2n\pi) = \operatorname{Sin} x$$

гдѣ n есть цѣлое число.

Легко видѣть также, что функція:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\cdots$$

$$+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots$$

измѣняя x на $x+1$ неизмѣняется, т. е. она періодическая и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$\varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Такимъ образомъ мы алгебраическимъ путемъ можемъ изслѣдовать всѣ свойства тригонометрическихъ и экспоненціальныхъ функцій.

Этимъ тремъ функціямъ мы находимъ три обратныя.

Если положимъ:

$$e^{x} = y$$

то x есть функція отъ y, обратная экспоненціальной; ее обозначаютъ символомъ:

$$x = \log(y)$$

Но такъ какъ мы имѣемъ:

$$e^{x\pm 2n\pi i} = y$$

то:

$$\log(y) = x\pm 2n\pi i$$

т. е. обратная функція $\log(y)$, для каждаго значенія y, имѣетъ безчисленное множество значеній.

Точно также обратныя функціи функціямъ:

$$\operatorname{Sin} x = y \qquad , \qquad \operatorname{Cos} x = y$$

обозначаютъ символами

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{Sin} y \qquad\qquad x = \operatorname{arc} \operatorname{Cos} y$$

или какъ обозначаютъ англичане:

$$x = \operatorname{Sin}^{-1} y \qquad\qquad x = \operatorname{Cos}^{-1} y$$

здѣсь также мы имѣемъ,

$$\operatorname{Sin}(x \pm 2n\pi) = \operatorname{Sin} x = y \qquad\qquad \operatorname{Cos}(x \pm 2n\pi) = \operatorname{Cos} x = y$$

откуда:

$$\operatorname{Sin}^{-1} y = x \pm 2n\pi \qquad\qquad \operatorname{Cos}^{-1} y = x \pm 2n\pi$$

За этими слѣдуютъ функціи высшія трансцендентныя, которыя въ Анализѣ извѣстны подъ именемъ *эллиптическихъ*. Онѣ выражаются безконечными произведеніями и имѣютъ двойной періодъ.

Мы можемъ всегда дать періодической функціи какой угодно періодъ, такъ напримѣръ функціи:

$$\varphi(x) \,.\, \varphi(x-a) \,.\, \varphi(x-2a) \,.\, \varphi(x-3a) \ldots\ldots$$

$$.\, \varphi(x+a) \,.\, \varphi(x+2a) \,.\, \varphi(x+3a) \ldots\ldots$$

и

$$\varphi(x) + \varphi(x-a) + \varphi(x-2a) + \varphi(x-3a) + \ldots\ldots$$

$$+ (\varphi+a) + \varphi(x+2a) + \varphi(x+3a) + \ldots\ldots$$

имѣютъ періодъ a, одно условіе требуется: это сходимость произведенія или ряда. Если при этомъ сама функція $\varphi(x)$ будетъ періодическая, то мы получимъ функціи съ двумя періодами. Такова напримѣръ функція:

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} x} + \frac{1}{\operatorname{Sin}(x-a)} + \frac{1}{\operatorname{Sin}(x-2a)} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{Sin}(x+a)} + \frac{1}{\operatorname{Sin}(x+2a)} + \ldots$$

которая встрѣчается въ теоріи эллиптическихъ функцій. Этотъ рядъ очевидно сходящійся, если a будетъ количество мнимое, въ противномъ случаѣ рядъ будетъ расходящійся.

Можно, вмѣсто періодической функціи для образованія функціи съ двумя періодами взять или рядъ, или произведеніе дважды безконечные, таковы:

$$\sum \varphi(x+ma+nb)$$

гдѣ a и b суть періоды, а числа m и n могутъ получить всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Или же взять произведеніе:

$$\Pi . x\left[1+\frac{x}{ma+nb}\right]$$

числа m и n могутъ получать всевозможныя цѣлыя значенія, исключая одного значенія $m=0$ и $n=0$.

Анализъ показываетъ, что цѣлая періодическая функція $\varphi(x)$ въ произведеніи:

$$\varphi(x) . \varphi(x-a) . \varphi(x-2a) . \varphi(x-3a) \ldots\ldots$$

$$\varphi(x+a) . \varphi(x+2a) . \varphi(x+3a) \ldots\ldots$$

не можетъ дать двойной періодической функціи, но даетъ функціи, которыя составляютъ основаніе теоріи функцій, имѣющихъ два періода. Эти функціи извѣстны въ Анализѣ подъ именемъ *Тета функцій.*

Возьмемъ цѣлую функцію $\varphi(x)$, имѣющую періодъ $2K$ и возьмемъ функцію составленную изъ этой послѣдней:

$$\Phi(x)=\varphi(x+K'i) . \varphi(x+3K'i) . \varphi(x+5K'i) \ldots\ldots$$

$$\varphi(-x+K'i) . \varphi(-x+3K'i) . \varphi(-x+5K'i) \ldots\ldots$$

гдѣ K' есть нѣкоторое число, которое мы ниже опредѣлимъ.

Во первыхъ мы имѣемъ:

$$\Phi(x+2K)=\Phi(x)$$

а во вторыхъ:

$$\Phi(x+2K'i)=\Phi(x) . \frac{\varphi(-x-K'i)}{\varphi(x+K'i)}$$

Такъ какъ $\varphi(x)$ есть цѣлая функція, имѣющая періодъ $2K$, то мы можемъ положить:

$$\varphi(x)=1-e^{\frac{\pi x i}{K}}$$

что даетъ:

$$\frac{\varphi(-x-K'i)}{\varphi(x+K'i)} = e^{-\frac{\pi i}{K}(x+K'i)}$$

полагая:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

найдемъ:

$$\varphi\left[x+(2m+1)K'i\right].\varphi\left[-x+(2m+1)K'i\right] = 1-2q^{2m+1}\operatorname{Cos}\frac{\pi x}{K}+q^{4m+2}$$

откуда:

$$\Phi(x) = \left[1-2q\operatorname{Cos}\frac{\pi x}{K}+q^2\right]\left[1-2q^3\operatorname{Cos}\frac{\pi x}{K}+q^6\right]\left[1-2q^5\operatorname{Cos}\frac{\pi x}{K}+q^{10}\right]\ldots$$

Умножая обѣ части на постоянный множитель A и полагая:

$$\Theta(x) = A\,.\,\Phi(x)$$

или измѣняя x на $\frac{2Kx}{\pi}$, найдемъ:

$$\Theta\left[\frac{2Kx}{\pi}\right] = A(1-2q\operatorname{Cos}2x+q^2)(1-2q^3\operatorname{Cos}2x+q^6)(1-2q^5\operatorname{Cos}2x+q^{10})\ldots..$$

Это первая изъ функцій, служащая основаніемъ теоріи функцій съ двумя періодами; онѣ имѣютъ слѣдующія свойства:

$$\Theta(x+2K) = \Theta(x)$$

$$\Theta(x+2K'i) = -\Theta(x)\,.\,e^{-\frac{\pi i}{K}(x+K'i)}$$

Положимъ еще:

$$\mathrm{H}(x) = -i\Theta(x+K'i)e^{\frac{\pi i}{4K}(2x+K'i)}$$

Легко видѣть, что эта функція удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ:

$$\mathrm{H}(x+2K) = -\mathrm{H}(x)$$

$$\mathrm{H}(x+2K'i) = -\mathrm{H}(x)\,.\,e^{-\frac{\pi i}{K}(x+K'i)}$$

или

$$\mathrm{H}\left[\frac{2Kx}{\pi}\right] =$$

$$= A\,.\,2\sqrt[4]{q}\operatorname{Sin}x(1-2q^2\operatorname{Cos}2x+q^4)(1-2q^4\operatorname{Cos}2x+q^8)(1-2q^6\operatorname{Cos}2x+q^{12})\ldots$$

это вторая функція служащая основаніемъ теоріи функцій съ двойнымъ періодомъ.

Раздѣляя функцію $H(x)$ на $\Theta(x)$ мы получимъ функцію съ двумя періодами; и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ.

$$\frac{H(x+2K)}{\Theta(x+2K)}=-\frac{H(x)}{\Theta(x)}$$

$$\frac{H(x+4K)}{\Theta(x+4K)}=\frac{H(x)}{\Theta(x)}$$

$$\frac{H(x+2K'i)}{\Theta(x+2K'i)}=\frac{H(x)}{\Theta(x)}$$

откуда видимъ, что функція $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$ имѣетъ два періода: одинъ дѣйствительный $4K$, а другой мнимый $2K'i$.

Второй періодъ является вслѣдствіе того факта, что функціи $\Theta(x)$ и $H(x)$, когда x получаетъ приращеніе $2K'i$ получаютъ общаго множителя— $e^{\frac{\pi i}{K}(x+K'i)}$, который при дѣленіи изчезаетъ.

Сдѣлаемъ еще:

$$\Theta_1(x)=\Theta(x+K)$$

$$H_1(x)=H(x+K)$$

то есть:

$$\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=A(1+2q\,\mathrm{Cos}\,2x+q^2)(1+2q^3\,\mathrm{Cos}\,2x+q^6)(1+2q^5\,\mathrm{Cos}\,2x+q^{10})\ldots.$$

$$H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=$$

$$=A\,.\,2\sqrt[4]{q}\,\mathrm{Cos}\,x(1+2q^2\,\mathrm{Cos}\,2x+q^4)(1+2q^4\,\mathrm{Cos}\,2x+q^8)(1+2q^6\,\mathrm{Cos}\,2x+q^{12})\ldots$$

Эти двѣ новыя функціи даютъ слѣдующія зависимости:

$$\Theta_1(x+2K)=\Theta_1(x)$$

$$\Theta_1(x+2K'i)=\Theta_1(x)\,.\,e^{-\frac{\pi i}{K}(x+K'i)}$$

$$H_1(x+2K)=-H(x)$$

$$H_1(x+2K'i)=H_1(x)\,.\,e^{-\frac{\pi i}{K}(x+K'i)}$$

откуда видно, что функціи:

$$\frac{H_1(x)}{\Theta(x)}\,,\quad\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}$$

имѣютъ также два періода. Эти функціи относительно функціи:

$$\mathrm{H}(x)$$
$$\Theta(x)$$

почти тоже, что $\mathrm{Cos}\,(x)$ относительно $\mathrm{Sin}\,(x)$. Эти три функціи съ двумя періодами извѣстны въ Анализѣ подъ именемъ *эллиптическихъ*.

За этими функціями слѣдуютъ еще высшія трансцендентныя, которыя въ Анализѣ извѣстны подъ именемъ *ультра-эллиптическихъ функцій*.

На этомъ мы и остановимся, показавъ какимъ образомъ, чисто алгебраическимъ путемъ, можно образовать всѣ извѣстныя функціи въ Анализѣ, которыхъ историческое происхожденіе, по большей части, какъ увидимъ, было геометрическое.

Изложивъ, такимъ образомъ, развитіе Алгебры прослѣдимъ теперь ея историческое развитіе съ самыхъ древнихъ временъ и при этомъ пополнимъ недосказанное, въ предъидущихъ главахъ, о развитіи Геометріи у египтянъ, китайцевъ и индусовъ.

При началѣ печатанія настоящаго сочиненія многихъ источниковъ мы не имѣли подъ рукой, въ виду ихъ рѣдкости и трудности достать. Въ настоящее время причина эта въ значительной степени устранена.

Халдеи.

Страна лежащая въ области рѣкъ Тигра и Евфрата, извѣстная нынѣ подъ именемъ Месопотаміи, издавна обращала на себя вниманіе ученыхъ. Въ этой странѣ за много столѣтій до Р. Х. процвѣтали государства достигшія высокой степени умственной культуры и могущества *). Есть много основаній предполагать, что здѣсь именно возникли первыя государства, болѣе или менѣе правильно организованныя; подтвержденіе этому отчасти можетъ служить библейскій разсказъ, по которому въ этой странѣ впервые появился человѣкъ **).

*) Желающихъ познакомиться съ древней исторіей Востока мы отсылаемъ къ прекраснымъ сочиненіямъ, вышедшимъ въ послѣднее время, во Франціи и Англіи. Въ сочиненіяхъ этихъ можно найти множество данныхъ, указывающихъ на состояніе наукъ, искусствъ и образованности въ древней Халдеѣ. Изъ такихъ сочиненій укажемъ слѣдующія: *Lenormant*, Manuel d'histoire ancienne de l'Orient. T. I—III. Paris 1869. in-8. *Maspero*, Histoire ancienne des peuples de l'Orient 1876. Paris. in-8. *G. Rawlinson*, The five great Monarchies of the ancient eastern world. T. I—IV. London. 1862—66. in-8. Укажемъ еще на прекрасную статью *Сэйса*, переведенную на русскій языкъ, подъ заглавіемъ „Ассиро-Вавилонская литература“ 1879. Спб. in-8.

Въ послѣднее двадцатилѣтіе въ особенности много стали заниматься древней исторіей Востока и изученіемъ находимыхъ памятниковъ. Возникла цѣлая наука—*ассиріологія*. Почти на всѣхъ главнѣйшихъ европейскихъ языкахъ выходятъ въ настоящее время спеціальные журналы, предметъ которыхъ ассиріологія.

**) Еще въ глубокой древности между народами западной Азіи сохранялось преданіе о первоначальной ихъ родинѣ, на которой жили ихъ предки прежде чѣмъ разсѣятся. Это была высокая гора, четыреугольной формы, какъ бы висящая между небомъ и землей. Изъ средины выходила рѣка, развѣтвлявшаяся на четыре рукава, которые текли въ четыре различныя стороны. Здѣсь именно былъ по ихъ мнѣнію „пупъ земли“ и колыбель человѣчества. Различные народы мѣсто это видѣли въ различныхъ частяхъ обширнаго материка Азіи. Только въ новѣйшее время удалось опредѣлить болѣе точно это мѣсто, на основаніи географическихъ данныхъ, удовлетворяющихъ описанію мѣстности. Мѣсто это полагаютъ находилось въ горахъ Болоръ-Тага, не далеко отъ того мѣста гдѣ эта цѣпь соединяется съ Гималайскимъ хребтомъ, т. е. на Памирскомъ плато, откуда текутъ четыре рѣки: Индъ, Гелмендъ,

Хотя еще въ глубокой древности господствовало мнѣніе, что наука чиселъ и астрономія получили свое начало у халдеевъ *), но только въ послѣднее двадцатилѣтіе были отысканы памятники, на основаніи которыхъ можно себѣ составить нѣкоторое понятие о математическихъ и астрономическихъ познаніяхъ жителей древней Ассиріи и Вавилоніи.

Первый значительный шагъ къ знакомству съ ассирійской и вавилонской литературой былъ сдѣланъ Лэйардомъ, который въ 1849—51 годахъ открылъ развалины Ниневіи и произвелъ тамъ раскопки **). Раскопки эти при

Оксусъ и Яксартъ. Съ теченіемъ времени различные народы, смотря по мѣсту гдѣ они жили, первоначальную свою родину искали въ различныхъ странахъ. По мнѣнію однихъ Еденъ находился на Араратѣ, по мнѣнію другихъ —на берегу Каспійскаго моря или во Фригіи и т. п.

*) Многіе изъ писателей древности упоминаютъ о математическихъ познаніяхъ халдеевъ. Такъ напримѣръ еврейскій историкъ *Іосифъ* (37—100 г. по Р. Х.), въ своемъ сочиненіи „Іудейскія Древности", говоритъ, что Авраамъ первый познакомилъ египтянъ съ Ариеметикой и Астрономіей, которыя были имъ заимствованы у халдеевъ. *Теонъ Смирнскій*, жившій во II в., говоритъ „египтяне при изслѣдованіи вопросовъ, относящихся къ движенію свѣтилъ, рѣшали ихъ графически, при посредствѣ построеній, халдеи-же подобные вопросы рѣшали вычисленіями; отъ этихъ двухъ народовъ заимствовали греческіе астрономы свои познанія". *Порфирій*, жившій въ III в., говоритъ „съ древнѣйшихъ временъ египтяне занимались Геометріей, финикіяне—числами и вычисленіями, халдеи же занимались вопросами относящимися къ явленіямъ неба". По словамъ *Страбона* наука чиселъ получила свое начало въ Финикіи.

Впрочемъ необходимо замѣтить, что различные писатели древности различнымъ образомъ передаютъ о первоначальномъ возникновеніи математическихъ наукъ. Такъ напримѣръ Платонъ, говоритъ, что онъ слыхалъ, что числа, вычисленія, Геометрія и астрономія впервые были изобрѣтены египетскимъ богомъ Тотомъ. Аристотель начало всѣхъ математическихъ наукъ полагаетъ въ Египтѣ, гдѣ онѣ были достояніемъ жрецовъ. Діогенъ Лаэртскій также передаетъ, что египтяне себѣ приписываютъ нахожденіе способовъ измѣрять поля, а также изобрѣтеніе ариеметики и астрономіи.

Первоначальное происхожденіе математическихъ наукъ вообще было предметомъ множества, иногда самыхъ превратныхъ, разсказовъ. Подобные разсказы передавались не только въ древности, но и гораздо позже. Такъ напримѣръ византійскій историкъ *Цецесъ*, жившій въ срединѣ XI в., считаетъ Феникса, внука Нептуна, авторомъ перваго сочиненія по философіи чиселъ (περὶ τὴν ἀριθμητικὴν φιλοσοφίαν), написаннымъ на финикійскомъ языкѣ.

**) Честь открытія развалинъ Ниневіи принадлежитъ французскому консулу въ Мосулѣ Эмилю Ботта, который первый, производя раскопки въ окрестностяхъ Мосула, открылъ въ мартѣ мѣсяцѣ 1843 г. развалины древней Ниневіи. Результаты своихъ открытій Ботта обнародовалъ въ сочиненіи: Monument de Ninive, découvert et décrit par Botta, mesuré et dessiné par Flandin. 5 vol. Paris. 1843—50. in-fol.

Открытія свои Лэйардъ напечаталъ въ слѣдующихъ сочиненіяхъ: Monuments of Nineveh, London, 1851. in-fol. Monuments of Nineveh, second series; London, 1853 in-fol. Nineveh and its remains, London, 1851, 2 vol. Discoveries in the ruins of Nineveh and Babylon with travels in Armenia, Kurdistan and the desert; London, 1853

вели къ открытію дворца Сарданапала *) въ одной изъ залъ котораго была найдена цѣлая библіотека, состоящая изъ квадратныхъ плитокъ, изъ обожженной глины, покрытыхъ мелкимъ и сжатымъ клинообразнымъ письмомъ **). Плитки эти были доставлены въ Британскій Музей и къ ихъ чтенію и разбору немедленно приступили ассиріологи Смитъ (Smith) и Коксъ (Cox) ***). Изслѣдованія ихъ впервые пролили нѣкоторый свѣтъ на состояніе наукъ въ древней Ассиріи и Вавилоніи. Плитки, найденныя Лайардомъ, заключали отрывки цѣлыхъ сочиненій по грамматикѣ, исторіи, законовѣдѣнію, миѳологіи, естествовѣдѣнію, астрологіи, астрономіи и ариѳметикѣ. Къ сожалѣнію большая часть изъ этихъ сочиненій дошли до насъ только въ незначительныхъ отрывкахъ.

Дальнѣйшія открытія и изслѣдованія показали, что большая часть найденныхъ сочиненій были переводы съ аккадскаго языка, на которомъ

Много интересныхъ открытій въ древней Вавилоніи и Ассиріи было сдѣлано экспедиціей, снаряженною въ Месопотамію въ 1863 г., подъ руководствомъ извѣстнаго ассиріолога Жюля Оппера. Труды этой экспедиціи напечатаны въ сочиненіи: Expédition en Mésopotamie. Paris.

*) Сарданапалъ или иначе Ассурбанипалъ IV, послѣдній изъ завоевателей ассирійскихъ, жилъ въ VII в. до Р. Х. (667—647 г.).

**) Клинообразное письмо первоначальнымъ своимъ происхожденіемъ обязано такимъ же іероглифамъ, какъ египетскіе. Съ теченіемъ времени знаки эти все болѣе и болѣе теряли свою первоначальную форму и наконецъ приняли видъ клинообразныхъ знаковъ. Плиній, въ своей „Естественной исторіи" упоминаетъ объ обычаѣ халдейскихъ ученыхъ записывать свои наблюденія на глиняныхъ кирпичикахъ, называя ихъ при этомъ *coctiles laterculi*. Хотя существованіе клинообразныхъ надписей было уже давно извѣстно въ Европѣ, но многіе долгое время считали ихъ просто за архитектурныя украшенія. Первый обратившій должное вниманіе на клинообразные знаки былъ датскій путешественникъ Карстенъ Нибуръ, посѣтившій развалины Персеполя въ 1765 г. Онъ опредѣлилъ 12 различныхъ знаковъ, но прочитать надписи не съумѣлъ, хотя до него было уже высказано предположеніе, въ 1621 г., итальянцемъ Пьетро де-ла-Валле, что клинообразное письмо слѣдуетъ читать слѣва направо. Изслѣдованія Нибура продолжали другіе ученые но безуспѣшно и только въ 1802 г. Гротефенду удалось прочитать нѣкоторыя изъ надписей и тѣмъ положить прочное основаніе дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ. Наконецъ только въ 1840-хъ годахъ были опредѣлены всѣ 34 буквы первой системы клинообразныхъ надписей. Изъ другихъ ученыхъ, занимавшихся чтеніемъ клинообразныхъ надписей, упомянемъ имена: Раска, Бюрнуфа, Лассена, Гинкса, Фокса, Тальбота и Генри Раулинсона.

Исторію чтенія клинообразныхъ письменъ можно найти въ статьѣ [illegible] „Вавилоно-ассирійскія клинообразныя надписи. Исторія чтенія ихъ и ихъ историческое значеніе", помѣщенной въ Журналѣ Мин. Народ. Просв. за 1870 г. Часть 188.

***) Чтеніе глиняныхъ табличекъ представляетъ еще много затрудненій по малости размѣровъ знаковъ и самихъ табличекъ. Таблицы „квадратовъ и кубовъ чиселъ", найденныя въ Сенкерѣ, имѣютъ не болѣе 15 миллиметровъ въ длину и въ ширину. Всѣ глиняныя таблички имѣютъ квадратную форму.

перестали говорить еще въ XVII вѣкѣ до Р. Х. Жители первоначальной Халдеи, или какъ ее тогда называли „страна Сумира и Аккада“ *), оказали большое вліяніе на все послѣдующее развитіе наукъ и искусствъ въ западной Азіи. Послѣдующая ассирійская литература заключалась почти только въ переводахъ древнихъ аккадскихъ оригиналовъ **).

*) Названіе Аккадіяне значитъ *горцы*. Въ настоящее время полагаютъ, что они спустились съ горъ Элама и покорили *болѣе мирныя*, родственныя имъ племена. Отъ сліянія аккадіянъ и сумиріянъ произошли халдеи.

**) Первоначальная исторія древней Халдеи состоитъ изъ баснословныхъ легендъ. На основаніи сохранившихся отрывковъ изъ сочиненія Бероза и другихъ остатковъ ассирійской литературы въ настоящее время удалось возсоздать нѣкоторые изъ эпизодовъ такихъ легендъ. По словамъ Бероза: „въ Вавилоніи первоначально жило множество людей, различныхъ расъ, колонизовавшихъ Халдею. Люди эти жили на подобіе звѣрей, не подчиняясь никакимъ законамъ. Въ первомъ же году появилось животное, одаренное разумомъ, которое вышло изъ Эритрейскаго моря, въ томъ мѣстѣ гдѣ оно соприкасается съ Вавилоніей. Животное это носило названіе *Оаннесъ* (Oannes). Видомъ своего тѣла оно походило на рыбу, но подъ головой рыбы находилась голова человѣка; изъ хвоста выходили ноги человѣка. Голосъ оно имѣло человѣческій и его изображеніе сохраняется до сихъ поръ. Цѣлый день животное это проводило среди людей, не принимая никакой пищи, оно учило ихъ письму, различнымъ наукамъ и искусствамъ, правиламъ построенія городовъ и храмовъ, началамъ измѣренія и распредѣленія земель; указывало какъ сѣять и собирать жатвы. Однимъ словомъ оно учило людей всему тому, что способствуетъ удобствамъ жизни. Съ этихъ поръ ничего хорошаго не было выдумано. Съ наступленіемъ заката солнца этотъ чудовищный Оаннесъ снова погружался въ море и проводилъ ночь подъ водою, такъ какъ онъ былъ земноводный. Онъ написалъ книгу о происхожденіи предметовъ и цивилизаціи, которую онъ передалъ людямъ“.

За этимъ слѣдуетъ длинный промежутокъ времени до появленія миѳической династіи. Первый изъ царей этой династіи былъ Алоросъ, царствовавшій 10 саросовъ, т. е. 36000 лѣтъ. Всѣхъ царей династія эта насчитываетъ *десять*, которые царствовали 120 саросовъ лѣтъ. Во время послѣдняго изъ этихъ царей Ксисутра случился потопъ. Такимъ образомъ отъ начала царствованія Алороса до потопа прошло 432000 лѣтъ. Послѣ потопа, по словамъ Бероза, начинаетъ царствовать первая династія собственно людей. Династія эта насчитываетъ 86 государей, правившихъ 34080 лѣтъ.

Новѣйшіе писатели и ученые десяти баснословнымъ правителямъ древней Халдеи придаютъ астрономическій характеръ и полагаютъ, что они суть ничто иное какъ олицетвореніе десяти знаковъ зодіака. Подтвержденіе этого они находятъ въ именахъ двухъ первыхъ правителей Халдеи—Алороса и Алапаруса, въ которыхъ нѣкоторые ассиріологи видятъ халдейскія названія *ail-ur*, т. е. „овенъ свѣта“ и *alap-ur*, т. е. „телецъ свѣта“. Названія эти, какъ извѣстно, принадлежатъ также двумъ изъ двѣнадцати знаковъ зодіака.

По мнѣнію ученыхъ періодъ въ 432000 лѣтъ есть часть большаго астрономическаго цикла, составленнаго изъ 12 разъ взятаго періода въ 43200 лѣтъ. Такой періодъ дѣйствительно существовалъ у древнихъ халдеевъ. Нѣкоторые ученые полагаютъ, что періодъ въ 43200 лѣтъ, состоящій изъ 12 равныхъ частей, по 3600 лѣтъ каждая, считался халдейскими астрономами временемъ, въ которое солнце, или вся сфера небесная, дѣлаютъ одно изъ своихъ спеціальныхъ обращеній. Нельзя необратить вниманія еще на то обстоятельство, что

Уже въ глубокой древности въ Халдеѣ были устроены правильно организованныя библіотеки изъ нихъ наидревнѣйшая была въ городѣ Сенкере,

астрономическій циклъ въ 43200 лѣтъ былъ извѣстенъ также китайцамъ и индусамъ уже въ глубокой древности.

Относительно возникновенія астрономическаго цикла въ 43200 лѣтъ Ленорманъ сдѣлалъ слѣдующую остроумную гипотезу. По его предположенію періодъ въ 43200 лѣтъ есть ничто иное, какъ тотъ промежутокъ времени, по истеченіи котораго точки весенняго равноденствія снова возвратятся къ своему первоначальному положенію. Хотя открытіе предваренія равноденствія приписываютъ Гиппарху, но весьма вѣроятно, что явленіе это было уже замѣчено халдейскими астрономами. По мнѣнію Опперта великій греческій астрологъ многія изъ своихъ познаній заимствовалъ у халдеевъ. По наблюденіямъ Гиппарха долготы звѣздъ ежегодно возрастаютъ на 56". Въ дѣйствительности же онѣ возрастаютъ на 50". Если принять 56" за ежегодное возрастаніе долготъ, то точки весенняго равноденствія вслѣдствіе предваренія равноденствія, придутъ въ свое первоначальное положеніе чрезъ 26000 лѣтъ. Полагая, что халдейскіе астрономы при тогдашнихъ несовершенныхъ пріемахъ наблюденій, ежегодное возрастаніе долготъ принимали равнымъ 30", то найдемъ, что періодъ времени, чрезъ который точки весенняго равноденствія возвратятся въ свое первоначальное положеніе, именно и выразится числомъ 43200 лѣтъ.

По предположенію Моверса (Movers) періодъ въ 432000 есть $^{10}/_{12}$ большаго астрономическаго періода въ 518000 лѣтъ, протекшаго отъ сотворенія міра до потопа, но Ленорманъ справедливо предполагаетъ что такое мнѣніе ни на чемъ не основано и что съ большей вѣроятностью можно думать, что халдеи отъ сотворенія міра до начала царствованія десяти царей, насчитываютъ періодъ времени въ 259200 лѣтъ, что составляетъ половину полнаго періода въ 518000 лѣтъ или 6 разъ періодъ въ 43200 лѣтъ. Принявъ послѣднее число видно, что сотвореніе міра имѣло мѣсто при вступленіи солнца въ „знакъ вѣсовъ“ зодіака, т. е. во время осенняго равноденствія; такое мнѣніе подтверждаетъ воззрѣнія евреевъ, халдеевъ и другихъ народовъ Востока, предполагавшихъ уже въ глубокой древности, что міръ былъ сотворенъ во время осенняго равноденствія.

Если принять гипотезу, предложенную Ленорманомъ для объясненія цикла въ 43200 лѣтъ, то все таки еще остается необъясненнымъ почему именно 10 такихъ періодовъ халдеи насчитываютъ отъ сотворенія міра до потопа?

Мы уже выше упомянули, что подобный циклъ существовалъ у индусовъ и китайцевъ. По мнѣнію Леона де Росни (Leon de Rosny), всѣ эти циклы въ основаніи которыхъ положено число 60, получили первоначальное происхожденіе въ Туранѣ, и оттуда уже перешли на Западъ и на Востокъ, т. е. въ Ассирію и Китай. Въ индусской космогоніи циклы въ 60 и 3600 лѣтъ составляли періодъ лѣтъ, названный ими *юга* Вакпати (Vâkpati). Періодъ въ 216000 лѣтъ составлялъ *югу* Праджапати (Pradjâpati); и наконецъ періодъ вдвое большій предъидущаго, т. е. въ 432000 составлялъ такъ называемую *Калиюгу* (Kalijuga). Періодъ этотъ равенъ именно тому періоду лѣтъ, который по словамъ Бероза прошелъ отъ сотворенія міра до потопа.

Время слѣдующее за потопомъ отведено цѣлому поколѣнію героевъ, подвиги которыхъ составляютъ предметъ цѣлаго ряда сказаній и героическихъ поэмъ. Изъ числа этихъ героевъ особенно любили восхвалять поэты и писатели Издубара, котораго Дж. Смитъ отождествляетъ съ Немродомъ. Похожденія Издубара составляютъ предметъ обширной вавилонской героической поэмы, заключающей также сказаніе о потопѣ и ковчегѣ. Весьма интересно то,

нынѣшнимъ Ларсѣ; также пользовались извѣстностью библіотеки въ Урѣ, столицѣ первой халдейской монархіи, Эрехѣ, Кутѣ и Агане *). Самая знаменитая изъ библіотекъ была находившаяся въ Агане; начало этой библіотекѣ было положено, какъ полагаютъ, Саргономъ I, въ XVII вѣкѣ до Р. Х. Для этой библіотеки было составлено обширное сочиненіе по астрономіи и астрологіи, въ 72-хъ книгахъ; сочиненіе это, полагаютъ, было переведено на греческій языкъ халдейскимъ жрецомъ Берозомъ **), жившимъ около 280 г. до Р. Х. Къ этому сочиненію были также присоединены сочиненія и наблюденія предшествовавшихъ столѣтій. Сочиненіе это было озаглавлено „Наблюденія Бэла". Въ Британскомъ Музеѣ находится много изданій этого сочиненія, по которымъ можно видѣть, что подлинный текстъ съ котораго переписывали, былъ очень древній, такъ какъ безпрестанно попадаются слова „стерто" или „пробѣлъ". Содержаніе этого сочиненія показываетъ, что большая часть его имѣла чисто астрологическій характеръ ***), хотя нѣко-

---

что поэма эта состоитъ изъ двѣнадцати книгъ, расположенныхъ согласно опредѣленному астрономическому принципу, такъ что каждая книга соотвѣтствуетъ извѣстному знаку зодіака и извѣстному мѣсяцу аккадскаго календаря. Исторія потопа составляетъ эпизодъ II-й книги, которая соотвѣтствуетъ „знаку водолея" и „дождливому мѣсяцу" аккадскаго календаря.

Издубаръ принадлежитъ къ числу солнечныхъ героевъ. Онъ есть первообразъ греческаго Геркулеса, двѣнадцать подвиговъ котораго суть повтореніе двѣнадцати подвиговъ Издубара.

Относительно времени происхожденія этихъ героическихъ поэмъ ничего неизвѣстно, но безъ сомнѣнія онѣ составлены въ весьма отдаленное время. Легенды эти были, по мнѣнію Сэйса, уже въ половину забыты во время Авраама и государей, правившихъ въ Урѣ. Съ вѣроятностью можно предполагать, что легенды эти возникли за 4000 лѣтъ до Р. Х., если не раньше.

Хотя сказанное нами не имѣетъ прямаго отношенія къ предмету настоящаго сочиненія, но тѣмъ не менѣе мы считали не безынтереснымъ указать и обратить вниманіе читателей на астрономическій характеръ древнихъ халдейскихъ историческихъ легендъ и поэмъ.

*) Городъ Агане былъ извѣстенъ также подъ именемъ Сипары, что значитъ „городъ книги". По словамъ Бероза въ Пантибиблѣ, т. е. Сипарѣ, Ксисутръ зарылъ книги во время потопа. Ксисутръ это халдейскій Ной.

**) Берозъ написалъ сочиненіе „Исторія Вавилоніи и Халдеи", но къ сожалѣнію сочиненіе это до насъ не дошло. Отрывки изъ него сохранилъ намъ еврейскій историкъ Іосифъ. Сохранившіеся отрывки изъ сочиненій Бероза собраны во II-мъ томѣ „Fragmenta historicorum graecorum". Къ этимъ отрывкамъ Ленорманъ написалъ весьма интересные комментаріи, озаглавленные „Essai de commentaire des fragments cosmogoniques de Bérose. Paris, 1871. in-8°".

***) Въ древности весьма часто названіе *халдей* употребляли какъ синонимъ слова *астрологъ*. Вслѣдствіе этого нерѣдко, въ сочиненіяхъ различныхъ древнихъ писателей, нельзя положительно сказать о комъ именно идетъ рѣчь: объ астрологахъ, или же о народѣ. На такое недоразумѣніе обратилъ вниманіе еще Цицеронъ (Divin. I, 4), который употребляя названіе *халдеи*, считаетъ долгомъ упомянуть, что онъ слово это употребилъ въ смыслѣ *народа*, а не *занятія* (non ex artis, sed ex gentis vocabulo).

торые отдѣлы въ немъ изложены и болѣе научнымъ образомъ. Изъ главъ этого сочиненія особеннаго вниманія заслуживаютъ: глава о соединеніи солнца и луны, другая — о кометахъ, или какъ ихъ называли, „звѣзды съ короною впереди и съ хвостомъ назади“, третья — о движеніи Венеры и четвертая — о полярной звѣздѣ. Огромное число отмѣченныхъ затмѣній и умѣніе ихъ предсказывать достаточно показываютъ продолжительность времени, въ теченіи котораго производились наблюденія. Уже въ глубокой древности аккадіанамъ было извѣстно, что лунныя затмѣнія повторяются чрезъ каждые 223 лунныхъ мѣсяца *); они также пытались подмѣтить связь между состояніемъ погоды и перемѣнами фазъ луны; ими были вычислены таблицы восходовъ Венеры, Юпитера, Марса и фазовъ луны; составлены каталоги звѣздъ; умѣли вычислять солнечныя затмѣнія и есть нѣкоторыя основанія предполагать, что они пытались вычислять ихъ наступленіе при помощи набрасыванія тѣни на шаръ. Наступленіе лунныхъ затмѣній считали предвѣстникомъ дурныхъ событій и существовали заклинанія **) и молитвы для предупрежденія дурныхъ послѣдствій. Напротивъ солнечныя затмѣнія считали очень хорошимъ признакомъ. Особенно хорошимъ предзнаменованіемъ считали появленіе частнаго солнечнаго затмѣнія. Раздѣленіе эклиптики на двѣнадцать частей и по видимому самые знаки зодіака получили свое начало у древнихъ халдеевъ ***). Много тонкихъ явленій не ускользнули отъ внима-

*) Періодъ времени въ 223 лунныхъ мѣсяца, или въ 18 лѣтъ, былъ извѣстенъ подъ именемъ *сароса* (saros); названіе это производятъ отъ халдейскаго слова *sahara* — луна. Періодъ этотъ былъ извѣстенъ Ѳалесу и нѣкоторымъ другимъ греческимъ философамъ.

**) Слова нѣкоторыхъ заклинаній, бывшихъ въ употребленіи въ Средніе Вѣка суть ничто иное какъ древніе халдейскіе слова. Такъ напр. извѣстное средневѣковое заклинаніе: *hilka, hilka, beka, besa*, по ассирійски значитъ *горный, горный, злой, злой*.

***) Вопросъ о происхожденіи зодіака занималъ многихъ ученыхъ. Нѣкоторые утверждали, въ томъ числѣ извѣстный филологъ Шлегель (A. W. Schlegel), что знаки зодіака получили свое начало въ Индостанѣ а потомъ уже перешли къ другимъ народамъ. Другіе, изобрѣтеніе зодіака приписывали египтянамъ, китайцамъ и др. народамъ. Но уже Летронъ высказалъ мнѣніе, что система зодіака положительно халдейскаго происхожденія; знаки же зодіака онъ полагаетъ греческаго происхожденія. Мнѣніе это подтвердилось въ настоящее время, когда были отысканы нѣкоторыя изъ астрономическихъ сочиненій древнихъ халдеевъ. Предположенія свои Летронъ высказалъ въ интересной статьѣ, помѣщенной въ Journal des Savants за 1839 г. Статья эта заключаетъ разборъ мемуара. *Ideler*, Ueber der Ursprung des Thierkreises.

Въ настоящее время знаки зодіака найдены на многихъ глиняныхъ цилиндрахъ и призмахъ, которые клали въ фундаменты зданій, при ихъ постройкѣ. На извѣстномъ „камнѣ Мишо“ (Caillou Michaux) Ленорманъ отыскалъ четыре знака зодіака, именно: козерога, стрѣльца, водолея и скорпіона. Одинъ только „знакъ вѣсовъ“ греческаго происхожденія, онъ былъ введенъ во II в. до Р. Х. Евдоксъ, Автоликъ, Аратусъ, Архимедъ и Гиппархъ называли его „клешни скорпіона“. Настоящее названіе зодіака на халдейскомъ языкѣ неизвѣстно;

нія халдейскихъ астрономовъ, такъ напримѣръ въ ихъ сочиненіи мы впервые находимъ наблюденіе солнечныхъ пятенъ. Есть даже основанія предполагать, что халдейскимъ астрономамъ были извѣстны приборы, замѣняющіе зрительныя трубы. Чечевицеобразное стекло, найденное Лэйардомъ въ Ниневіи можетъ служить отчасти подтвержденіемъ сказаннаго. Изъ другихъ дошедшихъ до насъ памятниковъ, указывающихъ состояніе астрономіи въ аккадскій періодъ, укажемъ еще таблицу съ лунными долготами, хранящуюся нынѣ въ Британскомъ Музеѣ.

Къ сожалѣнію, необходимо замѣтить, что „Наблюденія Бэла“ служили болѣе для гаданій и предсказыванія, чѣмъ для рѣшенія астрономическихъ вопросовъ. Ни у одного народа небыло столько предразсудковъ, примѣтъ и суевѣрія, какъ у древнихъ халдеевъ. У нихъ существовало твердое убѣжденіе, что событіе, слѣдовавшее за какимъ нибудь явленіемъ должно непремѣнно повториться при возобновленіи того-же самаго явленія. Появленіе кометъ напр. они считали предвѣстницей различныхъ событій *). Научный

по мнѣнію Ленормана онъ носилъ названіе *asu*. На нѣкоторыхъ табличкахъ, религіознаго содержанія его называютъ „путь солнца“ (harrano), откуда произошло названіе „господь зодіака (Bel harrana)“, даваемое халдеями нѣкоторымъ изъ своихъ боговъ.

Весьма вѣроятно, что отъ халдеевъ зодіакъ заимствовали египтяне, а отъ нихъ уже онъ перешелъ къ грекамъ, которымъ были извѣстны двѣнадцать знаковъ зодіака во время Евдокса (370 до Р. Х.) Впрочемъ Летронъ утверждаетъ, что зодіакъ былъ заимствованъ египтянами у грековъ, а не обратно. Такимъ образомъ глубокая древность зодіакальнаго круга, установленнаго въ храмѣ Дендера, въ настоящее время не подтверждается. Біо полагалъ, что кругъ этотъ былъ установленъ за 716 л. до Р. Х., а по мнѣнію Дюпюи (Dupuis) знаки зодіака были изобрѣтены въ Египтѣ за 13000 л. до Р. Х.

*) Въ главѣ о кометахъ находиться примѣчаніе, въ которомъ говорится, что когда Навуходоносоръ I около 1150 г. до Р. Х. вторгнулся въ Еламъ, явилась комета, ядро которой было свѣтло какъ день; между тѣмъ какъ отъ ея блестящаго тѣла тянулся хвостъ, подобный жалу скорпіона. Она двигалась съ сѣвера къ югу и ее считали предвѣстницей счастья.

Весьма понятно, что появленію кометъ халдейскіе ученые придавали громадное значеніе, тѣмъ болѣе, что во всѣхъ небесныхъ явленіяхъ они видѣли связь съ различными событіями. Воззрѣнія халдейскихъ астрономовъ на появленіе кометъ заслуживаетъ полнаго снисхожденія, если припомнить, что еще въ XVII столѣтіи многіе ученые въ Западной Европѣ не были чужды, тѣмъ предразсудкамъ, которые раздѣляли халдейскіе ученые за много столѣтій до Р. Х. Подтвержденіе сказаннаго можно видѣть въ статьѣ помѣщенной въ „Journal des Savants“ за 1681 г., въ которой подробно описано и даже приведенъ рисунокъ яйца, которое снесла курица *во время появленія кометы*, съ изображеніемъ нѣсколькихъ звѣздъ. Въ статьѣ этой упоминается о появленіи крестовъ на бѣльѣ, во время появленія кометы 1669 г. въ Калабріи, и во время различныхъ затмѣній. Въ XVII столѣтіи астроному Кассини, въ Болоньѣ, показывали скорлупу яйца, на которомъ находилось изображеніе солнца; яйцо это снесла курица во время затмѣнія. Какое значеніе придавали кометамъ можно видѣть изъ того, что въ память появленія ихъ чеканили медали. Въ Цюрихской городской

истинныхъ заблуждался, находя связь между причиной и слѣдствіемъ тамъ, гдѣ была только послѣдовательность событій. Научныхъ методовъ не было и изслѣдователи по неволѣ сбивался съ толку своими же собственными пріемами и предположеніями: результатомъ этого было ложное знаніе съ безчисленнымъ множествомъ суевѣрій и предразсудковъ. Какое громадное значеніе придавали халдейскіе ученые изученію астрологіи, можно видѣть изъ того, что даже геометрическія фигуры халдейскаго Евклида получили значеніе гадательныхъ знаковъ *).

Не смотря на такое отличительное направленіе астрономіи и математики у халдеевъ, сдѣлавшее эти науки какъ-бы вспомогательнымъ средствомъ при изученіи астрологіи, можно съ увѣренностью сказать, даже и при нынѣшнемъ поверхностномъ знакомствѣ съ незначительнымъ числомъ, дошедшихъ до насъ, математическихъ памятниковъ древней Халдеи, что уже за нѣсколько десятковъ столѣтій до Рождества Христова, математическія науки достигли значительной степени своего развитія въ древней Вавилоніи и Ассиріи. Безъ сомнѣнія дальнѣйшее изученіе постоянно находимыхъ новыхъ математическихъ и астрономическихъ сочиненій, прольетъ много свѣта и сообщитъ много интересныхъ данныхъ объ математическихъ познаніяхъ халдейскихъ ученыхъ. Только въ самое недавнее время подтвердилось мнѣніе классическихъ писателей, что Вавилонія была родиной астрономіи, а вмѣстѣ съ тѣмъ, по необходимости, отчизной математики и перваго правильнаго календаря **).

библіотекѣ хранится серебряная медаль на одной сторонѣ которой изображена комета съ подписью „A. 1680 16 Dec. 1681 Jan." На оборотной сторонѣ находится надпись: „Der Stern droth böse Sachen—Trau nur Gott—Wirds wohl machen".

Послѣ этого неудивительно, если Беда, принадлежавшій къ числу образованнѣйшихъ людей VIII в., о кометахъ выражался слѣдующими словами: „Cometae sunt stellae flammis crinitae repente nascentes, regni mutationes, aut pestilentiam, aut bella, vel ventos aestusve portendentes". (*Beda Venerab.*, De Natur. rerum, c. XXIV).

Указанные примѣры мы привели, чтобы показать, что во всѣ времена и у всѣхъ народовъ предразсудки сопровождали науки и истинное знаніе и къ сожалѣнію весьма часто были съ ними тѣсно связаны.

*) Описаніе всѣхъ повѣрій, предъразсудковъ и различныхъ религіозныхъ воззрѣній халдеевъ можно найти въ сочиненіи. *Lenormant*, La Magie chez les Chaldéens et les origines accadiennes, Paris, 1874. in-8.

**) Въ особенности заслуживаетъ вниманія правильно составленный аккадійцами календарь. Годъ они дѣлили на 12 мѣсяцевъ. Небо было раздѣлено на четыре части и прохожденіе по нимъ солнца обозначало четыре времени года. Годъ состоялъ изъ 360 дней; по мѣрѣ надобности, по предписанію жрецовъ, въ разное время въ календарь вводили лишній мѣсяцъ. Каждый мѣсяцъ дѣлили на двѣ части по 15 дней и каждую часть на три періода въ 5 дней. Независимо отъ этого дѣленія была также извѣстна недѣля въ 7 дней. Дни носили названія солнца, луны и пяти планетъ. Мѣсяцы на аккадскомъ языкѣ носили назва-

Указавъ на общій характеръ и направленіе математическихъ наукъ у халдеевъ, мы постараемся вкратцѣ изложить все извѣстное о математическихъ познаніяхъ жителей древней Халдеи. Все извѣстное въ настоящее время о математическихъ познаніяхъ халдеевъ заимствовано изъ незначительнаго числа дошедшихъ до насъ памятниковъ математической литературы древней Ассиріи и Вавилоніи. Къ сожалѣнію изъ числа этихъ немногихъ памятниковъ, только нѣкоторые были надлежащимъ образомъ изслѣдованы и изучены спеціалистами. Въ виду вышесказаннаго, мы считаемъ необходимымъ познакомить читателя съ содержаніемъ двухъ главнѣйшихъ дошедшихъ до насъ памятниковъ, именно: такъ называемыми „таблицами квадратовъ и кубовъ“ и во вторыхъ отрывками сочиненія геометрическаго характера. Но прежде всего мы считаемъ умѣстнымъ сказать нѣсколько словъ о системѣ счисленія, принятой халдеями, а также обратимъ вниманіе на систему мѣры и вѣса, при чемъ увидимъ, что система эта была единственной, до метрической, основанная на вполнѣ научныхъ основаніяхъ.

Въ основаніи системы счисленія халдеевъ лежало число 60, имѣющее тоже значеніе, какъ число 10 въ десятичной системѣ счисленія. Число это носило названіе *сосъ* (soss). Число 600 было извѣстно подъ именемъ *неръ* (ner), а число 3600—подъ именемъ *саръ* (sar). Термины сосъ, неръ и саръ имѣли тоже значеніе, что термины десятокъ, дюжина, сотня и т. п. Долгое время полагали, что термины эти относятся только къ извѣстному числу лѣтъ, но въ настоящее время вполнѣ выяснено, что они суть ничто иное какъ обыкновенныя наименованія, или иначе ариѳметическіе коэфиціенты.

Какъ выражали числа вавилоняне при посредствѣ сосовъ, неровъ и саровъ лучше всего можно видѣть на слѣдующемъ примѣрѣ. Царь Саргонъ выражаетъ слѣдующимъ числомъ окружность города Хорсабада, которое мы прежде приведемъ, написанное клиновидными письменами, чтобы дать читателю образчикъ подобнаго письма:

Выраженіе это въ дословномъ переводѣ значитъ.

Sar Sar Sar Sar, Ner Ner Ner, 1 Sos, 1½ двойныхъ **Qanu** (или 3 **Qani**), **2 Ammat.**

нія соотвѣтствующихъ знаковъ зодіака. Первымъ мѣсяцемъ въ году считался нашъ мартъ, по аккадски „низанъ“.

Экваторъ дѣлили на 240 частей, а эклиптику названную „ярмо небеснаго свода“, на 360 частей. Сохранившіеся обломки планиглобусовъ показываютъ, что были произведены попытки составить карту небеснаго свода и сгруппировать созвѣздія.

Лепсiусъ объясняетъ его слѣдующимъ образомъ:

1 Sar	= 4 × 3600	=	14400	Ammat
3 Ner	= 3 × 600	=	1800	"
1 Sos	= 1 × 60	=	60	"
3 Qanı	=	=	18	"
2 Ammat	=	=	2	"
			16,280	Ammat т. е. локтей.

Оппертъ предлагаетъ нѣсколько иное толкованiе этого выраженiя.

Изъ дробей въ математическихъ сочиненiяхъ вавилонянъ встрѣчается рядъ дробей съ знаменателемъ 6, именно $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$; но происхожденiе ихъ до сихъ поръ не выяснено. Другой классъ дробей заключаетъ всѣ дроби съ знаменателемъ 60, коихъ числители представляются рядомъ чиселъ отъ 1 до 59.

Причина почему вавилонскiе математики въ основанiи своей системы счисленiя приняли число 60, полагаютъ имѣетъ связь съ дѣленiемъ дня на 60 равныхъ частей, которое, какъ извѣстно, практиковалось у халдеевъ.

Различнымъ числамъ халдеи приписывали различныя мистическiя свойства и значенiя, которыя сейчасъ-же нашли у нихъ примѣненiе въ ихъ религiозныхъ и философскихъ воззрѣнiяхъ. Каждый изъ боговъ обозначался однимъ изъ чиселъ между 1 и 60 и занималъ опредѣленное мѣсто въ небесной iерархiи. Ряду цѣлыхъ чиселъ соотвѣтствовалъ рядъ дробей, изъ которыхъ каждая относилась къ извѣстному злому духу*). Весьма вѣроятно, что воззрѣнiя пиѳагорейцевъ на числа, обязаны своимъ происхожденiемъ халдеямъ.

---

*) Ленорманъ въ своемъ сочиненiи „Essai de commentaire des fragments cosmogoniques de Bérose" упоминаетъ о глиняной табличкѣ, въ которой противъ именъ боговъ стоятъ слѣдующiя числа:

Anu	60
Bel	50
Nisrak	40
Šin	30
Šamaš	20
Bin	10

Изъ содержанiя другихъ глиняныхъ табличекъ видно, что злые духи дѣлились на классы, по семи въ каждомъ. Впрочемъ необходимо замѣтить, что до сихъ поръ еще свѣдѣнiя объ относительномъ значенiи этихъ духовъ весьма скудны, извѣстно только, что особенное значенiе при этомъ имѣло мистическое число семь. При классификацiи злыхъ духовъ, высшее мѣсто въ iерархiи принадлежало тѣмъ изъ нихъ, которымъ соотвѣтствовала дробь

Шестидесятичная система счисленія легла въ основаніи системы мѣры и вѣса халдеевъ, которая была самая совершенная изъ всѣхъ подобныхъ системъ древности и при томъ единственная, основанная на вполнѣ научныхъ началахъ *). Съ этой системой можно сравнить только метрическую, введенную въ концѣ прошлаго столѣтія. Въ основаніи системы принятъ былъ *локоть* (ammat = 525 m. m.), который дѣлился на 60 *линій* (uban), соотвѣтствующихъ 60-ти минутамъ градуса. 360 локтей равнялись одной *стадіи* (189 m.). 36 линій 1 *футу*. Квадратъ, построенный на футѣ служилъ мѣрой для измѣренія площадей, онъ былъ *квадратной единицей*. Кубъ, построенный на футѣ, служилъ *кубической единицей*. Вѣсъ кубическаго фута воды равнялся 1 *таланту* (30 k. 650 gr.) который служилъ основной единицей вѣса **). Талантъ дѣлился на 60 частей или *минъ* (510 gr. 83), который въ свою очередь дѣлились на шестьдесятъ *драхмъ* каждая (8 gr. 513). Окружность была раздѣлена на 360 *градусовъ*, градусъ на 60 *минутъ*, минута на 60 *секундъ*, а секунда на 60 *терцій*. Обозначенія этихъ частей были такія же какъ и въ настоящее время. Подобный способъ считать былъ весьма распространенъ на всемъ Востокѣ ***). Греки также заимствовали эту

съ большимъ числителемъ. Изъ численныхъ значеній, соотвѣтствующихъ извѣстнымъ духамъ, на табличкахъ прочитаны слѣдующія:

Maskim . . . . $50/60$
Gigim . . . . $40/60$
Utuq . . . . $30/60$

До сихъ поръ извѣстны только приведенныя числовыя значенія. Каждому духу соотвѣтствовалъ извѣстный кругъ дѣяній, такъ напр. *maskim* былъ олицетвореніемъ козней, различныхъ сѣтей и т. п. *Alal* былъ представителемъ разрушенія и т. д. Значеніе другихъ мало извѣстно.

*) Разработкой вопроса о различныхъ родахъ мѣръ, бывшихъ въ употребленіи въ древней Ассиріи и Вавилоніи въ особенности много занимался Оппертъ. Изслѣдованія его составляютъ предметъ статей, помѣщенныхъ въ „Journal Asiatique“ за Août-Septembre 1872 и Octobre-Novembre 1874 гг. Сочиненіе озаглавлено: *Oppert*, L'étalon des mésures assyriennes, fixé par les textes cunéiformes. Съ нѣкоторыми выводами Опперта не вполнѣ согласенъ Лепсіусъ.

**) Система мѣръ вѣса вавилонянъ и ассиріянъ была двухъ родовъ. Единицы одной системы были вдвое больше соотвѣтствующихъ единицъ другой системы. Въ основаніи системы мѣръ вѣса одной системы лежалъ талантъ, вѣсъ котораго равнялся 61 килогр. 300 gr.; въ основаніи другой системы—*талантъ*, вѣсъ котораго равнялся 30 килогр. 650 gr. Мѣры вѣса обѣихъ системъ легко узнавались тѣмъ, что мѣры вѣса первой системы всегда были сдѣланы изъ бронзы и имѣли форму львовъ; мѣры же второй системы всегда дѣлались изъ камня и имѣли форму гусей или утокъ. Въ Британскомъ Музеѣ находится полная система мѣръ вѣса изъ бронзы и камня, найденная Лэйардомъ въ Ниневіи. Также существовали двѣ системы мѣръ протяженій и времени.

***) Мѣры объема вавилонянъ и ассиріянъ перешли къ евреямъ, финикіанамъ и арамеянамъ. *Шестидесятичная* система счисленія была также усвоена арамеянами.

систему, которая примѣняется въ „Альмагестѣ" Птоломея. Даже названія нѣкоторыхъ мѣръ прямо указываютъ на ихъ халдейское происхожденіе *).

Мѣры времени также находились въ зависимости отъ мѣръ длины. Именно одинъ *парасангъ* (parasange), равный 30 стадіямъ, соотвѣтствовалъ простому часу ходьбы, а *шенъ* (schoen) равный 60 стадіямъ соотвѣтствовалъ двойному часу. Употребленіе водяныхъ часовъ дало возможность привесть мѣры времени въ зависимость отъ мѣръ вѣса и объема. *Метретъ* или объемъ воды, въ одинъ кубическій футъ, вѣсомъ въ одинъ талантъ, служилъ мѣрой своимъ истеченіемъ для измѣренія двойного часа времени. Единица эта въ свою очередь дѣлилась на 60 минутъ. Истеченіе *лога* воды, вѣсомъ въ одну мину, служилъ мѣрой двойной минуты, а истеченіе одного *алабастрона*, вѣсомъ въ $^1/_2$ мины, служилъ мѣрой простой минуты. Минута дѣлилась на 60 секундъ.

Есть основаніе предполагать, что халдейскимъ астрономамъ были извѣстны ариѳметическія и геометрическія прогрессіи. Подтвержденіе этого находятъ въ табличкѣ, прочитанной и объясненной англійскимъ ассиріологомъ Гинксомъ (Hincks). Въ этой табличкѣ требуется опредѣлить, сколько частей луннаго диска освѣщены, въ каждый изъ 15 дней, протекшихъ отъ наступившаго новолунія до полнолунія. Въ табличкѣ сказано, что въ каждый изъ этихъ дней соотвѣтственно видно по столько частей луннаго диска:

5	10	20	40	1.20
1.36	1.52	2.8	2.24	2.40
2.56	3.12	3.28	3.44	4

Числа эти Гинксъ объясняетъ тѣмъ, что лунный дискъ былъ раздѣленъ на 240 частей. Числа, стоящія слѣва точекъ выражали сосы. Изъ ряда этихъ чиселъ можно видѣть, что числа освѣщенныхъ частей въ первые пять дней слѣдуютъ въ геометрической прогрессіи, а въ остальныя десять— въ ариѳметической **).

По словамъ Вероза видно, что халдеямъ уже въ глубокой древности былъ извѣстенъ астрономическій годъ въ 365¼ дней.

Шестидесятичная система счисленія представляла много практическихъ выгодъ, такъ какъ число 60 имѣетъ дѣлителями всѣ дѣлители чиселъ 10

---

*) Много свѣдѣній о системахъ мѣръ бывшихъ въ ходу въ Ассиріи и Вавилоніи находится въ сочиненіи: *Joh. Brandis*, Das Munz, Mass-und Gewichtsystem in Vorderasien bis Alexander d. Grossen; Berlin, 1866; а также въ сочиненіи *Vasquez Queipo*, Essai sur les systèmes métriques et monétaires des anciens peuples, depuis les premiers temps historiques jusqu'à la fin du khalifat d'Orient. 3 vol. en 4 tomes. 1859, Paris. gr. in-8.

**) Описаніе этой таблицы и ея объясненіе находятся въ статьѣ помѣщенной въ „Transactions of the R. Irish Academy. Polite Litterature XXII".

и 12, которыя съ самыхъ древнѣйшихъ временъ были основными представителями единицъ высшаго наименованія. Кромѣ того принять число 60 знаменателемъ дробей имѣло еще то преимущество, что между различными знаменателями дробей, число это имѣетъ наибольшее число дѣлителей. Изъ сказаннаго, можно видѣть, что выборъ системы счисленія, въ основаніи которой лежало число 60, былъ очень удачный. Система эта отъ халдеевъ перешла потомъ и къ другимъ народамъ и господствовала до XVI столѣтія въ примѣненіи къ шестидесятичнымъ дробямъ, когда онѣ были замѣнены десятичными.

Кромѣ дѣленія окружности круга на 360 градусовъ у халдеевъ существовало также обыкновеніе дѣлить окружность круга на 720 полуградусовъ *). Величина каждаго полуградуса равнялась видимому діаметру солнца и луны при захожденіи и восхожденіи. Величина этого полуградуса равнялась *половинѣ локтя*. Локоть же служилъ основаніемъ системъ мѣръ протяженія и вѣса вавилонянъ. Изъ этого можно видѣть, что система мѣръ древнихъ халдеевъ была основана на вполнѣ научныхъ началахъ. Халдейскіе ученые не могли, подобно французскимъ ученымъ, въ основаніи своей системъ принять единицу, которую можно было непосредственно измѣрить и которая была бы основана на дѣйствительно научныхъ началахъ. Измѣреніе земли въ то время было еще неизвѣстно, а потому они по необходимости прибѣгли къ мѣрѣ видимой—астрономической. Изъ такихъ мѣръ самая простая и самая естественная представлялась въ видимомъ діаметрѣ солнца, который они приняли равнымъ половинѣ градуса, или половинѣ локтя (murran).

Подъ именемъ *муррана* греки понимали 720-ю часть длины окружности экватора.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію сохранившихся памятниковъ. Начнемъ съ „табличекъ квадратовъ и кубовъ".

Въ Британскомъ Музеѣ находятся двѣ глиняныя таблички, найденныя въ 1854 г., въ Сенкере, англійскимъ геологомъ Лофтусомъ (Loftus). Съ содержаніемъ этихъ табличекъ впервые познакомился Раулинсонъ, который указалъ, что на одной изъ нихъ находиться таблица квадратовъ чиселъ. Послѣ Раулинсона таблички эти были предметомъ изслѣдованій многихъ ученыхъ **). Относительно древности этихъ табличекъ мнѣнія ученыхъ раз-

---

*) Кругъ у халдеевъ былъ извѣстенъ подъ названіемъ *gagar*, градусъ—*dargalu*, минута—*sussa*. Названія секунды и терціи неизвѣстны.

**) На содержаніе *первой* таблички впервые обратилъ вниманіе Смитъ и напечаталъ объ ней замѣтку въ North-British Review, July 1870 г. Затѣмъ Смитъ перевелъ часть ея; переводъ его помѣщенъ въ Zeitschrift für Ägyptische Sprache und Alterthumskunde за 1872 г. и составляетъ предметъ статьи подъ заглавіемъ „On Assyrian weights and measures". Объясненія Смита встрѣтили возраженія со стороны Опперта, который предложилъ нѣсколько

дѣляются. Сэйсъ полагаетъ, что онѣ составлены между 2300 г. и 1600 г. до Р. Х., а по мнѣнію Ленормана ихъ слѣдуетъ отнести къ болѣе раннему времени. Онъ указываетъ на то, что таблички эти найдены вмѣстѣ съ табличками, на которыхъ находиться имя одного изъ первыхъ государей древней Халдеи, котораго Оппертъ называетъ Охрамомъ *). Ленорманъ полагаетъ, что таблички эти составлены если не во время Охрама, то даже раньше. Если такое предположеніе справедливо, то „таблица квадратовъ“ есть самый древній изъ извѣстныхъ до настоящаго времени памятниковъ математики, такъ какъ Охрамъ современникъ одного изъ фараоновъ III-й или IV-й династій, правившихъ около 4500 л. до Р. Х. На основаніи нѣкоторыхъ данныхъ Сэйсъ предполагаетъ, что въ библіотекѣ Сенкере, славившейся въ древности своимъ богатствомъ, находилось цѣлое собраніе сочиненій математическаго содержанія. Если это справедливо, то дальнѣйшія раскопки подтвердятъ сказанное.

При изданіи текста табличекъ, одна изъ нихъ содержащая таблицу квадратовъ чиселъ—была названа *второй*, а другая—содержащая кубы чиселъ—названа *первой*. Познакомимся вкратцѣ съ содержаніемъ и устройствомъ этихъ табличекъ, при чемъ начнемъ со второй.

Вторая табличка содержитъ на обѣихъ сторонахъ всего шестьдесятъ

ное толкованіе отрывка изданнаго Смитомъ. Замѣтки и объясненія Опперта помѣщены имъ въ его сочиненіи „l'Étalon des mesures Assyriennes fixé par les textes cunéiformes. Paris. 1875. in-8“. Надъ переводомъ и толкованіемъ *второй* таблички много трудился также Ленорманъ и написалъ сочиненіе „Essai sur un document mathématique chaldéen, Paris. 1868, in-8“ Autogr. Въ послѣднее время Генри Раулинсонъ и Смитъ издали самый текстъ обѣихъ табличекъ въ IV-мъ томѣ своего обширнаго сочиненія: The cuneiform Inscrip. of Western Asia. London. 1875. Наконецъ Лепсіусъ, въ 1877 г., въ статьѣ „Die Babylonisch-Assyrischen Längenmasse nach der Tafel von Senkereh“, помѣщенной въ Abhandlungen der König. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, стремится разъяснить смыслъ и значеніе *первой* таблички. При его статьѣ помѣщенъ точный снимокъ ея.

*) По предположенію Ленормана Охрамъ принадлежалъ къ числу первыхъ правителей древней Халдеи. Имъ былъ построенъ городъ Уръ и громадный пирамидальный храмъ, остатки котораго до сихъ поръ свидѣтельствуютъ о массѣ кирпича, употребленнаго на постройку. Раулинсонъ полагаетъ, что на него пошло болѣе 30 милліоновъ кирпича; остатки его въ настоящее время представляютъ возвышеніе въ 35 метровъ вышины. Храмъ имѣлъ квадратное основаніе, углы котораго были направлены къ четыремъ странамъ свѣта.

Настоящее имя Охрама до сихъ поръ не прочитано. Знакъ соотвѣтствующій его имени значитъ „свѣтъ солнца“. Раулинсонъ предлагаетъ имя *Ourouk̄h* и *Ouriyak*, другіе *Ourkham*, на туранскомъ языкѣ его называли *Likbagas*. Во всякомъ случаѣ Охрамъ принадлежитъ къ числу историческихъ правителей древней Халдеи, на что указываютъ кирпичи съ его именемъ. Кирпичи эти лежатъ несравненно глубже другихъ подобныхъ же кирпичей, на которыхъ находятся также имена различныхъ государей, а это безъ сомнѣнія указываетъ на ихъ болѣе древнее происхожденіе.

строчекъ *). Каждая изъ строчекъ въ началѣ и концѣ содержитъ числа, между которыми стоитъ нѣсколько словъ на сумирскомъ языкѣ. Мы уже выше сказали, что числа эти Раулинсонъ призналъ за квадраты чиселъ: повторяющееся въ каждой строчкѣ слово *ibdi* онъ перевелъ *квадратъ*. Табличка эта содержитъ квадраты ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до 60. Съ лѣвой стороны каждой строки стоятъ квадраты чиселъ, а въ концѣ каждой строки, съ права, сами числа. Табличка расположена слѣдующимъ образомъ:

1	есть квадратъ	1
4	есть квадратъ	2
9	есть квадратъ	3
16	есть квадратъ	4
25	есть квадратъ	5
36	есть квадратъ	6
49	есть квадратъ	7
1. 4	есть квадратъ	8
1.21	есть квадратъ	9
1.40	есть квадратъ	10
2. 1	есть квадратъ	11
. . . .		. .
. . . .		. .
56. 4	есть квадратъ	58
58. 1	есть квадратъ	59
1	есть квадратъ	1

Изъ самаго устройства таблички видно, что здѣсь была примѣнена шестидесятичная система счисленія, при чемъ числа стоящія слѣва точекъ означали число шестидесятковъ, или сосовъ. Составитель таблички не писалъ:

64 есть квадратъ 8

а выражалъ это въ видѣ:

1.4 есть квадратъ 8

Точекъ между числами не стояло, мы ихъ ввели только для простоты, изъ чего можно заключить, что при составленіи таблички была извѣстна уже вавилонянамъ ариѳметика положенія и что одни и тѣ же знаки могли обозначать единицы высшаго или низшаго наименованія, смотря потому стояли-ли они лѣвѣе или правѣе въ ряду данныхъ знаковъ.

*) Передней стороной всегда въ глиняныхъ табличкахъ бываетъ вогнутая сторона, задней—выпуклая. Всѣ таблички къ срединѣ болѣе толсты, вслѣдствіе чего большая часть изъ нихъ съ поврежденными краями.

При нынѣшней системѣ счисленія табличка квадратовъ представлялась бы въ формѣ:

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1\\
2^2 &= 4\\
3^2 &= 9\\
4^2 &= 16\\
5^2 &= 25\\
6^2 &= 36\\
7^2 &= 49\\
8^2 &= 1\times 60^1+4 = 64\\
9^2 &= 1\times 60^1+21 = 81\\
10^2 &= 1\times 60^1+40 = 100\\
11^2 &= 2\times 60^1+1 = 121\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
58^2 &= 56\times 60^1+4 = 3364\\
59^2 &= 58\times 60^1+1 = 3481\\
60^2 &= 60\times 60^1 = 3600.
\end{aligned}
$$

Табличка квадратовъ заключаетъ всего 60 строчекъ, 30 съ одной стороны и 30 съ другой. Клинообразные знаки расположены въ ней въ видѣ трехъ вертикальныхъ столбцевъ, такъ что каждая горизонтальная строчка состоитъ изъ трехъ группъ знаковъ; въ первой—квадраты чиселъ, во второй—сами числа, а въ третьей выраженіе, повторяющееся во всѣхъ строчкахъ.

Мы полагаемъ не безынтереснымъ привести здѣсь одну строчку изъ этого древнѣйшаго памятника математической литературы:

Примѣняя здѣсь объясненіе Лепсіуса, знакамъ этимъ соотвѣтствуетъ выраженіе:

25.21 есть квадратъ 39

что означаетъ:

$$39^2 = 25\times 60^1 + 21 = 1521$$

Или примѣняя форму, въ которой представляетъ табличку квадратовъ Ленорманъ, мы имѣемъ:

$$\frac{25}{60} + \frac{21}{(60)^2} = \left(\frac{39}{60}\right)^2$$

Въ концѣ каждой строчки, съ правой стороны чиселъ, повторены три

знака *). Знаки эти Ленорманъ перевелъ выраженiемъ „на основанiи правилъ Дилвуна“ **).

* Ленорманъ, въ своемъ сочиненiи „Essai sur un document mathématique chaldéen“, выраженiе „на основанiи правилъ Дилвуна“ перевелъ „suivant le compt de Dilvoun“.

Таблицу квадратовъ чиселъ онъ представляетъ въ нѣсколько иной формѣ чѣмъ Лепсіусъ. Именно:

$\frac{1}{60^2} = \left(\frac{1}{60}\right)^2$	на основанiи правилъ Дилвуна
$\frac{4}{60^2} = \left(\frac{2}{60}\right)^2$	„ „ „ „
$\frac{9}{60^2} = \left(\frac{3}{60}\right)^2$	„ „ „ „
$\frac{16}{60^2} = \left(\frac{4}{60}\right)^2$	„ „ „ „
$\frac{25}{60^2} = \left(\frac{5}{60}\right)^2$	„ „ „ „
. . . .	
. . . .	
$\frac{49}{60^2} = \left(\frac{7}{60}\right)^2$	„ „ „ „
$\frac{1}{60} + \frac{4}{60^2} = \left(\frac{8}{60}\right)^2$	„ „ „ „
$\frac{1}{60} + \frac{21}{60^2} = \left(\frac{9}{60}\right)^2$	„ „ „ „
. . . .	
. . . .	
$\frac{2}{60} + \frac{1}{60^2} = \left(\frac{11}{60}\right)^2$	„ „ „ „
. . . .	
$\frac{21}{60} + \frac{36}{60^2} = \left(\frac{36}{60}\right)^2$	„ „ „ „
. . . .	
$\frac{40}{60} + \frac{1}{60^2} = \left(\frac{49}{60}\right)^2$	„ „ „ „
. . . .	
$\frac{56}{60} + \frac{4}{60^2} = \left(\frac{58}{60}\right)^2$	„ „ „ „
$\frac{58}{60} + \frac{1}{60^2} = \left(\frac{59}{60}\right)^2$	„ „ „ „
$1 = \left(\frac{60}{60}\right)^2$	„ „ „ „

**) Текстъ „таблички квадратовъ“ различные ученые объясняютъ различно. Выраженiе переведенное Ленорманомъ „на основанiи правилъ Дилвуна“, Раулинсонъ считаетъ просто выраженiемъ значенiя „квадратъ“, читая его *ibdi*, съ мнѣнiемъ Раулинсона согласенъ Опертъ, но выраженiе это онъ читаетъ *ški*.

На основаніи нѣкоторыхъ указаній, въ табличкахъ миѳологическаго содержанія, можно заключить, что названіе Дилвунъ относилось къ острову, находящемуся не далеко отъ берега, въ Персидскомъ заливѣ*). На этомъ островѣ вѣроятно находился одинъ изъ центровъ религіозной культуры древнихъ халдеевъ, гдѣ вмѣстѣ съ тѣмъ изучались жрецами математическія науки и астрономія. Съ теченіемъ времени изъ этого центра науки распространились вверхъ по Тигру и достигли Халдеи и Ассиріи.

Существованіе храмовъ и священныхъ мѣстъ на островахъ принадлежитъ къ самому отдаленному времени и существовало еще во время кушитовъ, задолго до господства семитовъ. Представленіе о храмѣ выходящемъ изъ водъ, въ религіозныхъ вѣрованіяхъ халдеевъ, ассирянъ, финикіанъ и нѣкоторыхъ другихъ народовъ Востока, имѣло священный характеръ, первостатейной важности, такъ что въ нѣкоторыхъ мѣстахъ храмы строили на островахъ среди искусственныхъ озеръ.

Въ нѣкоторыхъ сохранившихся памятникахъ древнихъ халдеевъ главныхъ своихъ боговъ, они называютъ „богами Дилвуна". По предположенію Ленормана островъ Дилвунъ находился въ томъ мѣстѣ, гдѣ нынѣ находится приморскій городъ Бендеръ-Дилунъ, лежащій недалеко отъ Шатъ-элъ-Араба.

Практическая польза „таблицы квадратовъ" несомнѣнна. Хотя въ первомъ столбцѣ она заключаетъ квадраты чиселъ, а во второмъ ихъ корни, но очевидно она служила для вычисленія квадратовъ чиселъ, а не ихъ корней. Въ этой таблицѣ находились готовыя вычисленія, которыя могли найти приложеніе во многихъ случаяхъ. Коснемся этого ближе.

Вся халдейская астрономія была, какъ извѣстно тѣсно связана съ астрологіей **). Наблюденіе неба и разысканіе примѣтъ для опредѣленія грядущихъ событій и будущаго имѣло первостепенное значеніе въ наукахъ

Изъ приведеннаго можно видѣть сколько разнорѣчій бываетъ въ изслѣдованіяхъ ассиріологовъ по одному и тому же предмету.

*) Въ нѣкоторыхъ табличкахъ островъ этотъ названъ Дилмунъ. Названіе это встрѣчается также въ табличкахъ изданныхъ Сэйсомъ въ его статьѣ „The Astronomy and Astrology of the Babylonians". Замѣтимъ еще, что въ акарійской системѣ клиновидныхъ письменъ (т. е. системѣ бывшей въ употребленіи въ Ниневіи и Вавилонѣ, названной *акарійской*, въ отличіе отъ системы клиновидныхъ письменъ, употребляемыхъ персами), одинъ и тотъ же знакъ служилъ для изображенія согласныхъ *m* и *v*. Такимъ образомъ видно что названія Dilvoun и Dilmoun тождественны.

**) Въ древности существовало убѣжденіе, что халдейскимъ астрономамъ принадлежатъ наидревнѣйшія астрономическія наблюденія. По словамъ Симпликія, въ его комментаріяхъ на сочиненіе Аристотеля „De coelo", у нихъ существовалъ цѣлый рядъ астрономическихъ наблюденій, произведенныхъ за 1903 г. до эпохи Александра Великаго, т. е. за 2227 лѣтъ до Р. Х. Симпликій говоритъ, что наблюденія эти были сообщены Аристотелю Каллисѳеномъ. По словамъ же Бероса самые древніе памятники астрономическихъ познаній халдеевъ относятся къ 480 г. до Р. Х.

халдеевъ. Опредѣленіе положенія звѣздъ и относительное ихъ расположеніе въ той или другой части видимаго неба, въ данное время, считалось необыкновенно важнымъ и умѣніе ихъ опредѣлить необходимымъ.

Но, до александрійской эпохи, не были извѣстны древнимъ астрономамъ приборы съ помощью которыхъ можно бы было опредѣлить съ точностью положеніе тѣхъ или другихъ неподвижныхъ звѣздъ на сферѣ небесной; они не знали координатъ, извѣстныхъ подъ именемъ склоненія и прямаго восхожденія, широты и долготы. Вся астрономія положенія была основана на наблюденіяхъ восхода и захода звѣздъ. Восхожденіе и захожденіе звѣздъ относили къ восхожденію и захожденію одной, болѣе извѣстной, изъ нихъ, какъ напр. къ Сиріусу. Зная промежутокъ времени протекшій между временемъ восхожденія и захожденія той или другой звѣзды и временемъ восхода и захода Сиріуса, при помощи вычисленій находили ихъ угловое растояніе. Найдя такое угловое растояніе въ функціи времени, наносили на сферу положеніе звѣзды относительно Сиріуса.

Для астрологическихъ предсказываній особенное значеніе имѣло знаніе относительнаго расположенія звѣздъ и знаніе положенія той или другой планеты въ извѣстной части неба. По словамъ Птоломея извѣстно, что при своихъ вычисленіяхъ, халдейскіе астрологи относительное разстояніе свѣтилъ на сферѣ небесной выражали въ локтяхъ. При астрологическихъ вычисленіяхъ однимъ изъ необходимѣйшихъ условій представлялось знаніе и измѣреніе различныхъ частей неба. Такъ какъ разстоянія между свѣтилами выражались въ локтяхъ и частяхъ локтя, то необходимо при вычисленіи различныхъ площадей служилъ квадратъ, построенный на локтѣ. Но при шестидесятичной системѣ счисленія квадратный локоть составлялъ 3600-ю часть квадрата, построеннаго на 60 локтяхъ, или на такъ называемомъ сосѣ. Величина же локтя равнялась величинѣ градуса при горизонтѣ. Квадратный локоть въ свою очередь дѣлился на 3600 частей, т. е. квадратныхъ линій, или маленькихъ квадратовъ построенныхъ на линіи, соотвѣтствующей минутѣ.

Зная это, теперь легко видѣть, къ чему могла служить „таблица квадратовъ чиселъ". При помощи такой таблицы легко было вычислить вели-

Изъ другихъ писателей древности упоминавшихъ объ астрономическихъ трудахъ халдеевъ, особеннаго вниманія заслуживаютъ указанія Птоломея, который въ своемъ „Альмагестѣ" упоминаетъ о трехъ лунныхъ затмѣніяхъ, имѣвшихъ мѣсто въ 27 и 28 годахъ эры Набонассара, т. е. въ 719 и 720 г. до Р. X. Эра Набонассара начиналась 26 февраля 747 г. до Р. X.

Впрочемъ необходимо замѣтить, что греческіе писатели оставили намъ самыя скудныя свѣдѣнія о математическихъ трудахъ древнихъ халдеевъ. Все же извѣстное въ настоящее время о ихъ математической литературѣ есть результатъ трудовъ ассиріологовъ въ послѣднія двадцать лѣтъ.

шину площади квадрата на сферѣ небесной, для этого стоило только измѣрить длину его стороны, выраженную въ локтяхъ, и въ таблицѣ сейчасъ же находилась площадь квадрата, выраженная въ единицахъ перваго и втораго наименованія, т. е. въ квадратныхъ локтяхъ и квадратныхъ линіяхъ.

Съ такимъ же успѣхомъ таблицей этой могли пользоваться при измѣреніи площади полей, а также строители храмовъ, при вычисленіи количества кирпичей необходимыхъ при постройкахъ. Знаніе количества необходимаго матеріала было необходимо, а въ особенности точное знаніе количества кирпича, приготовленіе котораго зависѣло отъ многихъ условій *). Многіе предметы, и въ томъ числѣ есть основанія предполагать и кирпичи, считались на шестидесятки.

Несравненно важнѣе *первая* табличка. На передней ея сторонѣ находиться сравнительная таблица двухъ системъ мѣръ, а на задней—таблица кубовъ ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до 60. Къ сожалѣнію *первая* табличка сохранилась не вся, значительная ея часть, вся лѣвая сторона и верхняя, до насъ не дошли. Она представляется въ видѣ обломка.

На *задней* сторонѣ сохранились только кубы чиселъ отъ 1 до 32; несомнѣнно, что на лѣвой отломанной части находились кубы чиселъ отъ 33 до 60. Устройство таблицы кубовъ совершенно такое же какъ таблицы квадратовъ. Слѣва расположены кубы чиселъ, а съ права сами числа. Въ каждой строкѣ повторяется слово *badie*, т. е. *кубъ*, выраженное знакомъ;

*) Производство кирпичей у древнихъ халдеевъ сопровождалось различными религіозными обрядами и церемоніями, оно считалось дѣломъ священнымъ. Существовали законы по которымъ назначалось время въ году, когда именно можно было выдѣлывать кирпичъ. На основаніи этихъ законовъ было установлено, что выдѣлка кирпича должна производиться за пять мѣсяцевъ до постройки зданія, на которое быть необходимымъ этотъ кирпичъ. Мѣсяцъ, въ которомъ выдѣлывался кирпичъ, назывался „мѣсяцъ кирпича", а мѣсяцъ начала постройки „мѣсяцемъ заложенія". До насъ дошли барельефы на которыхъ изображены торжества, сопровождавшія производство кирпича. Въ этой церемоніи принималъ участіе также царь, облаченный въ свои парадныя одѣянія и знаки своего достоинства.

Причину почему былъ назначенъ особенный мѣсяцъ, когда именно дозволялось производство кирпича, объяснена Опертомъ. Происхожденіе законовъ, касающихся времени года, когда предписывалось дѣлать кирпичъ онъ ставитъ въ зависимость отъ климатическихъ условій и обычаевъ страны. Въ Халдеи и Вавилоніи всѣ постройки дѣлались изъ сыраго кирпича, жженый же кирпичъ употреблялся только на облицовку зданій. Въ мартѣ и апрѣлѣ мѣсяцѣ прибывала вода въ Тигрѣ и Евфратѣ, затѣмъ въ маѣ и іюнѣ она спадала и земля, оставшаяся по спаденіи воды представляла удобный матеріалъ для производства кирпича, который немедленно сушили на солнце. Сушили кирпичъ въ іюнѣ мѣсяцѣ, когда солнце еще не бросаетъ такихъ палящихъ лучей какъ въ іюлѣ и августѣ. Если-бы сушили кирпичъ въ эти мѣсяцы, то онъ необходимо трескался-бы и былъ-бы менѣе пригоденъ въ постройкахъ.

Таблица кубовъ имѣла слѣдующую форму. Для полноты представимъ ее въ полномъ ея видѣ:

1 есть кубъ 1
8 есть кубъ 2
27 есть кубъ 3
1. 4 есть кубъ 4
2. 5 есть кубъ 5
3.36 есть кубъ 6
. . . .
. . . .
56.15 есть кубъ 15
1. 8.16 есть кубъ 16
1.21.53 есть кубъ 17
. . . .
. . . .
7.30 есть кубъ 30
8.16.31 есть кубъ 31
9. 6. 8 есть кубъ 32
. . . .
. . . .
57. 2.59 есть кубъ 59
1 есть кубъ 1

Въ переводѣ на нынѣшній ариѳметическій языкъ таблица кубовъ представилась-бы въ формѣ:

$1^3 = 1$
$2^3 = 2$
$3^3 = 27$
$4^3 = 1 \times 60^1 + 4 = 64$
$5^3 = 2 \times 60^1 + 5 = 125$
$6^3 = 3 \times 60^1 + 36 = 216$
. . . .
$15^3 = 56 \times 60^1 + 15 = 3375$
$16^3 = 1 \times 60^2 + 8 \times 60^1 + 16 = 4096$
$17^3 = 1 \times 60^2 + 21 \times 60^1 + 53 = 4913$
. . . .
$30^3 = 7 \times 60^2 + 30 \times 60 = 27000$
$31^3 = 8 \times 60^2 + 16 \times 60^1 + 31 = 29791$
$32^3 = 9 \times 60^2 + 6 \times 60^1 + 8 = 32768$
. . . .
$59^3 = 57 \times 60^2 + 2 \times 60 + 59 = 205379$
$60^3 = 1 \times 60^3 = 216000$

Относительно таблицы кубовъ, замѣтимъ тоже, что мы сказали о таблицѣ квадратовъ, что между числами мы поставили точки ради простоты.

Теперь естественно возникаетъ вопросъ, какъ же выражали вавилоняне числа, у которыхъ недоставало единицы какого нибудь наименованія? Отвѣта на это дать въ настоящее время нельзя, такъ какъ въ табличкѣ кубовъ, даже если бы она дошла до насъ въ своемъ полномъ составѣ, нѣтъ чиселъ, состоящихъ изъ единицы только перваго и третьяго наименованій. Былъ-ли извѣстенъ *нуль* вавилонскимъ математикамъ, или же символъ замѣняющій его, до сихъ поръ неизвѣстно. Въ табличкѣ квадратовъ, въ послѣдней строкѣ, прямо сказано

1 есть квадратъ 1

если-бы былъ извѣстенъ нуль, то они необходимо написали-бы:

1.0. 0 есть квадратъ 1.0

т. е. 60^2 есть квадратъ 60^1

Точно также въ табличкѣ кубовъ послѣ трехзначнаго числа 6.16.29 выражающаго кубъ 29, слѣдуетъ опять двухзначное 7.30, а не трехзначное 7.30.0, выражающее кубъ 30. Мы уже сказали, что чиселъ, съ нулемъ по срединѣ въ табличкахъ квадратовъ и кубовъ не встрѣчается. Весьма можетъ быть, что нулей здѣсь въ концѣ чиселъ не писали, такъ какъ изъ самаго расположенія табличекъ, можно было всегда видѣть настоящее значеніе числа: погрѣшностей всегда легко было избѣжать.

Какъ различали вавилонскіе математики два подобныя числа, каковы напримѣръ:

$$2.48 = 2 \times 60^2 + 48 = 7248$$
$$2.48 = 2 \cdot 60^1 + 48 = 168$$

до сихъ поръ не удалось выяснить, за недостаткомъ какихъ-либо указаній. Подобныя числа не найдены еще ни на одномъ изъ извѣстныхъ въ настоящее время памятниковъ. Весьма вѣроятно, что отвѣтъ на этотъ вопросъ дадутъ дальнѣйшія раскопки въ Сенкерэ.

Впрочемъ, необходимо замѣтить, что вавилонскіе математики могли обойтись и безъ нуля, такъ какъ у нихъ существовали особенные символы, выражающіе различныя степени 60. До сихъ поръ извѣстны названія первой и второй степеней, т. е. *сосъ* (60) и *саръ* (60^2) и промежуточное *неръ* (600).

Особенное вниманіе ученыхъ было обращено на изученіе *передней* стороны *первой* изъ табличекъ, найденныхъ въ Сенкерэ. Этимъ вопросомъ много занимался Лепсіусъ, напечатавшій въ Мемуарахъ Берлинской Академіи Наукъ за 18.7 г. свои изслѣдованія по этому предмету *).

*) Текстъ двухъ столбцевъ передней стороны первой изъ табличекъ изданъ былъ

По мнѣнію Лепсіуса все содержаніе передней стороны *первой* изъ табличекъ относилось къ сравненію двухъ системъ мѣръ длины. На сторонѣ этой было нѣсколько столбцовъ чиселъ; числа стоящія справа столбца принадлежали къ системѣ мѣръ, въ основаніи которой было принято число 60 и всѣ его подраздѣленія и степени. Въ основаніи системы мѣръ длины былъ принятъ *локоть*, сосы и сары имѣли относительно системы, въ основаніи которой было принято число 60, тоже значеніе, какъ километры и миріаметры относительно метрической системы. Точно такимъ же образомъ локоть, дѣлился на различныя степени числа 60; части эти относительно локтя, были тоже, что сантиметры и миллиметры относительно метра. На лѣвой сторонѣ столбцовъ находилась система мѣръ длины, въ основаніи которой былъ также положенъ локоть, но подраздѣленія были уже иныя. Система эта находилась въ близкой зависимости съ правой системой. Система эта принадлежала, по всему вѣроятію, ассиріянамъ; другая же, въ основаніи которой была принята шестидесятичная система счисленія, нужно полагать, принадлежала вавилонянамъ.

Изученіе передней стороны первой таблички, найденной въ Сенкерэ, показало что системы мѣръ, бывшія въ употребленіи въ Ассиріи и Вавилоніи существенно отличаются другъ отъ друга, а также отъ *персидской* системы*). Долгое время всѣ эти три системы принимали за одну и ту же.

Изслѣдованіемъ вопроса о мѣрахъ бывшихъ въ употребленіи въ древней Ассиріи и Вавилоніи занимались многіе ученые, изъ числа которыхъ укажемъ на имена: Лепсіуса, Опперта**), Брандиса, Ленормана и Гинкса.

также Оппертомъ въ его сочиненіи „l'Étalon des mesures assyriennes, fixé par les textes cunéiformes". Величину локтя и другихъ мѣръ Опперть опредѣлилъ на основаніи нѣкоторыхъ указаній, сохранившихся въ табличкахъ, относительно размѣровъ дворцовъ и окружности Вавилона, Ниневіи и Хорсабада. Числа эти онъ сравниваетъ съ числами полученными имъ при тригонометрической съемкѣ, произведенной на мѣстѣ развалинъ Вавилона въ 1853—56 гг.

*) Въ основаніи *персидской системы* мѣръ протяженія лежалъ *arasni* (локоть), равный 0м, 5467, и *vitaçti* (пядь), равная 0м. 27335. Двойной локоть—*bazu* (рука), равнялся 1м, 0934. Футъ носилъ названіе *gama*, онъ равнялся 0м. 3280. Стадія или *açparaça* равнялась 196м. 812. 30 стадій равнялись одному *парасангу* (по персидски *parathanha* или *frathakha*), который въ настоящее время носитъ названіе *farsakh*. Онъ заключалъ 5904м. 36. Двойной парасангъ—*gâva* заключалъ 11808м. 72. Въ настоящее время еще *farsakh* употребляется почти на всемъ Востокѣ при измѣреніи разстояній. Пядь дѣлилась на 10 дюймовъ—*añgusta* (0м. 27335), а añgusta на 6 зеренъ ячменя—*yava* (0м. 00455). Послѣдняя изъ этихъ мѣръ упоминается въ Зендавестѣ.

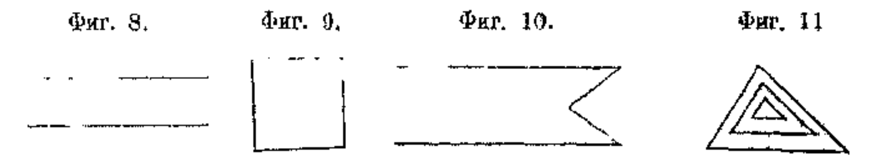
**) Оппертъ полагаетъ, что въ основаніи системы вѣса вавилонянъ былъ принятъ не вѣсъ кубическаго объема воды, равный одному таланту, а вѣсъ объема вина, какъ было принято у римлянъ. Онъ полагаетъ, что одинъ ассирійскій *qab* вина содержалъ 1л.318, принимая удѣльный вѣсъ вина равнымъ 0,99, вѣсъ одного каба равенъ 1к.0214. Полагая

Объ познаніяхъ халдеевъ въ Алгебрѣ намъ почти ничего неизвѣстно. Безъ сомнѣнія многіе алгебраическіе вопросы они умѣли рѣшать. Имъ было извѣстно рѣшеніе нѣкоторыхъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, на что указываетъ рѣшеніе системы уравненій вида:

$$x+y=52 \qquad 48x+36y=2220$$

Перейдемъ теперь къ Геометріи халдеевъ. Все извѣстное о геометрическихъ познаніяхъ древнихъ халдейскихъ ученыхъ въ настоящее время заимствовано изъ отрывковъ дошедшаго до насъ сочиненія геометрическаго содержанія, которое принадлежало библіотекѣ Ассурбанипала *). Сочиненіе это переведено Сэйсомъ и комментировано **). Геометрическія фигуры у древнихъ халдеевъ имѣли значеніе гадательныхъ знаковъ, служащихъ для предсказыванія будущаго. Имѣли-ли халдейскіе математики понятіе о геометрическихъ предложеніяхъ нельзя сказать въ настоящее время. Въ дошедшемъ до насъ сочиненіи геометрическаго содержанія въ особенности обращаютъ на себя вниманіе слѣдующія фигуры: *параллельныя линіи*, названныя *двойными линіями* (фиг. 8), квадратъ (фиг. 9), фигура съ вогнутымъ угломъ (фиг. 10) и система трехъ треугольниковъ (фиг. 11).

Фиг. 8. Фиг. 9. Фиг. 10. Фиг. 11



Былъ-ли извѣстенъ древнимъ халдейскимъ математикамъ прямоугольный треугольникъ, нельзя сказать утвердительно. Прямая линія на сумирскомъ языкѣ носитъ названіе *tim*, т. е. веревка. Съ вѣроятностью можно предположить, что существовалъ способъ измѣренія при помощи веревки. Особеннаго вниманія заслуживаетъ находящійся въ этомъ сочиненіи символъ, состоящій изъ трехъ пересѣкающихся прямыхъ, имѣющій видъ ⁎. Сейсъ символъ этотъ перевелъ терминомъ *угловой градусъ*.

этотъ вѣсъ равнымъ *одной минѣ*, находимъ что вѣсъ одного таланта равенъ 30^k.642. Послѣднее число мало отличается отъ числа принятаго Ленорманомъ.

*) Первые зачатки халдейской Геометріи Канторъ видитъ въ *геомантіи* персидскихъ волшебниковъ, которая состояла въ томъ, что на доскѣ посыпанной пескомъ чертили различныя фигуры, состоящія изъ линій и точекъ. Вслѣдствіе толчковъ сообщенныхъ краямъ доски фигуры эти измѣняли свой видъ и положеніе. Искусство это на Востокѣ было извѣстно подъ именемъ *raml*, т. е. *искусство песка*. Пунктирное искусство часто встрѣчается въ разсказахъ „Тысячи и одной ночи". Остатки этого искусства сохранились до настоящаго времени въ видѣ гаданія на гущѣ кофія.

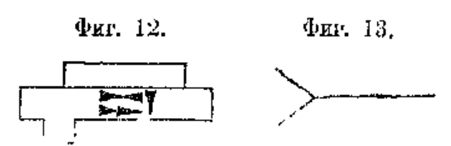
**) Переводъ этотъ составляетъ предметъ статьи: *A. H. Sayce*, Babylonian Augury by means of Geometrical Figures, помѣщенной въ Transactions of the Society of Biblical Archaeology. Vol. IV, Part 2. London. 1876, in-8.

Также было извѣстно халдейскимъ геометрамъ раздѣленіе окружности на шесть равныхъ частей, содержавшихъ каждая по 60 градусовъ. Весьма вѣроятно, что указанный символъ имѣлъ соотношеніе къ такому дѣленію, такъ какъ три симметрично пересѣкающіяся прямыя линіи дѣлятъ пространство на шесть равныхъ частей. Раздѣливъ окружность на шесть равныхъ частей, безъ сомнѣнія, халдейскіе математики замѣтили, что сторона шести угольника равна радіусу круга. Изъ этого они заключили, что приближенная длина окружности равна шести радіусамъ или тремъ діаметрамъ, и такимъ образомъ пришли къ выраженію $\pi = 3$.

Прямой уголъ былъ также извѣстенъ халдеямъ не только въ примѣненіяхъ къ строительному искусству и астрономіи, но и въ Геометріи. Смитъ упоминаетъ о найденной имъ глиняной табличкѣ геометрическаго содержанія, на которой находиться рѣшеніе задачи трисекціи прямаго угла. Къ сожалѣнію табличка эта затерялась, а преждевременная смерть Смита помѣшала ему сообщить по этому предмету дальнѣйшія свѣдѣнія. Была-ли извѣстна халдейскимъ геометрамъ теорема Пиѳагора нельзя сказать утвердительно, но весьма вѣроятно, что они умѣли строить прямой уголъ при посредствѣ треугольника, коего стороны 3, 4 и 5.

Изъ другихъ геометрическихъ фигуръ находящихся на табличкахъ, изданныхъ Сэйсомъ, укажемъ еще на слѣдующія (фиг. 12 и 13). Знаки стоящіе внутри фиг. 12 изображаютъ собою идеографическій знакъ слова „путешествующій".

Фиг. 12. Фиг. 13.



Значеніе и смыслъ многихъ изъ фигуръ этого сочиненія непонятны, во первыхъ потому, что мало извѣстны до сихъ поръ символическія значенія различныхъ фигуръ, а во вторыхъ—упомянутое сочиненіе геометрическаго содержанія дошло до насъ въ неполномъ видѣ.

Также были извѣстны халдейскимъ геометрамъ нѣкоторыя плоскія фигуры; такъ напримѣръ имъ были извѣстны: квадратъ, треугольникъ и весьма вѣроятно также правильный шестиугольникъ.

Выше мы уже упоминали, что особенное вниманіе было обращено халдейскими учеными на изученіе Астрономіи*). При производствѣ астрономи-

*) Мы уже выше упоминали о дѣленіи дня на 60 частей, которое существовало у халдеевъ. Подобное дѣленіе существовало у индусовъ и сохранилось еще до настоящаго времени. Въ древнихъ календаряхъ Ведъ день раздѣленъ на 30 *muhûrta*, изъ которыхъ каждая состоитъ изъ двухъ *nâdikâ*, такимъ образомъ день раздѣленъ на 60 *nâdikâ*. Самый

ческихъ наблюденій они пользовались различными приборами. Въ такихъ приборахъ дошли до насъ только куски инструмента представляющаго сходство съ астролябіей. Изъ сохранившихся надписей на этихъ кускахъ можно заключить, что при посредствѣ этого прибора наблюдали положенія четырехъ звѣздъ въ различные мѣсяцы. Остатки этого интереснаго прибора хранятся въ настоящее время въ Британскомъ Музеѣ.

Изъ другихъ инструментовъ бывшихъ въ употребленіи у халдеевъ упомянемъ еще *гномонъ* и *полосъ* *), которые по словамъ Геродота были заимствованы греками у вавилонянъ. Замѣтимъ здѣсь, что до настоящаго времени не вполнѣ выяснено, что именно за приборы были извѣстны въ древности подъ именами гномона и полоса. Когда именно стали извѣстны эти приборы грекамъ, неизвѣстно: по словамъ Свиды гномонъ сталъ извѣстенъ въ 550 г. до Р. Х., благодаря Анаксимандру, по словамъ же Плинія онъ былъ введенъ Анаксименомъ.

Мы старались, на сколько возможно изложить все извѣстное о математическихъ познаніяхъ древнихъ халдеевъ. Изъ этого краткаго обозрѣнія можно видѣть какъ ничтожны и незначительны наши свѣдѣнія о состояніи Геометріи у халдеевъ. Весьма вѣроятно, что со временемъ найдутся еще другія таблички геометрическаго содержанія, которыя дадутъ намъ болѣе полное и ясное представленіе о развитіи Геометріи въ древней Ассиріи и Вавилоніи. Съ вѣроятностью можно сказать, что развитіе Геометріи у халдеевъ тѣсно было связано съ кабалистическими воззрѣніями и толкованіями,

---

длинный день въ календаряхъ Ведъ полагаютъ равнымъ 18 *muhûrta* или $\frac{3}{5}$ дня, что соотвѣтствуетъ $14^{ч}\,24^{м}$; Птолемей въ своей „Географіи" самый длинный день для Вавилона полагаетъ равнымъ $14^{ч}.25^{м}$. Въ нѣкоторыхъ астрономическихъ сочиненіяхъ китайцевъ продолжительность самаго длиннаго дня полагаютъ равнымъ 60 *Khe*, изъ которыхъ каждая равная часть $14^{м}.24^{с}$. Впрочемъ необходимо замѣтить, что продолжительность самаго длиннаго дня зависитъ отъ географическаго положенія мѣста на земной поверхности.

Въ настоящее время еще существуютъ въ Индостанѣ приборы измѣренія времени, въ которыхъ день раздѣленъ на 60 частей. Одинъ изъ подобныхъ приборовъ былъ доставленъ Мюнхенской Академіи наукъ Германомъ Шлагинвейтомъ. Съ вѣроятностью можно предположить, что раздѣленіе дня на 60 частей было заимствовано индусами у халдеевъ. Описаніе одного изъ подобныхъ календарей индусовъ находится въ статьѣ „*A. Weber*, Ueber den Veda-Kalender, genannt Jyotisham", помѣщенной въ Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin за 1862 г.

*) Нѣкоторые ученые полагаютъ, что подъ именами гномона и полоса вавилонянъ слѣдуетъ понимать солнечные часы: въ первомъ изъ нихъ стержень, бросающій тѣнь, стоялъ вертикально, во второмъ — онъ былъ расположенъ по направленію земной оси.

Вопросъ о солнечныхъ часахъ, бывшихъ въ употребленіи у древнихъ много занималъ Вепке, который написалъ по этому предмету сочиненіе: „*Woepcke*, Disquisitiones archaeologico-mathematicae circa solaria veterum, Berolini, 1842, in-4°.

даваемыми ихъ учеными различнымъ геометрическимъ фигурамъ *). Подобное имѣло мѣсто и въ другихъ наукахъ: астрономія своимъ первоначальнымъ происхожденіемъ *обязана* астрологіи, точно также какъ изъ алхиміи возникла химія.

Этимъ мы и закончимъ обозрѣніе математическихъ познаній древнихъ халдеевъ, но въ заключеніе позволимъ себѣ привесть слѣдующія слова Сэйса: „но, во всякомъ случаѣ, систематическое и упорное изслѣдованіе тайнъ природы никогда не остается безплоднымъ, и потому въ массѣ ложнаго знанія древнихъ халдеевъ заключались и сѣмена истины и блистящихъ открытій, совершить которыя выпало на долю нашего столѣтія".

---

*) Мы уже выше упоминали, что весьма вѣроятно предположеніе, что пиѳагорейцы заимствовали свои воззрѣнія на числа у халдеевъ. Мистическія воззрѣнія и толкованія даваемыя числамъ въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ древнихъ евреевъ ясно носятъ на себѣ слѣды вліянія халдеевъ. Канторъ полагаетъ (*M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I. Leipzig 1880, in-8), что *тетрада* пиѳагорейцевъ получила начало у вавилонянъ и что вообще всѣ подобныя мистическія воззрѣнія на числа бывшія въ Греціи и Китаѣ проникли туда изъ древней Халдеи.

По словамъ Плутарха тетрадой пиѳагорейцы полагали объяснить составъ всего міра и всякой жизни. Она состояла изъ суммы первыхъ четырехъ четныхъ и первыхъ четырехъ нечетныхъ чиселъ, т. е.:

$$36 = 2+4+6+8+1+3+5+7$$

Тетрада также у пиѳагорейцевъ имѣла значеніе клятвы.

Египтяне.

Въ началѣ нашего Очерка, говоря объ Геометріи египтянъ, мы указали на два единственные оставшіеся памятника математической литературы древнихъ египтянъ: это *папирусъ Ринда* и *надписи на стѣнахъ храма*, въ Едфу. Въ настоящее время намъ возможно познакомиться болѣе близко съ содержаніемъ папируса Ринда; при началѣ печатанія настоящаго сочиненія памятникъ этотъ мы не имѣли въ своемъ распоряженіи, а потому могли сказать о немъ весьма мало, въ настоящее же время онъ у насъ на лицо и мы изложимъ его содержаніе, которое лучше всего покажетъ состояніе Алгебры и Геометріи у древнихъ египтянъ.

Благодаря глубокому уваженію древнихъ египтянъ къ умершимъ и ко всему что имъ принадлежало въ жизни, умѣнію предохранить предметы отъ порчи, чему не мало способствовали и климатическія условія страны, до насъ дошло значительное число свертковъ папирусовъ, зарытыхъ въ пескахъ и гробницахъ. На стѣнахъ развалинъ многочисленныхъ храмовъ и другихъ произведеній архитектуры находится также множество надписей. Не смотря на то, что греки, а потомъ римляне, господствовали въ теченіи довольно продолжительнаго времени надъ Египтомъ, но чтенія іероглифовъ они намъ не передали, хотя извѣстно, что во время ихъ господства туземцы ихъ еще употребляли. Въ продолженіи многихъ столѣтій, не смотря на многочисленныя попытки ученыхъ разгадать смыслъ и значеніе іероглифовъ, чтеніе письменъ древнихъ египтянъ оставалось неразрѣшимой загадкой и только въ настоящемъ столѣтіи благодаря трудамъ Юнга и Шампольона вопросъ этотъ былъ окончательно рѣшенъ *).

*) Названіе *іероглифы* дано было греками, и означаетъ „священныя вырѣзки". Писаніе іероглифами заключалось въ томъ, что названіе всякаго предмета выражали его изображеніемъ. Съ теченіемъ времени знаки эти стали терять свой первоначальный видъ и такимъ образомъ произошло такъ называемое *иератическое* письмо. Почти всѣ дошедшіе до насъ папирусы древнихъ египтянъ написаны такимъ письмомъ. Письмо это вполнѣ установилось

Содержаніе папирусовъ пролило нѣкоторый свѣтъ на общественную и домашнюю жизнь древнихъ египтянъ, на ихъ науки и искусства. Въ папирусахъ были найдены: молитвы, разсказы о подвигахъ царей, о ихъ щедрыхъ пожертвованіяхъ храмамъ, протоколы судебныхъ рѣшеній, договоры, заговоры и даже цѣлыя повѣсти. Изъ ученыхъ сочиненій до сихъ поръ наиболѣе извѣстны были три папируса, содержаніе которыхъ относится къ медицинѣ; къ числу ихъ принадлежитъ знаменитый „папирусъ Еберса“, содержаніе котораго знакомитъ насъ съ врачебными познаніями древнихъ египтянъ.

Въ послѣднее время вниманіе ученыхъ было обращено на другое ученое сочиненіе древнихъ египтянъ на „математическій папирусъ Ринда“. Съ содержаніемъ этого сочиненія мы теперь познакомимся.

Въ числѣ многихъ папирусовъ, доставленныхъ въ Англію и пріобрѣтенныхъ Британскимъ Музеемъ, послѣ смерти Ринда, находится одинъ папирусъ, содержаніе котораго относится къ математикѣ. Папирусъ этотъ

уже за 1800 л. до Р. Х. Большая часть знаковъ іератическаго письма имѣютъ еще отдаленное сходство съ соотвѣтствующими имъ знаками іероглифовъ. Начиная съ VII в. до Р. Х. іератическое письмо вслѣдствіе скорописи совершенно теряетъ свою форму и происходитъ такъ называемое *демотическое* письмо. Знаки этого письма уже не напоминаютъ первоначальную форму и чтеніе его сопряжено съ большими затрудненіями. Іероглифы писались безразлично, то справа налѣво, то слѣва направо. Іератическое же письмо писалось всегда справа налѣво.

Было-ли обращено вниманіе ученыхъ александрійской школы на чтеніе письменъ древнихъ египтянъ, неизвѣстно. На сколько извѣстно вопросомъ этимъ занимался *Климентъ Александрійскій*, жившій въ концѣ III в. по Р. Х., который въ V-й книгѣ своего сочиненія „Stromata“, говоря о письмѣ древнихъ египтянъ, упоминаетъ о трехъ родахъ этого письма и указываетъ на ихъ отличіе.

Долгое время всѣ попытки прочитать іероглифы оставались безуспѣшны. Первый значительный шагъ былъ сдѣланъ знаменитымъ Томасомъ Юнгомъ (Thomas Young), который пытался прочесть нѣкоторыя надписи и возстановить египетскую азбуку (1814—18 гг.), но труды его не увѣнчались успѣхомъ. Окончательное рѣшеніе вопроса далъ *Францъ Шампольонъ Младшій* (François Champollion), указавшій, что три рода египетскаго письма — іероглифы, іератическое и демотическое, суть видоизмѣненія одного и того же письма. Іероглифы онъ призналъ за знаки звуковъ, а не представленій, и тѣмъ далъ окончательное рѣшеніе вопроса такъ долго занимавшаго ученыхъ. Результаты своихъ трудовъ Шампольонъ представилъ во Французскую Академію Наукъ въ Сентябрѣ мѣсяцѣ 1822 г. Шампольонъ также указалъ, что въ коптскомъ языкѣ многія грамматическія формы и слова взяты изъ языка древнихъ египтянъ. Коптскій языкъ въ настоящее время употребляется египетскими христіанами при богослуженіи.

Труды Шампольона нашли многихъ послѣдователей и въ настоящее время возникла цѣлая наука — *египтологія*. Изъ числа самыхъ видныхъ представителей этой науки укажемъ на имена: Маріетта (Mariette), Шаба (Chabas), Бругша (Brugsch), Дюмихена (Dümichen), Еберса (Ebers), Бёжнлора, Лепсіуса и мн. др.

вѣроятно былъ купленъ Риндомъ во время своихъ путешествій по Египту. Первый обратилъ вниманіе на этотъ папирусъ Бирхъ, сообщившій въ 1868 г. *) его содержаніе. Затѣмъ въ 1872 г. Бирхъ издалъ текстъ папируса литографически. Въ 1874 г. **) Бругшъ указалъ на формулы, употребленныя въ папирусѣ для обозначенія первыхъ четырехъ дѣйствій, на обозначенія линій и фигуръ и способы изображенія чиселъ древними египтянами; многаго Бругшъ не понялъ, а потому сообщенія его не имѣютъ значенія. Наконецъ въ 1872 г. профессоръ Гейдельбергскаго университета Ейзенлоръ, въ бытность свою въ Лондонѣ, познакомился болѣе подробно съ содержаніемъ этого замѣчательнаго памятника и предпринялъ его издать и объяснить. Послѣ четырехлѣтнихъ усиленныхъ трудовъ, весьма тонкихъ и глубокихъ изслѣдованій, профессору Ейзенлору удалось привести къ концу, съ успѣхомъ, предпринятый имъ трудъ. При своихъ работахъ и при изданіи текста Ейзенлоръ воспользовался литографированнымъ текстомъ папируса Ринда, изданнымъ Бирхомъ. Въ 1877 г. напечатанъ былъ трудъ Ейзенлора подъ заглавіемъ: „Математическое сочиненіе древнихъ египтянъ" ***); въ сочиненіи этомъ кромѣ гіератическаго текста папируса находится переводъ на іероглифы, а также два нѣмецкихъ перевода, одинъ подстрочный, а другой вольный.

Въ предисловіи къ своему труду Ейзенлоръ указываетъ на всѣ тѣ необыкновенныя затрудненія и препятствія, которыя весьма часто приходится испытывать при желаніи познакомиться съ древними рукописями, хранящимися въ различныхъ музеяхъ. Такъ напр. въ Туринскомъ Музеѣ ему не позволили не только снимать со стѣнъ ящики съ папирусами, но даже не захотѣли отворить ихъ. Въ другомъ городѣ директоръ музея дозволилъ ему снять только по два позитива, при помощи фотографіи, а затѣмъ сами негативы были уничтожены. Совершенно справедливо замѣчаетъ Ейзенлоръ, что подобное отношеніе къ уцѣлѣвшимъ памятникамъ наукъ древнихъ народовъ, способствуетъ не къ ихъ сохраненію, а скорѣе къ ихъ истребленію, такъ какъ климаты нѣкоторыхъ городовъ, какъ напр. Лондона и Лейдена, въ которыхъ находятся цѣлыя сокровища древнихъ рукописей, очень влажны, что способствуетъ совершенному разрушенію рукописей, а

---

*) Замѣтка Бирха помѣщена въ Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde, за 1868 г.

**) Статья Бругша помѣщена въ Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde за Novem. Decem. 1874 г. Непонятое Бругшемъ было исправлено Ейзенлоромъ и напечатано въ томъ же журналѣ за Jan. Feb. 1875 г.

***) *Dr. August Eisenlohr*, Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt. *Erster Band*—Commentar, *Zweiter Band*—Tafeln; Leipzig. 1877.

потому необходимо заботиться заранѣе о возможно точныхъ и самыхъ подробныхъ снимкахъ при помощи фотографіи и фотолитографіи, которыя однѣ въ состояніи дать снимки ближе всего подходящіе къ оригиналамъ.

Папирусъ Ринда написанъ гиератически, это не есть подлинное сочиненіе, а копія съ болѣе древняго. Въ началѣ папируса сказано: „сочиненіе это написано въ 33 году, въ 4 мѣсяцѣ времени водъ (Mesori), въ царствованіе царя Ра-а-усъ (Ra-a-us); съ старыхъ рукописей переписано въ царствованіе царя . at, писаремъ Aāhmesu“ *). Есть основанія предполагать, что подлинный текстъ былъ написанъ между 2300 и 2200 гг. до Р. Х. Вирхъ полагаетъ, что оригиналъ съ котораго былъ переписанъ папирусъ, находится также въ Британскомъ Музеѣ; онъ указываетъ на свертокъ кожи, который по его мнѣнію и есть настоящій подлинный текстъ, такъ какъ извѣстно, что употребленіе кожъ, какъ письменнаго матеріала, предшествовало употребленію папируса. Къ сожалѣнію до сихъ поръ не удалось развернуть этотъ свертокъ, а потому предположенія Вирха остаются догадкой.

Папирусъ Ринда не былъ сочиненіемъ предназначеннымъ къ изученію математики, въ родѣ руководства, это скорѣе была настольная—справочная книга, въ которой помѣщены различные вопросы пригодные въ обыденной жизни. Судя по окончанію папируса можно предполагать, что сочиненіе это было составлено для сельскихъ хозяевъ. Въ концѣ папируса сказано: „лови гады и мыши, истребляй различныя дурныя травы, проси бога Ра о теплѣ, вѣтрѣ и высокой водѣ“.

Папирусъ озаглавленъ слѣдующимъ образомъ. „способы при помощи которыхъ можно дойти до пониманія всѣхъ темныхъ вещей, всякихъ тайнъ, заключающихся въ предметахъ“. По содержанію своему папирусъ состоитъ изъ трехъ главныхъ отдѣловъ: Ариѳметики, измѣренія объемовъ (стереометріи) и Геометріи. Опредѣленій никакихъ нѣтъ, подобно опредѣленіямъ находящимся въ сочиненіяхъ по Геометріи; предложеній также никакихъ не доказывается. Сочиненіе это представляетъ просто собраніе различнаго рода задачъ, большая часть которыхъ взяты изъ практики.

Три главные отдѣла, изъ которыхъ состоитъ папирусъ Ринда распадаются на слѣдующія пять частей:

---

*) По мнѣнію Стерна (Stern) фараонъ Ra-a-us былъ извѣстенъ у грековъ подъ именемъ Апофиса. Онъ носилъ также имя Апепа. Время его правленія относятъ къ промежутку времени между 2000 и 1700 гг. до Р. Х.

Относительно времени къ которому можно отнести составленіе подлинника сочиненія нѣтъ никакихъ положительныхъ указаній. Съ вѣроятностью можно предположить, что имя фараона, окончаніе котораго at, было Amenemhat III. Фараона этого относятъ къ числу царей XII династіи, правившей за 3000 г. до Р. Х. Лепсіусъ полагаетъ, что Аменемгатъ III правилъ отъ 2221 г. по 2179 г., а по мнѣнію Лаута (Lauth) отъ 2425 г. по 2383 г. до Р. Х.

I. Ариѳметика, состоящая изъ слѣдующихъ главъ:

1. Дѣленіе числа два.

2. Распредѣленіе хлѣбовъ.

3. Дополненіе дробей.

4. Рѣшеніе уравненій 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

5. Правило дѣленія.

II. Измѣреніе объемовъ и измѣреніе круга.

III. Измѣреніе площадей.

IV. Измѣреніе пирамидъ.

V. Собраніе примѣровъ изъ практической жизни.

Познакомимся вкратцѣ съ содержаніемъ каждой изъ главъ отдѣльно.

I. Ариѳметика.

1. *Дѣленіе числа 2.* Въ первой главѣ математическаго папируса показано дѣленіе числа 2 на всѣ нечетныя числа отъ 3 до 99. Умѣніе подобнаго рода дѣленія было необходимо для египетскихъ математиковъ, такъ какъ имъ были извѣстны только дроби съ числителемъ единицей, за исключеніемъ дроби $\frac{2}{3}$. Дроби напр. вида $\frac{7}{8}$ являлись въ формѣ $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$. Такимъ образомъ всѣ дроби съ числителями не равными единицѣ, за исключеніемъ дроби $\frac{2}{3}$, представлялись въ видѣ суммы дробей съ числителями равными единицѣ. Въ папирусѣ разсматриваются только дроби съ нечетными знаменателями, такъ какъ дроби формы напр. $\frac{2}{48}$ всегда легко приводились къ формѣ $\frac{2}{48}=\frac{1}{24}$.

Для обозначенія дробей съ числителемъ, равнымъ единицѣ, существовалъ особенный символъ, именно, надъ числами знаменателей ставили просто точку*). Для выраженія дроби $\frac{2}{3}$ существовалъ особенный символъ, хотя составителю папируса хорошо было извѣстно, что дробь $\frac{2}{3}$ выражается дробями $\frac{1}{2}\,\frac{1}{6}$; послѣднее разложеніе онъ примѣняетъ въ случаѣ надобности.

Изъ сказаннаго ясно, что однимъ изъ основныхъ вопросовъ, необходимыхъ для читателей папируса, являлся вопросъ о *разложеніи всякой дроби на сумму дробей съ числителями равными единицѣ***). Подтвержденіе

*) Примѣненіе дробей съ числителемъ единицей находится также въ сочиненіяхъ Герона Старшаго. Но на ряду съ этими дробями онъ употребляетъ также и другія.

**) Примѣненіе дробей съ числителями единица, или какъ нѣмцы ихъ называютъ

этому служитъ таблица, находящаяся на первыхъ листахъ папируса. Въ этой таблицѣ предложено рѣшеніе цѣлаго ряда вопросовъ слѣдующаго вида: „раздѣли 2 на 3", „на 5" и т. д., „раздѣли 2 на 17" и т. д. Иными словами, требуется представить выраженія вида:

$$\frac{2}{2n+1}$$

гдѣ n получаетъ всѣ значенія отъ 1 до 49, и въ которомъ знаменатель принимаетъ послѣдовательно значенія ряда нечетныхъ чиселъ отъ 3 до 99, въ видѣ суммы трехъ или четырехъ дробей съ числителями равными единицѣ.

Но всякая дробь, числитель которой равенъ 2, а знаменатель нечетное число, можетъ быть разложена различнымъ образомъ, на дроби съ числителями 1. Такъ напр. дробь $\frac{2}{43}$ допускаетъ нѣсколько разложеній, именно:

$$\frac{1}{24}\ \frac{1}{258}\ \frac{1}{1032}\ ,\quad \frac{1}{30}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{645}\ ,\quad \frac{1}{36}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{645}\ \frac{1}{172}\ \frac{1}{774}\ ,\quad \frac{1}{40}\ \frac{1}{860}\ \frac{1}{1720}\ ,$$

$$\frac{1}{42}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{129}\ \frac{1}{301}\ , \text{ и т. д.}$$

Спрашивается теперь какому изъ подобныхъ разложеній отдавали предпочтеніе египетскіе математики и чѣмъ они руководствовались при выборѣ его? Они руководствовались слѣдующимъ правиломъ: первая дробь разложенія выбиралась такою, чтобы произведеніе ея и знаменателя основной дроби, было всегда больше 1 и меньше 2. Въ приведенномъ выше примѣрѣ за разложеніе принималась форма:

$$\frac{1}{42}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{129}\ \frac{1}{301}$$

Знаменатели послѣдующихъ дробей будутъ кратные знаменателя основной дроби; при этомъ выбирались дроби, коихъ знаменатели, возможно меньшіе кратные первоначальнаго—основной дроби.

Мы уже выше упоминали, что въ математическомъ папирусѣ указаны пріемы дѣленія числа 2 на весь рядъ нечетныхъ чиселъ отъ 3 до 99. Дѣленіе это, какъ мы видѣли, было основано на разложеніи дробей на рядъ дробей съ числителями равными единицѣ. Умѣя дѣлить число 2 на всѣ

Stammbrüche, было извѣстно на Западѣ въ Средніе Вѣка. Въ сочиненіяхъ Леонарда Пизанскаго указаны правила, какъ производить подобное разложеніе.

нечетныя числа отъ 3 до 99, легко можно было на основаніи этихъ разложеній сдѣлать подобное же разложеніе для дробей, коихъ числитель превосходитъ 2, *лишь бы знаменатель былъ* число изъ ряда нечетныхъ чиселъ отъ 3 до 99; подобное разложеніе можно было примѣнить также къ дробямъ, коихъ числитель больше 2, напр. къ дроби $\frac{7}{29}$.

Относительно происхожденія разложеній ряда дробей $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}, \ldots \frac{2}{99}$, находящихся въ математическомъ папирусѣ, съ вѣроятностью можно предположить, что онѣ были отысканы не съ разу, а только длиннымъ рядомъ попытокъ, такъ сказать ощупью. Найденныя разложенія записывались и сохранялись и съ теченіемъ времени къ нимъ прибавлялись новыя.

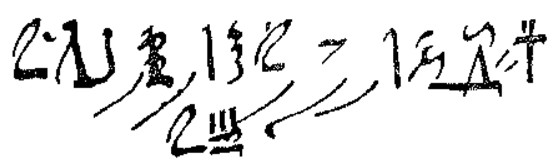
2. *Распредѣленіе хлѣбовъ.* Въ этой главѣ авторъ занимается дѣленіемъ чиселъ отъ 1 до 9 на десятыя части. Чтобы сдѣлать это болѣе понятнымъ дѣйствія свои онъ производитъ на хлѣбахъ. Изъ шести задачъ этой главы до насъ дошла только послѣдняя изъ нихъ въ полномъ видѣ; въ этой задачѣ показано распредѣленіе 9 хлѣбовъ между 10 лицами. Изъ этой задачи и на основаніи сохранившихся отрывковъ другихъ легко могутъ быть возстановлены всѣ задачи этой главы. Въ другихъ задачахъ разсматривалось распредѣленіе 1, 3, 6, 7 и 8 хлѣбовъ между 10 лицами.

3. *Дополненіе дробей.* Подъ именемъ дѣйствія *seqem* (seqemrechnung) въ математическомъ папирусѣ слѣдуетъ понимать рядъ дѣйствій, при помощи которыхъ дополняются данныя числа, состоящія изъ дробей или же цѣлаго числа и дроби, до извѣстнаго даннаго значенія. Дополненіе это дѣлается при помощи дѣйствій умноженія или сложенія. Цѣль подобнаго дѣйствія есть приведеніе дробей къ одному общему знаменателю. Всѣ вспомогательныя дѣйствія написаны, въ папирусѣ, красными чернилами.

4. *Вычисленіе кучъ.* Содержаніе этой главы есть рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Неизвѣстную величину египетскіе математики называли *hau*, т. е. *куча*, а потому и нахожденіе ихъ при рѣшеніи задачъ названо *вычисленіе кучъ* (Haurechnung). Глава эта интересна еще въ томъ отношеніи, что содержаніе ея знакомитъ насъ съ познаніями египетскихъ математиковъ въ Алгебрѣ; все извѣстное по этому предмету заимствовано только исключительно изъ папируса Ринда, такъ какъ другихъ сочиненій или источниковъ не сохранилось.

При рѣшеніи уравненій авторъ папируса слѣдуетъ вполнѣ опредѣленнымъ правиламъ. Онъ начинаетъ съ того, что соединяетъ въ одинъ всѣ члены содержащіе неизвѣстное и его части. При нынѣшнемъ методѣ рѣшенія уравненій—это равносильно перенесенію всѣхъ неизвѣстныхъ вели-

чинъ въ лѣвую часть уравненія. При соединеніи членовъ въ одинъ особенное вниманіе обращено на примѣненіе дробей съ числителями единицами. Въ видѣ примѣра приведемъ одно изъ уравненій, находящихся въ папирусѣ Гинда. Уравненіе это мы заимствовали изъ атласа къ сочиненію Ейзенлора.



въ дословномъ переводѣ знакамъ этимъ соотвѣтствуютъ слова:

Куча, ея $\frac{2}{3}$, *ея* $\frac{1}{2}$, *ея* $\frac{1}{7}$, *ея цѣлое даютъ* 37

Переведенное на нашъ нынѣшній алгебраическій языкъ выраженію этому соотвѣтствуетъ уравненіе:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=37.$$

Приведенное нами изображеніе уравненія есть facsimile подлиннаго іератическаго текста. Переведенное на іероглифы оно представилось-бы въ видѣ:

При сравненіи обоихъ рисунковъ необходимо имѣть въ виду, что іероглифы читались слѣва на право, а іератическое письмо въ обратномъ направленіи, справа на лѣво.

Въ этой же главѣ папируса Гинда находятся первыя указанія на символическіе пріемы, которыми пользовались египетскіе математики. Пріемы эти весьма любопытны и мы укажемъ на нѣкоторые изъ нихъ. Дѣйствіе сложенія они обозначали символомъ Λ, представляющимъ ноги человѣка идущаго справа на лѣво. Дѣйствіе вычитанія они обозначали точно такимъ же символомъ Λ, но имѣющимъ обратное направленіе. Разность двухъ величинъ они выражали символомъ $\overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\leftarrow}}$, представляющимъ три горизонтально-лежащія параллельныя стрѣлы. Для обозначенія дѣйствія сложенія нѣсколькихъ количествъ иногда служилъ знакъ, представляющій сходство съ символомъ ⋜. Изъ другихъ символовъ упомянемъ еще изображеніе совы, которое весьма часто встрѣчается передъ числами, въ смыслѣ двоеточія (:), или выраженія „то есть“.

Приведенные символы, мы полагаемъ, достаточно ясно показываютъ въ чемъ именно состоялъ символическій методъ египетскихъ математиковъ. Въ особенности заслуживаютъ вниманія символы, представляющіе дѣйствія сложенія и вычитанія; они указываютъ прямо, что египтяне имѣли представленіе объ отсчитываніи въ двухъ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, пріемъ этотъ былъ снова примѣненъ европейскими математиками въ сравнительно очень недавнее время.

Большая часть уравненій этой главы даны прямо въ примѣненіи къ числамъ; остальныя относятся къ различнымъ дѣленіямъ египетскихъ фруктовыхъ мѣръ *(bes.ka)*. Въ концѣ нѣкоторыхъ уравненій этой главы показаны пріемы повѣрки задачъ, которая состоитъ въ томъ, что къ найденной величинѣ неизвѣстнаго x, прибавляютъ при помощи сложенія всѣ его части. Полученное число необходимо должно быть равно данной величинѣ уравненія, если только всѣ дѣйствія были произведены правильно. Пріемъ этотъ въ папирусѣ названъ „начало пробы".

Символа соотвѣтствующаго нулю (0) египетскіе математики не имѣли *).

---

*) Понятіе объ отсутствіи чего нибудь, соотвѣтствующее нашему представленію о нулѣ, египетскіе математики выражали изображеніемъ птицы, надъ которой двѣ распростертыя руки. Понятіе это носило названіе *nen*. Дробь $\frac{1}{2}$ изображали знакомъ ⌐ или ⌐| и называли ее *ma*. Дробь $\frac{2}{3}$ изображали знакомъ ⚲ или ⚌ и называли *neb*. Число пять выражалось или пятью черточками ||||| или же изображеніемъ пятиугольной звѣзды ✱; оно носило названіе *ina*. Числа отъ одного до десяти выражались соотвѣтствующимъ числомъ вертикальныхъ палочекъ. Числа 10, 20,... 90 выражались соотвѣтствующимъ числомъ вертикальныхъ дугъ ∩. Числа 100, 200,... 900 выражались соотвѣтствующимъ числомъ знаковъ ©. Тысячи выражали символомъ ⚘. Десятки тысячъ выражаются символомъ указательнаго пальца |. Сотни тысячъ изображеніемъ головастика. Милліонъ изображеніемъ человѣка стоящаго на колѣнахъ съ поднятыми къ небу руками, или же символомъ ◯.

Въ различныхъ символахъ различныхъ чиселъ многіе видѣли представленія того или другаго предмета, такъ напр. въ изображеніи числа 100 видѣли то знакъ посоха жреца, то изображеніе пальмовой палки; въ символѣ числа 1000 видѣли изображеніе лотоса, лампы и т. п.

Первый обратившій вниманіе на числа древнихъ египтянъ и начавшій ими заниматься, былъ французъ *Жомаръ* (Jomard), участвовавшій въ египетской экспедиціи 1799 г. Изслѣдованія свои онъ обнародовалъ въ 1812 г. Наиболѣе всего данныхъ для изученія чиселъ древнихъ египтянъ было почерпнуто въ такъ называемой „гробницѣ чиселъ". Гробница эта была найдена Шампольономъ не далеко отъ деревни Гизе, вблизи большой пирамиды, и названа имъ „гробницей чиселъ" потому, что въ ней находятся указанія и перечисленія стадъ принадлежавшихъ владѣльцу. Изъ этихъ указаній видно, что ему принадлежали; 834 вола, 220 коровъ, 3234 козы, 760 ословъ и 974 овецъ.

5. *Избытокъ—тунну.* Послѣдняя глава ариѳметической части папируса Ринда посвящена цѣлому ряду ариѳметическихъ дѣйствій, названныхъ *тунну* (*tunnu*). Слово *тунну* употреблено въ смыслѣ словъ *избытокъ, расширеніе.* Въ такомъ же смыслѣ слово *тунну* примѣнено въ папирусѣ Ринда, гдѣ выраженіемъ этимъ названа разность между частями, неравномѣрно распредѣленныхъ предметовъ, нѣсколькихъ лицъ. Вопросы, разсмотрѣнные въ этой главѣ относятся къ распредѣленію нѣсколькихъ предметовъ между нѣсколькими лицами при извѣстныхъ условіяхъ. Въ одной изъ задачъ этой главы требуется распредѣлить 100 хлѣбовъ слѣдующимъ образомъ: 50 хлѣбовъ между 6, другія 50 хлѣбовъ между 4 лицами. Въ другой задачѣ требуется распредѣлить 100 хлѣбовъ между 5 лицами такъ, чтобы первыя три получили въ семь разъ больше остальныхъ двухъ.

Въ первой изъ приведенныхъ задачъ авторъ папируса желаетъ составить ариѳметическую прогрессію, начальный членъ которой a, отрицательная разность d, и которая-бы удовлетворяла условію $\frac{a+(a-d)+(a-2d)}{7}=$

$=(a-3d)+(a-4d)$ или $11(a-4d)=2d$, откуда $d=5\frac{1}{2}(a-4d)$.

II. Измѣреніе объемовъ.

Содержаніе этой части измѣреніе объемовъ и вмѣстимости различныхъ помѣщеній, служащихъ для сохраненія зерна и фруктовъ. Помѣщенія эти въ разрѣзѣ имѣютъ четыреугольную или круглую форму. Объемъ ихъ находится умножая площадь основанія на высоту. Размѣры даны въ локтяхъ. Величина египетскаго локтя на основаніи изслѣдованій Лепсіуса равна $0^m.525$ *).

Въ этой части показано вычисленіе площади четыреугольной и круглой фигуръ. Площадь четыреугольника получается умножая два его измѣренія. Пріемъ при помощи котораго авторъ папируса Ринда находитъ площадь круга заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ методъ этотъ существенно разнится отъ употребляемаго нынѣ, а также еще потому, что въ немъ видны первыя попытки рѣшить извѣстную задачу квадратуры круга, надъ которой столько трудились математики, пока наконецъ въ прошломъ столѣтіи Ламбертъ доказалъ ея невозможность **). Площадь круга

---

*) Локоть въ $0^m.525$ носилъ названіе *царскаго локтя*, въ отличіи отъ маленькаго локтя въ $0^m.45$.

**) Статья Ламберта помѣщена въ Мемуарахъ Берлинской Академіи Наукъ за 1768 г. и озаглавлена: „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques“. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что доказательство предложенное Ламбертомъ не вполнѣ удовлетворительное.

Въ другой статьѣ, помѣщенной въ тѣхъ же Мемуарахъ за 1761, Ламбертъ доказы-

авторъ математическаго папируса находитъ на основаніи слѣдующихъ соображеній: онъ находитъ площадь квадрата, равновеликаго площади круга, а для этого онъ дѣлитъ діаметръ d на 9 частей, изъ нихъ беретъ 8 и полагаетъ площадь круга равной $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ или $\frac{64}{81}d^2$. Сравнивая полученное выраженіе для площади круга съ выраженіемъ употребляемымъ нынѣ, находимъ:

$$\frac{64}{81}d^2 = \frac{\pi}{4}d^2$$

или:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$$

откуда:

$$\pi = \frac{256}{81}$$

или:

$$\pi = 3,16$$

дѣйствительная же величина π есть:

$$\pi = 3,1415926\ldots\ldots$$

Выраженіе полученное для π египетскими геометрами заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ оно было получено пріемомъ существенно отличнымъ отъ пріема употребленнаго Архимедомъ, давшимъ для π выраженіе $\frac{22}{7}$ или 3,142. Архимедъ, а за нимъ всѣ его послѣдователи, находили сначала окружность круга по данному діаметру, по формулѣ Ок.$=\pi d$, а затѣмъ уже площадь круга, умножая послѣднее выраженіе на четверть діаметра $\frac{d}{4}$, т. е. формулу Пл.$=\frac{\pi}{4}d^2$. Египетскіе же геометры стремились прямо по данному діаметру найти сторону квадрата равновеликаго площади круга.

На египетскомъ языкѣ названія круга и цифры 9 тождественны, оно *paut*. Весьма вѣроятно, что причина этому дѣленіе діаметра на девять частей для нахожденія площади круга. Въ папирусѣ Ринда находится фигура круга, среди котораго находится изображеніе числа 9. Въ другой задачѣ находится графическое представленіе задачи квадратуры круга, среди квадрата вписанъ кругъ, впрочемъ болѣе похожій на семиугольникъ.

жаетъ, что отношеніе окружности къ діаметру есть величина ирраціональная. Впослѣдствіи Лежандръ упростилъ это доказательство и доказалъ что квадратъ этого отношенія есть также величина ирраціональная.

При этомъ считаемъ не безъинтереснымъ замѣтить, что всѣ чертежи въ папирусѣ Ринда сдѣланы отъ руки, кромѣ прямыхъ линій, которыя вѣроятно чертились линейкой; употребленіе циркуля было вѣроятно неизвѣстно, или же мало примѣнялось, такъ какъ въ многочисленныхъ остаткахъ храмовъ, на стѣнахъ находятся изображенія различныхъ фигуръ, въ томъ числѣ и круговъ, сдѣланныя весьма правильно и точно, къ сожалѣнію нѣтъ никакихъ указаній относительно времени, когда именно были сдѣланы эти фигуры. Вопросъ относительно формы и вида помѣщеній, въ которыхъ сохраняли египтяне зерна представляется еще не вполнѣ выясненнымъ, за недостаткомъ какихъ либо указаній. Рисунки, находящіеся въ папирусѣ Ринда, не достаточно уясняютъ этотъ вопросъ, а потому многое осталось непонятнымъ и не выясненнымъ.

III. Геометрія.

Семь примѣровъ въ папирусѣ Ринда посвящены нахожденію и вычисленію площадей: прямоугольныхъ, четыреугольныхъ, круглыхъ, треугольныхъ и трапецеобразныхъ. Часть папируса, относящаяся къ вопросамъ геометрическаго характера озаглавлена: „указанія для вычисленія полей". Пріемы, приложенные къ измѣренію полей только приближенны. Хотя повидимому содержаніе папируса Ринда было написано, какъ мы уже выше замѣтили, для сельскихъ хозяевъ, для которыхъ математическая точность при измѣреніи имѣла второстепенное значеніе, но весьма вѣроятно можно предположить, что египетскимъ геометрамъ небыли извѣстны болѣе точные формулы и пріемы для измѣренія полей, какъ на то указываютъ іероглифическія надписи на стѣнахъ храма Гора, въ Едфу, гдѣ примѣнены также неточныя выраженія при измѣреніи различныхъ площадей. Послѣднее обстоятельство еще тѣмъ заслуживаетъ вниманія, что въ то время, когда писались надписи въ Едфу были уже извѣстны точныя выраженія для площади треугольника въ функціи высоты, данныя Герономъ Старшимъ. Въ математическомъ папирусѣ площадь равнобедреннаго треугольника находится умножая одну изъ сторонъ на половину основанія. Пріемъ этотъ только приближенный, для полученія же точнаго выраженія необходимо ввесть въ выраженіе площади высоту Ошибка тѣмъ больше, чѣмъ больше уголъ лежащій противъ основанія *). Называя чрезъ a основаніе, чрезъ b сторону

*) Основаніе треугольника египтяне называли *tepro*, что значитъ основаніе, устье; еще въ настоящее время слово tepro на коптскомъ языкѣ значитъ ротъ. Сторону треугольника они называли *merit*, т. е. пристань. Эти же названія носили нижнее основаніе трапеціи и ея ребра (не параллельныя стороны); верхнее основаніе трапеціи называлось *отрѣзкомъ—hak*.

равнобедреннаго треугольника, величина площади треугольника, данная въ папирусѣ Ринда, выразится формулой:

$$\Delta = \frac{a.b}{2}$$

точная же формула, какъ извѣстно, есть:

$$\Delta = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

или

$$\Delta = \frac{a.b}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}$$

Египетскіе геометры опускали множитель:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}$$

или иначе сказать полагали его равнымъ единицѣ. Отсутствіе такого множителя хотя вводило въ выраженіе площади треугольника погрѣшность, но во всякомъ случаѣ весьма ничтожную въ практическомъ отношеніи. Такъ напр. въ одномъ изъ примѣровъ рѣшенныхъ въ папирусѣ, площадь треугольника, коего основаніе 4, а сторона 10, полагается равной 20. Примѣняя здѣсь точный пріемъ и вычисляя множитель опущенный въ формулахъ египетскихъ геометровъ, находимъ для этого множителя выраженіе:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = 0.97979$$

Изъ этого видно, что точное выраженіе площади равнобедреннаго треугольника, коего основаніе 4, а сторона 20, будетъ равно 19.5959, между тѣмъ какъ приближенное немного больше, именно 20. Въ практическихъ приложеніяхъ разницу эту можно считать ничтожной, такъ какъ при этомъ мы дѣлаемъ ошибку немного большую $\frac{1}{40}$.

Неточная формула, примѣненная египетскими геометрами, для нахожденія площади равнобедреннаго треугольника, примѣнялась и впослѣдствіи, не смотря на то, что была уже извѣстна точная формула, данная Герономъ. Въ „Геометріи“ Герберта, жившаго въ XI в. примѣняется также выраженіе, употребленное авторомъ папируса.

Площадь равнобедренной трапеціи находится складывая нижнее и верхнее основанія, и умножая полученную сумму на половину ребра. На-

зывая чрезъ a нижнее основаніе, b верхнее, а c ребро, находимъ выраженіе:

$$S=\frac{a+b}{2}.c$$

Точное же выраженіе какъ извѣстно находится вводя высоту, т. е.:

$$S=\frac{a+b}{2}\sqrt{c^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$$

Ошибка, дѣлаемая египетскими геометрами, заключалась въ опусканіи множителя:

$$\sqrt{1-\left(\frac{b-a}{2c}\right)^2}$$

Примѣняя эти формулы къ одному изъ примѣровъ, рѣшенныхъ въ папирусѣ, находимъ:

$$a=6 \qquad b=4 \qquad c=20$$

$$S=\frac{6+4}{2}.20=100$$

точное же выраженіе будетъ:

$$S=100\sqrt{1-\left(\frac{2}{40}\right)^2}=100\sqrt{\frac{399}{400}}$$

итакъ ошибка заключалась въ опусканіи множителя:

$$\sqrt{\frac{399}{400}}=\frac{19.975}{20}=0.99874$$

Изъ сказаннаго видимъ, что точная формула для площади трапеціи, въ данномъ случаѣ, будетъ:

$$S=5\times19.975$$

или

$$S=99.875$$

приближенная же, какъ мы видѣли выше, равна:

$$S=100.$$

Разница между приближенной и точной площадами есть 0.125, величина незначительная при рѣшеніи практическихъ вопросовъ.

Относительно выраженія для площади равнобедренной трапеціи необходимо замѣтить тоже, что мы уже выше сказали о выраженіи для площади равнобедреннаго треугольника, именно, что неточное выраженіе, ко-

торымъ пользовался авторъ математическаго папируса встрѣчается также въ сочиненіяхъ Герберта, хотя оно было извѣстно въ точной формѣ еще Герону Старшему.

Въ этой же части показано рѣшеніе задачи, относящейся къ нахожденію площади круга. Пріемъ употребленный здѣсь мы уже изложили выше, а теперь только укажемъ на смыслъ этой задачи. Требуется найти площадь круглаго поля, коего діаметръ равенъ 9. Авторъ папируса поступаетъ слѣдующимъ образомъ, онъ говоритъ: „возьми отъ діаметра $\frac{1}{9}$ часть его, т. е. 1, останется 8, умножь 8 на 8, получишь 64, это и будетъ площадь круга". Точная формула дала-бы для площади такого круга выраженіе 63.617. Ошибка дѣлаемая египетскимъ геометромъ равнялась $^{2}/_{5}\,^{0}/_{0}$.

IV. Вычисленіе пирамидъ.

Первыя пять примѣровъ этой части относятся къ вычисленію пирамидъ, шестой же къ вычисленію тѣла, представляющаго сходство съ пирамидой, но болѣе заостренной формы. По своему содержанію этотъ отдѣлъ математическаго папируса можетъ быть отнесенъ къ ученію *о подобіи* и *пропорціональности*, такъ какъ здѣсь разсматриваются различныя соотношенія между нѣкоторыми изъ частей пирамиды *). Соотношенія эти носятъ

*) Въ началѣ нашего Очерка мы упомянули, что нѣкоторыми учеными было высказано мнѣніе относительно назначенія пирамиды Хеопса. Мнѣніе это на столько оригинально и странно, что мы не можемъ пройти его молчаніемъ, тѣмъ болѣе, что подобный взглядъ на пирамиду Хеопса раздѣляютъ англійскій астрономъ Піацци Смитъ и извѣстный французскій аббатъ Муаньо. По предположеніямъ этихъ ученыхъ размѣры пирамиды Хеопса представляютъ полную систему мѣръ протяженій и вѣса древнихъ египтянъ. Соотношенія между численными значеніями различныхъ частей пирамиды служатъ къ опредѣленію отношенія окружности къ діаметру; къ нахожденію длины земной оси; разстоянія земли отъ солнца, удѣльнаго вѣса земли; продолжительности года и сутокъ и т. п.

Подобный взглядъ былъ впервые высказанъ англичаниномъ Джономъ Тайлоромъ (John Tavlor) въ 1859 г. и вскорѣ нашелъ многихъ послѣдователей. Новую теорію весьма горячо отстаивалъ членъ Королевскаго Общества, англійскій астрономъ, Піацци Смитъ (Piazzi Smyth), написавшій по этому предмету нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ главное „Our Inheritance in the great Pyramid; London. 1874". Взгляды и мнѣніе Смита были встрѣчены большею частью ученыхъ съ большимъ недовѣріемъ, и когда Смитъ написалъ рефератъ, по занимаемому его вопросу, и желалъ его прочесть въ засѣданіи Королевскаго Общества, то члены последняго ему въ этомъ отказали. Отказъ этотъ повелъ къ выходу Смита изъ числа членовъ Общества и послужилъ предметомъ цѣлаго ряда писемъ, которыми обмѣнялись Смитъ и президентъ Общества. Однимъ изъ самыхъ усердныхъ послѣдователей новой теоріи явился аббатъ Муаньо, сдѣлавшій извлеченія изъ сочиненій Смита и напечатавшій ихъ подъ заглавіемъ: La grande pyramide pharaonique de nom, humanitaire de fait, ses merveilles, ses mystères et ses enseignements; par *Piazzi Smyth;* traduit de l'anglais par M. l'Abbé *Moigno;* Paris, 1875. in-12.

названіе *seqt*, вѣроятно отъ слова *qet*—подобіе. Что именно понимали египетскіе математики подъ названіями нѣкоторыхъ изъ этихъ частей,

На нѣкоторыя изъ численныхъ соотношеній между размѣрами частей пирамиды, обратилъ вниманіе еще Геродотъ, который говоритъ, что площадь квадрата, построеннаго на высотѣ пирамиды Хеопса, равна площади одной изъ ея боковыхъ сторонъ. Слова эти провѣрилъ и подтвердилъ извѣстный Джонъ Гершель. Дж. Тайлоръ въ своемъ сочиненіи „The great Pyramid, and why it was built, by John Taylor“ высказалъ предположеніе, что пирамида Хеопса была сооружена чтобы передать потомству соотношеніе между окружностью и радіусомъ.

Гершель обратилъ вниманіе еще на слѣдующее обстоятельство: каждая изъ сторонъ пирамиды Хеопса дѣлаетъ съ высотой уголъ въ 38° 10′ 46″. Существуетъ также уравненіе,

$$\cos 38^0\,10'\,46'' = \text{tang}.\,38^0\,10'\,46'' = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0\,.\,7863$$

и

$$\frac{1}{4}\pi = 0\,.\,7854$$

Итакъ видно, что cos и tang угла въ 38° 10′ 46″ весьма мало разнятся отъ $\frac{1}{4}\pi$, а потому весьма легко находится прямая мало разнящаяся отъ четверти окружности. Называя чрезъ α уголъ въ 38° 10′ 46″ и примѣняя слова Геродота видимъ, что

$$\cos\alpha = \text{tang}\,\alpha$$

Изъ этого заключаемъ, что периметръ основанія, раздѣленный на высоту, весьма мало разнится отъ 2π.

Нѣкоторыя указанія на численныя соотношенія между различными частями пирамиды Хеопса помѣщены въ статьѣ *A. S. Herschel'я*, помѣщенной въ „Quarterly Journal“ за 1860 г. pag. 160, а также въ статьѣ „*La plus grande pyramide de Gizeh*“, помѣщенной въ „Nouvelles Annales de Mathématiques“, T. XX. Juillet 1861.

Особенное вниманіе Смитъ обращаетъ на численныя соотношенія между размѣрами, находящагося внутри пирамиды помѣщенія, извѣстнаго подъ названіемъ „царскаго покоя“. Численныя данныя эти служатъ основаніемъ цѣлой системы мѣръ протяженій и вѣса.

Построеніе пирамиды Смитъ относитъ къ 2170 г. до Р. Х., когда звѣзда α Дракона находилась противъ отверстія входа въ пирамиду.

Къ сожалѣнію Смитъ стремится всѣмъ численнымъ даннымъ, относящимся къ пирамидѣ, придавать теологическое толкованіе и объясненіе, такъ напр. численныя величины различныхъ частей внутренности пирамиды суть ничто иное какъ хронологическія данныя, предсказывающія главнѣйшія событія исторіи человѣчества. Въ пирамидѣ, по мнѣнію Смита, были сокрыты пророчества о рожденіи Христа, втораго пришествія и т. д. Въ численныхъ размѣрахъ одного изъ главныхъ корридоровъ пирамиды Смитъ усматриваетъ предсказаніе, что христіанская вѣра будетъ существовать 1882 года, а затѣмъ начнется цѣлый рядъ смутъ, послѣ которыхъ наступитъ второе пришествіе Христа. Къ этому Муаньо дѣлаетъ примѣчаніе, въ которомъ говоритъ, что на основаніи предсказаній Апокалипсиса въ 1882 г. явится антихристъ. Этотъ годъ будетъ роковымъ, не только для христіанской вѣры, но и для магометанской.

какъ напр. *uchatebt* и *piremus* трудно себѣ составить понятіе. По предположеніямъ Ейзенлора и Кантора подъ именемъ *seqt* слѣдуетъ понимать соотношеніе *между діагональю* *uchatebt квадратнаго основанія пирамиды* и ребромъ—*piremus* пирамиды. Соотношеніе это есть ничто иное какъ Cosinus угла, составленнаго ребромъ съ діагональю квадратнаго основанія пирамиды. Называя этотъ уголъ чрезъ β и вычисливъ его на основаніи численныхъ данныхъ, находящихся въ примѣрахъ, приведенныхъ въ математическомъ папирусѣ, находимъ его равнымъ $41^0, 24', 34''$. Зная величину угла β легко вычислить величину угла α, составленнаго апоѳемой пирамиды со стороною квадратнаго основанія. Пользуясь формулой:

$$\sqrt{2}\, tg\beta = tg\alpha$$

находимъ $\alpha = 51^0, 16', 40''$. Это и есть величина близко подходящая ко всѣмъ численнымъ даннымъ, найденнымъ различными учеными, измѣрявшими уголъ наклоненія между основаніемъ и стороной пирамиды. Уголъ этотъ во всѣхъ пирамидахъ почти одинаковъ. Для пирамиды Хеопса наиболѣе точными считаются измѣренія Перринга (Perring), нашедшаго $\alpha = 51^0, 52', 50''$ и полковника Говарда Вейса (Howard Vyse), нашедшаго для того же угла величину $51^0, 51', 14''$.

Послѣдній изъ примѣровъ этого отдѣла относится къ тѣлу, имѣющему форму болѣе заостренную чѣмъ пирамида. Названія различныхъ соотношеній между частями этого тѣла здѣсь уже иныя. Подъ названіемъ *seqt* здѣсь слѣдуетъ понимать tang угла наклоненія боковой стороны тѣла къ основанію.

Изъ этого краткаго обозрѣнія этой части математическаго папируса можно сказать, что содержаніе ея относится къ Тригонометріи. Ребро пирамиды, какъ мы видѣли называли египетскіе математики *piremus*, и весьма вѣроятно предположеніе Ейзенлора, что оттуда произошло греческое названіе *пирамида* (πυραμις). Египетское же названіе этого тѣла онъ полагаетъ было *semer*. Въ этой части математическаго папируса находится нѣсколько фигуръ, представляющихъ пирамиды.

V. Собраніе примѣровъ изъ практической жизни.

Послѣдній отдѣлъ математическаго папируса заключаетъ рядъ примѣровъ относящихся къ вопросамъ изъ обыденной жизни. Вопросы эти относятся большею частью къ домашнему хозяйству; здѣсь авторъ трактуетъ о распредѣленіи хлѣбовъ, платѣ пастухамъ, разсчетахъ съ рабочими, стоимости содержанія птичьяго двора и воловъ и др. На основаніи содержанія этой части папируса Ринда было высказано предположеніе, что сочиненіе это было написано для сельскихъ хозяевъ. Это подтверждается еще тѣмъ,

что въ этомъ отдѣлѣ находится сравнительная таблица между мѣрами зерна *(bescha)* и мѣрами жидкостей *(hin)*. Содержаніе послѣдней части математическаго папируса представляетъ наиболѣе всего затрудненій, такъ какъ вопросъ о различныхъ мѣрахъ бывшихъ въ употребленіи въ древнемъ Египтѣ еще не достаточно вполнѣ разъясненъ въ настоящее время *).

Въ третьемъ примѣрѣ этого отдѣла дано правило, какъ распредѣлить 10 мѣръ зерна между 10 лицами такъ, чтобы каждое изъ предъидущихъ лицъ получило на $\frac{1}{8}$ больше послѣдующаго. Очевидно вопросъ этотъ относится къ ариѳметическимъ прогрессіямъ. Въ этой задачѣ требуется по данной суммѣ S, отрицательной разности d и числу членовъ n ариѳметической прогрессіи найти начальный членъ a. Но какъ извѣстно:

$$a+(a-d)+(a-2d)+\ldots+[a-(n-1)d]=S=na-\frac{n(n-1)}{2}.d$$

откуда:

$$a=\frac{S}{n}+(n-1).\frac{d}{2}$$

Правило приведенное въ папирусѣ при рѣшеніи задачи указываетъ, что автору его была извѣстна вышеприведенная формула, но какими соображеніями онъ руководствовался нельзя сказать утвердительно, такъ какъ въ результатѣ прямо говорится:

$$1\frac{1}{2}\frac{1}{16},\ 1\frac{3}{8}\frac{1}{16},\ 1\frac{1}{4}\frac{1}{16},\ 1\frac{1}{8}\frac{1}{16},\ 1\frac{1}{16},\ \frac{7}{8}\frac{1}{16},\ \frac{3}{4}\frac{1}{16},\ \frac{5}{8}\frac{1}{16},\ \frac{1}{2}\frac{1}{16},\ \frac{3}{8}\frac{1}{16}$$

составляютъ вмѣстѣ 10.

Весьма вѣроятно мнѣніе Кантора, что авторъ математическаго папируса формулу эту заимствовалъ изъ другаго сочиненія математическаго содержанія, или же сочиненіе это предназначалось для учениковъ, имѣвшихъ уже предварительныя познанія въ математическихъ наукахъ.

Другая задача этого отдѣла указываетъ, что египетскіе математики были знакомы *съ геометрическими прогрессіями*. Смыслъ и значеніе приведеннаго въ папирусѣ Ринда примѣра непонятенъ. Примѣръ озаглавленъ *sat sutek*, но значеніе этихъ словъ неизвѣстно. Въ приведенномъ примѣрѣ

*) Вопросъ о мѣрахъ бывшихъ въ употребленіи въ древнемъ Египтѣ, занималъ многихъ ученыхъ. Въ настоящее время въ различныхъ музеяхъ сохраняются египетскіе локти, сдѣланные изъ камня, дерева и металла. Много интересныхъ свѣдѣній объ египетскихъ мѣрахъ можно найти въ статьѣ Лепсіуса „Die altägyptische Elle und ihre Eintheilung“, помѣщенной въ Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; aus dem Jahre 1865“.

слово *sutek* вѣроятно употреблено въ смыслѣ постоянно возрастающихъ степеней или лѣстницы. Лѣстница эта состоитъ изъ ряда членовъ:

7 , 49 , 343 , 2401 , 16807

числа эти суть первыя пять степеней числа 7, т. е.:

7^1 , 7^2 , 7^3 , 7^4 , 7^5

Рядомъ съ этими числами стоятъ іероглифическія представленія, соотвѣтствующія словамъ:

изображеніе, кошка, мышь, ячмень, мѣра.

Что именно выражали эти слова нельзя сказать положительно, но по мнѣнію, высказанному Ейзенлоромъ, названія эти соотвѣтствуютъ первымъ пяти степенямъ. Данныя пять первыхъ степеней числа 7 авторъ папируса складываетъ и получаетъ сумму 19607; на сторонѣ, съ боку, число 2801 помножается на 7 и произведеніе находитъ онъ равнымъ также 19607. Но какъ найдено число 2801 ничего не сказано. Все дѣйствіе расположено слѣдующимъ образомъ:

изображеніе	7	$= 7^1$
кошка	49	$= 7^2$
мышь	343	$= 7^3$
ячмень	2401	$= 7^4$
мѣра	16807	$= 7^5$
сумма	19607	

Вспомогательное дѣйствіе произведено въ слѣдующемъ порядкѣ:

	Лѣстница
.	2801
. .	5602
4	11204
сумма	19607

Относительно происхожденія числа 2801 можно сдѣлать слѣдующее весьма вѣроятное предположеніе. Извѣстно, что сумма членовъ геометрической прогрессіи выражается формулой:

$$a+a^2+a^3+\ldots+a^n=\frac{a^n-1}{a-1}\times a=S$$

примѣняя эту формулу къ нашему частному случаю, найдемъ:

$$S=\frac{16807-1}{7-1}\times 7=\frac{16806}{6}\times 7=2801\times 7$$

Обращая вниманіе на послѣднее выраженіе видимъ, что число:

$$2801 = \frac{16807 - 1}{7 - 1}$$

Изъ этого можно съ вѣроятностью предположить, что автору математическаго папируса было извѣстно нахожденіе суммы членовъ геометрической прогрессіи, а также ея выраженіе

Мы уже выше замѣтили, что въ папирусѣ Ринда не приведено никакихъ доказательствъ различныхъ математическихъ предложеній приведенныхъ авторомъ. Это наводитъ необходимо на предположеніе, что авторъ папируса заимствовалъ свои предложенія изъ другаго неизвѣстнаго намъ въ настоящее время сочиненія, въ которомъ находились всѣ тѣ предложенія, которыми воспользовался авторъ папируса при рѣшеніи различныхъ практическихъ вопросовъ.

Въ концѣ папируса Ринда находится два отрывка, которые не принадлежатъ къ математическому сочиненію. Одинъ изъ нихъ содержитъ вычисленіе, относящееся къ прокормленію воловъ. Вопросъ находящійся въ этомъ отрывкѣ, а равно и знаки чиселъ имѣютъ сходство съ задачей, рѣшенной въ концѣ математическаго папируса. Другой отрывокъ, на сколько возможно судить есть отрывокъ изъ записной книги или журнала, въ которомъ говориться о рожденіи сына и приведены числа. По всему вѣроятію, какъ полагаетъ Ейзенлоръ, это есть отрывокъ дневника, въ которомъ отмѣчались важнѣйшія событія. Отрывки эти были вѣроятно приклеены къ папирусу математическаго содержанія по недоразумѣнію.

Таково, въ общихъ чертахъ, содержаніе этого древнѣйшаго памятника математическихъ познаній древнихъ египтянъ. Содержаніе его показываетъ, что уже въ глубокой древности математическія науки въ Египтѣ достигли значительной степени своего развитія, а потому весьма вѣроятны повѣствованія древнихъ писателей, что греческіе философы свои познанія въ математическихъ наукахъ заимствовали во время своихъ путешествій по Египту, куда ихъ влекло желаніе расширить свои познанія въ наукахъ *).

---

*) Таннери занимался вопросомъ, что именно было заимствовано Ѳалесомъ у египтянъ. Статья озаглавлена: *Tannery.* Thalès de Milet. Ce qu'il a emprunté à l'Egypte. 1880. In-8.

По словамъ Лапласа Пиѳагоромъ и его школой было принято двойное движеніе земли, около солнца и вокругъ своей оси; мнѣніе Лапласа оспариваетъ Иделеръ, но тѣмъ не менѣе оно заслуживаетъ вниманія, такъ какъ многія изъ своихъ познаній Пиѳагоръ заимствовалъ у египтянъ, которымъ по словамъ Макробія (Macrobii Interpretatio in somnium Scipionis a Cicerone confictum, lib. I, cap. 19) было извѣстно движеніе Венеры и Меркурія около солнца. Нѣкоторые изъ древнихъ греческихъ философовъ упоминаютъ, что свои воззрѣнія на систему

Изъ содержанія папируса Ринда видно, что египетскіе математики почти за 3000 л. до Р. Х. достигли слѣдующихъ результатовъ въ математическихъ наукахъ: они умѣли разлагать дроби на рядъ дробей съ числителями равными единицѣ; имъ было извѣстно приведеніе дробей къ одному знаменателю; умѣли рѣшать уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; имѣли понятіе и весьма вѣроятно знали свойства ариѳметическихъ и геометрическихъ прогрессій. Познанія египетскихъ математиковъ въ Геометріи состояли въ слѣдующемъ: умѣли находить приближенно площади равнобедреннаго треугольника, а также трапеціи; была сдѣлана весьма остроумная попытка къ рѣшенію извѣстной задачи „квадратуры круга"; и наконецъ видимъ у нихъ первые слѣды ученія о подобіи и пропорціональности, а также примѣненіе основныхъ двухъ тригонометрическихъ функцій Cos. и Tg.

Другой памятникъ математической литературы древнихъ египтянъ—это *іероглифическія надписи* на стѣнахъ храма Гора въ Едфу*). Объ этомъ

міра они заимствовали у египтянъ. Годъ египтяне полагали равнымъ 365 днямъ, такимъ образомъ, не считая 6 часовъ, начало года необходимо должно было чрезъ каждые четыре года опаздывать на одинъ день. Чрезъ каждые 4×365, т. е. 1461 обращенія земли около солнца подобный періодъ долженъ былъ повторяться. Періодъ этотъ былъ извѣстенъ подъ именемъ *сотическаго періода*, называемаго такъ по имени Сиріуса—Sothis, въ виду того что египтяне замѣтили, что восходъ Сиріуса опаздываетъ каждые четыре года на одинъ день. Появленіе Сиріуса на Востокѣ египтяне считали предзнаменованіемъ разлива Нила, а потому они этой звѣздѣ придавали особенное значеніе, называя ее *Sikor* или *Soris*, т. е. *звѣзда Нила*.

Возобновленіе *сотическаго періода* нѣкоторые писатели древности относятъ къ 138 г. по Р. Х., въ царствованіе Антонина Пія. На основаніи этого полагаютъ, что за начало египетскаго исчисленія слѣдуетъ принять 1323 годъ до Р. Х.

Предсказаніе затмѣній было извѣстно египетскимъ ученымъ уже въ глубокой древности. Нѣкоторые писатели упоминаютъ, что у египтянъ сохранились наблюденія 373 солнечныхъ и 832 лунныхъ затмѣній, имѣвшихъ мѣсто до александрійской эпохи; но, необходимо замѣтить, что положительныхъ указаній по этому предмету до сихъ поръ не существуетъ. Извѣстно только, по словамъ Діодора, что египтяне придавали различнымъ планетамъ различное значеніе, то хорошее, то дурное, и рожденіе животныхъ ставили въ зависимость отъ планетъ. Египетскіе астрономы были вмѣстѣ съ тѣмъ и астрологи, такъ какъ они предсказывали голодъ, болѣзни, наводненія, землетрясенія, появленіе кометъ и т. п. Изъ астрологическихъ сочиненій египтянъ до насъ дошла греческая поэма, написанная египетскимъ жрецомъ *Манефономъ*, жившимъ за 300 л. до Р. Х., озаглавленная „О вліяніи звѣздъ". Кромѣ того извѣстно также нѣсколько папирусовъ астрологическаго содержанія.

*) Іероглифическія надписи на стѣнахъ храма Гора въ Едфу, въ верхнемъ Египтѣ, содержатъ указанія, относящіяся къ количеству земель принадлежавшихъ этому храму и подаренныхъ ему жертвователями. Надписи эти относятся къ 100 г. до Р. Х. Надъ геометрическимъ текстомъ этихъ надписей и надъ ихъ изданіемъ много трудился Ейзендоръ, которымъ онѣ были сняты при помощи фотографіи.

памятникѣ мы уже упоминали въ началѣ нашего Очерка (см. стр. 4). Надписи эти содержатъ указанія и перечисленіе земель подаренныхъ храму Гора Птоломеемъ XI (Александромъ I). Въ надписяхъ приведены размѣры 52 кусковъ земли, которые всѣ вмѣстѣ составляютъ $13209\frac{1}{16}$ *ahe*, т. е. около 600 десятинъ *). Планъ этихъ земель старался возстановить Лепсіусъ, занимавшійся чтеніемъ и изслѣдованіемъ надписей на стѣнахъ храма Гора.

Большая часть кусковъ земли имѣютъ четыреугольную форму и площадь ихъ находится примѣняя выраженіе:

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2} = \frac{(a+b).(c+d)}{4}$$

Эта же формула примѣняется и при вычисленіи площади треугольника, но здѣсь одна изъ величинъ a, b, c, d принимается равной нулю. Относительно возникновенія подобнаго неточнаго пріема для нахожденія площадей четыреугольниковъ и треугольниковъ мы уже высказали предположеніе въ началѣ нашего Очерка (см. стр. 4).

Разсмотрѣнные нами два памятника суть единственныя дошедшія до насъ положительныя указанія на состояніе математическихъ наукъ въ древнемъ Египтѣ. Мы уже выше замѣтили, что содержаніе папируса Ринда не представляетъ сочиненія, предназначеннаго къ изученію математическихъ наукъ, это скорѣе справочная книга. Были-ли у египтянъ сочиненія исключительно математическаго содержанія, цѣль которыхъ была-бы познакомить читателя съ основными началами этихъ наукъ, нельзя сказать утвердительно. Весьма вѣроятно, что подобныя сочиненія существовали, такое предположеніе можно еще сдѣлать на томъ основаніи, что въ папирусѣ Ринда ничего не говорится о параллельныхъ линіяхъ, о перпендикулярахъ, объ измѣреніи при помощи веревки. Между тѣмъ извѣстно, что употребленіе наугольника было извѣстно уже въ глубокой древности египетскимъ архитекторамъ, даже сохранились изображенія этого инструмента. Измѣреніе при помощи веревки было также извѣстно египетскимъ землемѣрамъ **), какъ это видно изъ содержанія свертка кожи, относящагося

На содержаніе одной изъ этихъ надписей обратилъ вниманіе Лепсіусъ и написалъ статью „Über eine Hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu (Appollinopolis Magna) in welcher der Besitz dieses Tempels an Ländereien unter der Regierung Ptolemaeus XI Alexander I verzeichnet ist“, помѣщенной въ „Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; aus dem Jahre 1855“.

*) 2487 прусскихъ морговъ по вычисленіямъ Лепсіуса.

**) Объ измѣреніи при помощи веревки Климентъ Александрійскій въ своемъ сочиненіи „Stromata“ приводитъ слѣдующія слова Демокрита, жившаго въ V в. до Р. Х.: „въ по-

ко времени Аменемгата I, правившаго около 3000 л. до Р. Х. Употребленіе наугольника необходимо требовало знаніе прямаго угла и его свойство, а потому весьма вѣроятно, что было извѣстно также свойство прямоугольнаго треугольника и умѣніе составить такой треугольникъ изъ трехъ прямыхъ линій, коихъ длины равны 3, 4 и 5. Было-ли извѣстно египетскимъ математикамъ свойство такихъ отрѣзковъ, выражаемое формулой:

$$3^2+4^2=5^2$$

т. е. теорема Пиѳагора, неизвѣстно. Умѣніе производить геометрическія построенія не подлежитъ сомнѣнію, на что указываютъ сохранившіяся фигуры на различныхъ гробницахъ и стѣнахъ храмовъ. Изъ такихъ фигуръ упомянемъ: параллелограмъ составленный изъ параллелограммовъ; фигура эта сдѣлана за 4000 л. до Р. Х. и находится на нѣкоторыхъ зданіяхъ Мемфиса. Квадратъ съ изображеніемъ двухъ пересѣкающихся внутри его лемнискатоподобныхъ фигуръ; изображеніе трапеціи, круговъ, раздѣленныхъ на 4, 8 и 12 частей и наконецъ фигура составленная изъ двухъ взаимно пересѣкающихся квадратовъ, имѣющая сходство съ восьмиугольникомъ. Большая часть изъ этихъ фигуръ расписаны въ самые яркіе цвѣта, которые сохранились вполнѣ еще до настоящаго времени, не смотря на то, что прошло нѣсколько тысячелѣтій.

Сохранившіяся фигуры и изображенія различныхъ предметовъ удивляютъ тѣмъ, что въ нихъ видно отсутствіе перспективы. Фактъ этотъ заслуживаетъ вниманія еще и потому, что въ дошедшемъ до насъ „Погребальномъ требникѣ", хранящемся нынѣ въ Луврскомъ Музеѣ, находятся рисунки, выполненные съ необыкновеннымъ искусствомъ и тонкостью. Отсутствіе перспективы пытались нѣкоторые ученые объяснить религіозными воззрѣніями древнихъ египтянъ. Не смотря на неумѣніе, или же нежеланіе, примѣнять перспективу египетскіе художники были основательно знакомы съ *пропорціональностью*, такъ какъ они весьма искусно умѣли производить предметы и изображенія ихъ въ уменьшенномъ масштабѣ. Прежде чѣмъ приступить къ выполненію изображенія предмета египетскіе художники разбивали стѣну на маленькіе квадраты, и затѣмъ уже наносили контуры

строенія линіи данной длины, полученныхъ изъ заключеній, слѣдующихъ изъ предположеній, никто меня не превзошелъ, даже сами египетскіе *гарпедонапты* (γραμμέων συνθέσιος μετὰ ἀποδείξιος οὐδείς κώ με παρήλλαξεν, οὐδ' οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι Ἀρπεδονάπται; Stromata, I, 357; ed. Potter.)[1] Слово гарпедонаптъ въ дословномъ переводѣ значитъ *натягиватель веревки*. Канторъ приводитъ надписи на стѣнахъ храмовъ, изъ которыхъ видно, что веревка и деревянные колья употреблялись при заложеніи храмовъ. Расположить храмы и пирамиды въ извѣстномъ опредѣленномъ направленіи считалось у египтянъ необходимымъ (см. *Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I, Leipzig. 1880. in-8).

предметовъ. Пріемъ этотъ практиковался уже во времена Рамзеса II (Сезостриса), около 1500 л. до Р. Х. Нѣкоторые египтологи желаютъ въ этомъ видѣть первые зачатки приложенія *метода координатъ*, но едва-ли это справедливо; это можетъ только служить подтвержденіемъ тому, что въ древнемъ Египтѣ искусства достигли значительной степени своего развитія.

Древніе египетскіе математики не были чужды различнымъ мистическимъ воззрѣніямъ на различныя соотношенія между числами и различнымъ геометрическимъ фигурамъ придавали толкованія. Весьма вѣроятно, что въ мистическихъ воззрѣніяхъ пиѳагорейцевъ многое обязано первоначальнымъ своимъ происхожденіемъ египетскимъ ученымъ. Проклъ Діадохъ, въ своихъ комментаріяхъ на I-ю книгу „Началъ" Эвклида, говоря о пиѳагорейцахъ упоминаетъ, что углы они считали посвященными извѣстнымъ богамъ, и что трехличный богъ заключаетъ въ себѣ основныя—первоначальныя понятія о прямолинейныхъ фигурахъ. Безъ сомнѣнія сказанное относится и къ египетскимъ математикамъ отъ которыхъ непосредственно заимствовали свои познанія Пиѳагоръ и его ученики.

Вотъ все что намъ извѣстно о состояніи математическихъ наукъ у древнихъ египтянъ *); познаній ихъ въ астрономіи мы только коснулись, такъ какъ это выходитъ за предѣлы нашей задачи. Мы старались возможно кратко изложить все извѣстное въ настоящее время по этому предмету.

---

*) По словамъ Климента Александрійскаго, въ его сочиненіи „Stromates" вся наука египтянъ была достояніемъ жрецовъ. Клименть Александрійскій приводитъ содержаніе 42 книгъ, въ которыхъ заключалась наука жрецовъ; это такъ называемыя книги Гермеса. Содержаніе этихъ книгъ слѣдующее: 10 изъ нихъ заключали мірозданію, ученіе о богахъ, собственно богословіе и различныя религіозныя воззрѣнія. Другія 10 содержали различныя правила и обряды религіозныхъ церемоній. 10 книгъ составляли такъ наз. іерограмматику (т. е. священное письмо); книги эти содержали *Геометрію*, астрономію, географію, космографію, а также науку объ іероглифахъ. 4 книги были посвящены началамъ астрономіи, календарю, опредѣленію времени различныхъ праздниковъ, а также астрологическія примѣты. 2 книги содержали гимны и молитвы, употребляемые при богослуженіи; и, наконецъ 6 книгъ относились къ медицинѣ, въ нихъ изложены были способы леченія различныхъ болѣзней и ранъ, а также говорилось о женщинахъ.

(Болѣе подробно объ этомъ см. въ сочиненіи: *Ed. Roth*, Geschichte der Abendländischen Philosophie. Bd. I, въ главѣ „Der ägyptische Glaubenskreis". 1846. Mannheim. in-8).

Мы уже выше замѣтили (см. стр. 5), что Бретшнейдеръ относится съ недовѣріемъ къ познаніямъ древнихъ египтянъ въ наукахъ.

Китайцы.

Всѣ наши свѣдѣнія о развитіи математическихъ наукъ въ Китаѣ весьма скудны, причина этому, вѣроятно, малое знакомство съ китайскимъ языкомъ вообще и съ китайской литературой въ особенности. Почти во всѣхъ сочиненіяхъ, въ которыхъ говорится о математическихъ познаніяхъ китайцевъ высказывается мнѣніе, что математическія науки въ Китаѣ находились на весьма низкой ступени своего развитія. Оспаривать подобное мнѣніе, въ настоящее время, за недостаткомъ фактическихъ доказательствъ, едва-ли возможно, но тѣмъ не менѣе несомнѣнно, что математика у китайцевъ достигла извѣстной степени развитія, на что указываютъ извѣстныя въ настоящее время сочиненія, написанныя по этой наукѣ. Весьма вѣроятно, что со временемъ, когда литература китайцевъ станетъ болѣе извѣстна, наши свѣдѣнія о развитіи математическихъ наукъ въ Китаѣ расширятся; но во всякомъ случаѣ можно съ достовѣрностью сказать, что познанія китайцевъ въ математическихъ наукахъ значительно отстали отъ познаній: грековъ, индусовъ и другихъ народовъ, въ тѣхъ же наукахъ. Многіе ученые утверждаютъ, что всѣ свои познанія въ математическихъ наукахъ китайцы заимствовали отъ иностранцевъ, и что самостоятельнаго развитія математики у нихъ не существовало. Но такое мнѣніе, мы полагаемъ, слишкомъ смѣлымъ, такъ какъ извѣстно, что промышленность и искусства, въ Китаѣ, достигли высокой степени своего развитія, еще въ самой глубокой древности *). Многое, съ чѣмъ европейцы познакомились въ недавнее время,

*) Нѣкоторые ученые утверждаютъ, что китайцы за много тысячелѣтій до Р. Х. достигли уже значительной степени развитія. Подобное мнѣніе высказалъ также Шлегель въ своемъ интересномъ сочиненіи. *Gus. Schlegel*, Uranographie chinoise (Sing-Chin-Khao-Youen) ou preuves directes que l'astronomie primitive est originaire de la Chine, et qu'elle a été empruntée par les anciens peuples occidentaux à la sphère chinoise. T. I—II, avec Atlas. Leyde. 1875 gr. in-8.

По мнѣнію Шлегеля система зодіака была извѣстна китайцамъ за 18000 лѣтъ до Р. Х. Указанное нами сочиненіе содержитъ много интересныхъ данныхъ, относящихся къ вопросу о познаніяхъ китайцевъ въ различныхъ наукахъ.

китайцамъ было извѣстно уже давно. Книгопечатаніе *), компасъ, порохъ, висячіе мосты **), шелковыя матеріи, артезіанскіе колодцы, бумага, механическія сѣялки, фарфоръ, освѣщеніе, имѣющее сходство съ газовымъ, все это знали китайцы въ самой глубокой древности, а это прямо указываетъ на высокую степень культуры страны ***).

Сами китайцы утверждаютъ, даже и въ настоящее время, что имъ извѣстны всѣ науки ****), что не они заимствовали нѣкоторыя изъ своихъ познаній у иностранцевъ, а наоборотъ, иностранцы все заимствовали у нихъ. Если что и незнакомо имъ, то это случилось послѣ великаго сожженія книгъ, бывшему въ 213 г. до Р. Х. Благодаря такому высокому мнѣнію о своихъ познаніяхъ, науки въ Китаѣ не могли свободно развиваться, чему еще не мало способствовала замкнутость страны и трудный доступъ въ нее европейцамъ и вообще иностранцамъ. Какъ смотрѣли сами китайцы на распи-

*) Печатать книги начали въ Китаѣ, на сколько извѣстно, въ первый разъ въ 952 г. Печатаніе производилось при посредствѣ деревянныхъ досокъ, на которыхъ былъ вырѣзанъ текстъ. *Подвижныя буквы были* также извѣстны, но скоро оставлены.

Игральныя карты были уже извѣстны китайцамъ въ 1120 г. Рисунокъ древнихъ европейскихъ картъ очень напоминаетъ китайскія карты.

**) Висячіе мосты на желѣзныхъ цѣпяхъ упоминаются въ путешествіи предпринятомъ тремя китайскими монахами въ Тибетъ, въ 518 г. по Р. Х.

***) Многія замѣчательныя усовершенствованія получили свое начало въ Китаѣ. Такъ напримѣръ: въ XI в. въ Китаѣ существовали вполнѣ правильно организованныя пожарныя команды, бумажныя деньги и векселя также заимствованы у китайцевъ. Въ IX в. арабы застали въ Китаѣ почты и паспорты.

Весьма подробное описаніе состоянія Китая въ XIII в. далъ извѣстный венеціанецъ Марко Поло, путешествовавшій по всему Востоку въ продолженіи 23 лѣтъ и возвратившійся въ 1295 г. на родину. Въ 1298 г. онъ описалъ свое путешествіе, но разсказъ его встрѣтилъ только насмѣшки; автора считали помѣшаннымъ и прозвали *милліономъ*, а домъ его *Cha Milione*, такъ какъ современники Марко Поло были убѣждены, что повѣствованіе его есть произведеніе фантазіи. Во время своихъ долголѣтнихъ странствованій Марко Поло посѣтилъ: Китай, Индію, Персію, Суматру, Яву, Кавказъ и др. страны. Многое виданное имъ подтвердилось только въ весьма недавнее время, а потому можно сказать, что сочиненіе Марко Поло не утеряло своего значенія до сихъ поръ.

Путешествіе свое Марко Поло написалъ первоначально на французскомъ языкѣ. Впослѣдствіи оно было нѣсколько разъ напечатано почти на всѣхъ болѣе извѣстныхъ языкахъ. Одно изъ лучшихъ изданій слѣдующее: *Marco Polo*, il milione, pubblicato e illustrato dal Baldelli, Firenze, 1827, 2 *vol.* in-4. Путешествіе Марко Поло издано также на русскомъ языкѣ.

****) На сколько заслуживаютъ довѣрія разсказы китайцевъ о ихъ высокомъ умственномъ развитіи и богатствѣ литературы видно по существующимъ еще въ настоящее время преданіямъ; такъ напримѣръ они говорятъ что у нихъ существовало энциклопедическое сочиненіе „Jun-lo-ta-tien“, состоящее изъ 15000 томовъ. Другое сочиненіе, также энциклопедическаго содержанія, предпринятое по повелѣнію императора Кiу-Лонга, должно было состоять изъ 160000 томовъ, но изъ нихъ было написано только болѣе 100000!

реніе своихъ познаній, можно видѣть изъ словъ извѣстнаго ихъ философа Кхунъ-дзы (Конфуція), жившаго въ V в. до Р. Х., который въ одномъ изъ своихъ изрѣченій, обращенныхъ къ ученикамъ своимъ, сказалъ: „знать, что намъ извѣстно извѣстное, и знать что намъ неизвѣстно неизвѣстное, въ этомъ состоитъ истинная наука“. Весьма понятно на сколько плодотворно могло дѣйствовать подобное изрѣченіе на умственное развитіе своихъ послѣдователей!

Все что намъ извѣстно о развитіи математическихъ наукъ въ Китаѣ, заимствовано изъ немногихъ, доступныхъ въ настоящее время, сочиненій извѣстныхъ по этому предмету *).

Мы въ общихъ чертахъ укажемъ на содержаніе главныхъ сочиненій, математическаго содержанія, китайцевъ. Но, необходимо предварительно замѣтить, что отдѣльныхъ сочиненій по Геометріи, Ариѳметикѣ, Алгебрѣ и т. п. въ китайской математической литературѣ несуществуетъ, а въ каждомъ математическомъ сочиненіи говорится обо всѣхъ этихъ наукахъ. Подобное имѣло мѣсто у всѣхъ народовъ. Въ виду сказаннаго и намъ, говоря объ историческомъ развитіи Алгебры въ Китаѣ, необходимо прійдется коснуться всей математики китайцевъ вообще; къ этому насъ побуждаетъ еще и то

*) Во всѣхъ извѣстныхъ намъ „Исторіяхъ математическихъ наукъ“ вопросъ о состояніи и развитіи математики въ Китаѣ, разобранъ весьма поверхностно. Исключеніе представляетъ недавно вышедшее сочиненіе *Moritz Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I Bd. Leipzig, 1880 in-8, въ которомъ изложено, сравнительно полнѣе и обстоятельнѣе, все извѣстное о развитіи математическихъ познаній среди жителей Небесной имперіи.

Спеціальныхъ сочиненій по исторіи математическихъ наукъ въ Китаѣ нѣтъ. Причина этому вѣроятно та, что среди незначительнаго числа синологовъ существуетъ весьма мало лицъ основательно знакомыхъ съ математикой. Только этимъ и можно объяснить наше незнакомство съ математическими познаніями китайцевъ.

Почти все извѣстное въ настоящее время о состояніи и развитіи математическихъ наукъ въ Китаѣ, заимствовано изъ интересной статьи англичанина *Александра Вилье* (Alexandre Wylie), живущаго въ Шанхаѣ, озаглавленной „Jottings on the science of chinese arithmetic“. Статья эта была помѣщена сначала въ журналѣ „North China Herald“ за 1852 г., а потомъ въ „Shangae Almanac for 1853 and Miscellany printed Schangae“. Къ сожалѣнію намъ не удалось достать поименованныхъ сочиненій; судя по извлеченіямъ сдѣланнымъ Бернацкимъ, труды Вилье заслуживаютъ особеннаго вниманія, тѣмъ болѣе что онъ извѣстенъ не только какъ синологъ, но и какъ лицо хорошо знакомое съ математикой. Изъ его трудовъ укажемъ еще на изданіе „Началъ“ Евклида на китайскомъ языкѣ. Сочиненіе это озаглавлено: „Translation of Euclid's Elements, Book VII to Book XV, into chinese by Wylie. Shanghae 1857, 3 vol. in-8“.

Извлеченія, сдѣланныя Бернацкимъ, озаглавлены: „*Biernatzki*, Die Arithmetik der Chinesen“ и „Arithmétique et Algèbre des Chinois“. Первая статья помѣщена въ „Journal für die reine und angewandte Mathematik, T. 52“ за 1856 г., а вторая въ „Nouvelles annales de Mathématiques“ за Mai, Juin 1862 и Décembre 1863 гг.

обстоятельство, что говоря объ развитіи Геометріи въ Китаѣ, въ началѣ настоящаго сочиненія, мы многое пропустили и обошли молчаніемъ, такъ какъ не имѣли подъ рукой источниковъ. Въ настоящее же время мы считаемъ умѣстнымъ пополнить этотъ пробѣлъ.

Первыя указанія на сочиненіе математическаго содержанія находятся въ „Полной исторіи Китая (Tung-kin-kang-muh)“, въ которой упоминается, что императоръ Гвангъ-ти (Hwang-ti), жившій за 2637 г. до Р. Х., повелѣлъ одному изъ своихъ министровъ Лишану (Lischan) составить сочиненіе, подъ заглавіемъ: *„Девять отдѣловъ Ариѳметики* (Kiu-tschang)“ *). Не смотря на то, что положительныхъ указаній нѣтъ, когда именно написано вышеупомянутое сочиненіе, но не подлежитъ сомнѣнію, что оно написано въ весьма отдаленное время, такъ какъ во всѣхъ сочиненіяхъ математическаго содержанія китайцевъ, его считаютъ основнымъ и первымъ написаннымъ по математикѣ.

Прежде чѣмъ мы перейдемъ къ разсмотрѣнію другихъ сочиненій математическаго содержанія, написанныхъ китайцами, изложимъ вкратцѣ содержаніе „Девяти отдѣловъ Ариѳметики“. Сочиненіе это заключаетъ 246 вопросовъ и раздѣлено на 9 главъ. Разсмотримъ каждую изъ главъ отдѣльно.

Глава I озаглавлена „измѣреніе полей (Fang-tien)“ **). Въ началѣ изложено какъ производятся дѣйствія умноженія и дѣленія; о сложеніи и вычитаніи ничего не говорится, такъ какъ авторъ сочиненія, вѣроятно, предполагаетъ, что эти основныя дѣйствія уже извѣстны читателямъ. Затѣмъ указаны способы измѣренія полей различныхъ формъ, какъ то: треугольныхъ, четыреугольныхъ, полукруглыхъ, круглыхъ и т. п. Для нахожденія площади треугольника указано правило: умножить основаніе на половину высоты. Для нахожденія площади круга авторъ предлагаетъ шесть способовъ, которые можно выразить слѣдующими формулами:

$$r^2 \qquad \frac{1}{3}.\pi^2r^2 \qquad \frac{1}{12}.4\pi^2r^2$$

$$\frac{1}{4}.3.4r^2 \qquad \frac{1}{4}.2r.2\pi r \qquad 3r^2$$

Отношеніе окружности къ діаметру авторъ полагаетъ равнымъ $3:1$, т. е. $\pi = 3$. Впрочемъ, нѣкоторые изъ позднѣйшихъ комментаторовъ „Девяти отдѣловъ

*) Другому министру, того же императора, *Шеу-ли* (Cheou-li) китайцы приписываютъ изобрѣтеніе *Суан-пана* (Swan-pan), т. е. коммерческихъ счетовъ.

**) Въ дословномъ переводѣ заглавія главъ слѣдующія: 1-я носитъ названіе *квадратныя поля*, 2-я—*рисъ и деньги*, 3-я—*различные раздѣлы* и т. д.

Ариѳметики" говорятъ, что автору этого сочиненія были извѣстны также и болѣе точныя выраженія для π. Такъ напримѣръ въ сочиненіи „Мей-су (Meih-suh)", написанномъ въ концѣ VI в. по Р. Х. Тщу-Тшунгъ-Че (Tsu-Tschung-tsche), находится выраженіе $\pi = \frac{22}{7}$; а въ другомъ сочиненіи, написанномъ Ліу-Гвуи (Liu-Hwuy), жившимъ неизвѣстно въ какое время, находится выраженіе 157 : 50, т. е. $\pi = 3,14$. Для площади сегмента дано выраженіе, которое можно выразить слѣдующей формулой:

$$\frac{\operatorname{Sin} a(1 - \operatorname{Cos} a) + (1 - \operatorname{Cos} a)^2}{2}$$

полагая при этомъ $r = 1$. Кромѣ этого выраженія указано еще другое.

Глава II озаглавлена „о пропорціяхъ (Schuh-pu)"; въ ней указаны правила, при помощи которыхъ опредѣляются цѣны на рисъ, смотря по его качеству и роду.

Въ основаніи системъ мѣръ и вѣса положенъ музыкальный инструментъ, духовая труба Гвангъ-тсунгъ (Hwang-tsung). Мы вкратцѣ изложимъ эту любопытную систему мѣръ протяженія и вѣса. Длина трубы была раздѣлена на 90 равныхъ частей, изъ которыхъ каждая равнялась одному *фуну* (fun—около линіи); 10 фуновъ составляли одинъ *тсунъ* (tsun—около вершка); 10 тсуновъ составляли одинъ *ши* (schih—около фута). Труба вмѣщала въ себѣ 1200 зеренъ рису; *10 полныхъ трубъ составляли одинъ го* (ho); 10 го составляли одинъ *шингъ* (sching—около мѣрки). 1200 зеренъ рису вѣсили 12 *тшу* (tschu); 24 тшу составляли 1 *леангъ* (leang), а 16 леанговъ составляли 1 *кинъ* (kin—около фунта). Итакъ мы видимъ, что въ основаніи мѣръ длины и емкостей лежала десятичная система, а въ основаніи мѣръ вѣса—двѣнадцатиричная система *).

*) Десятичная система счисленія и такъ называемая ариѳметика положенія были извѣстны китайцамъ задолго до европейцевъ; указанія на это можно найти въ сочиненіи подъ заглавіемъ „Десять отдѣловъ искусства счисленія (Su-scheu-kiu-tschang)", написанное *Тсиі-Киу-Тшау* (Tsin-Kiu-tschau) въ 1240 г.

Въ Китаѣ существуетъ нѣсколько системъ знаковъ для изображенія чиселъ, изъ нихъ самая простая это такъ называемые „купеческіе знаки", состоящіе просто изъ палочекъ; первыя пять цифръ обозначаются соотвѣтствующимъ числомъ черточекъ, остальныя четыре цифры различной комбинаціей этихъ черточекъ. Въ этой системѣ знаковъ существуетъ также нуль, который изображается кружкомъ. Числа пишутся совершенно такъ какъ и въ настоящее время при нынѣ существующей системѣ нумераціи и читаются также отъ лѣвой руки къ правой. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что сказанное относится только къ купеческимъ знакамъ. Съ вѣроятностью можно предположить, что подобные знаки обязаны своимъ первоначальнымъ происхожденіемъ тѣмъ нарѣзамъ, которые въ древности дѣлали почти всѣ народы

Глава III заключаетъ „правило товарищества (schwäi fun)“, при чемъ указаны примѣры дѣленія имущества между нѣсколькими лицами. Большая часть примѣровъ подобрана такъ, что различныя численныя соотношенія между частями выражаются ариѳметическими прогрессіями.

Глава IV носитъ названіе „дѣленія (schaou kwang)“; содержаніе ея извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней. Правила тѣ же, какъ и употребляемыя въ настоящее время. Данныя правила прилагаются не только къ квадратамъ и кубамъ, но и къ параллелограммамъ и параллелепипедамъ. Числа носятъ названія фигуръ и тѣлъ, подобно какъ у греческихъ геометровъ. Степеней выше третьей авторъ не упоминаетъ. Глава эта содержитъ 24 задачи.

Глава V занимается „измѣреніемъ объемовъ (schang kung)“, она составляетъ какъ бы продолженіе предыдущей главы. Предметъ ея рѣшеніе нѣкоторыхъ стереометрическихъ задачъ, какъ напримѣръ: построеніе стѣнъ, зданій, башенъ, рвовъ, укрѣпленій и т. п. Кромѣ того указаны правила измѣренія объемовъ различныхъ тѣлъ, какъ то: пирамидъ, конуса, призмы и т. п. Въ концѣ этой главы показаны способы измѣренія различныхъ способовъ путешествовать, какъ напр. верхомъ, пѣшкомъ, на лодкѣ и т. д.

на палочкахъ (бирках) для обозначенія того или другаго числа предметовъ. Купеческіе знаки китайцевъ имѣютъ слѣдующій видъ:

𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Нуль по китайски носитъ названіе *ling*. Число *десять* изображается обыкновенно знакомъ —|—. Когда пишутъ большія числа, то вышеприведенные знаки видоизмѣняются, чтобы избѣгать путаницы, такъ напримѣръ вмѣсто 𝍣 пишутъ 𝍬 или ✕, но во всякомъ случаѣ число черточекъ остается всегда одно и тоже. *Для примѣра приведемъ число, заимствованное изъ* вышеупомянутаго нами сочиненія. Изъ этого примѣра легко видѣть какъ производили китайцы дѣйствіе вычитанія:

𝍠 𝍬 𝍦 O O O O	— 1470000
𝍮 ✕ 𝍣 𝍥 ✕	64464
𝍠 𝍬 O 𝍭 𝍤 𝍫 𝍮	— 1405536

Относительно происхожденія десятичной системы счисленія у китайцевъ существуетъ слѣдующій разсказъ: однажды императоръ Фоги (Fohi жилъ, по словамъ китайцевъ за 2800 л. до Р. Х., ему приписываютъ изобрѣтеніе письменъ) увидѣлъ дракона, выходящаго изъ Желтой рѣки, у котораго на спинѣ была изображена десятичная система счисленія. По другому разсказу: великій философъ Іу (Iu) увидѣлъ черепаху, выходящую изъ рѣки Ло, у которой на спинной чешуѣ была также изображена десятичная система счисленія. Въ нѣкоторыхъ математическихъ сочиненіяхъ китайцевъ оба эти разсказа изображены на рисункахъ.

Глава VI озаглавлена „правила смѣшенія (keun schu)“. Въ этой главѣ разсмотрѣны вопросы, касающіеся распредѣленія различныхъ налоговъ, при чемъ принято во вниманіе количество земли и пароднаселенія; другіе вопросы относятся къ цѣнности различнаго рода товаровъ и т. п. Изъ вопросовъ, рѣшенныхъ въ этой главѣ, укажемъ на слѣдующую задачу: клѣтка заключаетъ неизвѣстное число фазановъ и кроликовъ; извѣстно только, что вся клѣтка содержитъ 35 головъ и 94 ноги; требуется узнать число фазановъ и число кроликовъ? Отвѣтъ: 23 фазана и 12 кроликовъ.

Глава VII носитъ названіе „избытокъ и недостатокъ (Yin nuh)“; въ ней рѣшены различнаго рода вопросы, относящіеся къ распредѣленію товаровъ. Въ видѣ примѣра приведемъ одну изъ задачъ этой главы: нѣкоторое число купцовъ купили нѣкоторое число товаровъ; если каждый изъ купцовъ заплатитъ по 7 кашовъ (kasch), то останется 3 каша лишнихъ; если же каждый изъ купцовъ заплатитъ по 5 кашовъ, то недостанетъ 4 каша. Требуется опредѣлить число купцовъ и число товаровъ? Отвѣтъ: 7 купцовъ и 53 товаровъ.

Глава VIII занимается рѣшеніемъ уравненій, которыя по китайски носятъ названіе *фангъ-тшингъ* (fang-tsching). Въ этомъ отдѣлѣ показано употребленіе знаковъ плюсъ (tsching) и минусъ (fu), и на 18 примѣрахъ показано какъ при посредствѣ извѣстныхъ величинъ, при помощи уравненій, могутъ быть отысканы неизвѣстныя величины. Изъ примѣровъ этой главы укажемъ на слѣдующій: 5 воловъ и 2 барана стоютъ 10 *таэловъ* (taël) золотомъ, а 2 вола и 8 барановъ—8 таэловъ; требуется узнать цѣну одного вола и одного барана? Отвѣтъ: волъ стоитъ 1$\frac{13}{21}$ таэла, а баранъ $\frac{20}{21}$ таэла.

Глава IX по своему содержанію относится къ Тригонометріи, по китайски *кеу-ку* (keu-ku). Въ этой главѣ рѣшено 24 вопроса, относящіеся къ прямоугольному треугольнику; всѣ эти вопросы рѣшены на основаніи свойствъ прямоугольнаго треугольника. Какъ примѣры вопросовъ рѣшенныхъ въ этой главѣ укажемъ на слѣдующіе:

Примѣръ 1. Среди озера, имѣющаго видъ квадрата, коего сторона 10 футовъ, ростетъ тростникъ, который выходитъ изъ воды на 1 футъ; нагнувъ тростникъ верхушка его достигаетъ до берега озера. Спрашивается какъ глубоко озеро? Отвѣтъ: 12 футовъ.

Примѣръ 2. Бамбуковая трость, имѣющая 10 футовъ вышины, сломана вверху; если притнуть верхній конецъ къ землѣ, то онъ отстоитъ отъ основанія тростника на 3 фута. Спрашивается какой длины отломанная часть? Отвѣтъ 4$\frac{11}{20}$ фута.

Въ первой изъ приведенныхъ задачъ требуется найти гипотенузу пря-

моугольнаго треугольника по данной сторонѣ (5) и разности (1) двухъ другихъ сторонъ. Во второй—извѣстно основаніе (3) и сумма двухъ другихъ сторонъ (10).

Таково содержаніе, въ общихъ чертахъ, древнѣйшаго изъ извѣстныхъ математическихъ сочиненій китайцевъ. Изъ приведеннаго краткаго обозрѣнія этого памятника можно видѣть какъ много онъ заключаетъ интереснаго. Безъ сомнѣнія прошелъ не малый промежутокъ времени до той эпохи когда были написаны „Девять отдѣловъ Ариѳметики", такъ какъ только длинный рядъ опытовъ могъ убѣдить китайскихъ ученыхъ въ непреложности и справедливости математическихъ истинъ, заключающихся въ этомъ сочиненіи.

Передъ каждой изъ главъ, и ея подраздѣленій, вышеупомянутаго сочиненія, находится эпиграфъ въ стихахъ, въ которомъ вкратцѣ изложено содержаніе главы и заключающихся въ ней основныхъ положеній. Съ перваго взгляда стихи эти трудно понять, но при болѣе основательномъ ихъ разборѣ легко видѣть, что они въ сжатой и удобозапоминаемой формѣ содержатъ основныя начала каждой изъ главъ.

Другое сочиненіе, на которомъ мы остановимся, это упомянутый нами уже, въ началѣ нашего Очерка (см. стр. 6), „*Тшiу-Пи*" *). Сочиненіе это

---

*) Заглавіе сочиненія *Тшiу-Пи* различные синологи переводятъ различнымъ образомъ, а потому и въ различныхъ математическихъ сочиненіяхъ оно передано различно. Ed. Biot переведшій это сочиненіе на французскій языкъ озаглавилъ его „знакъ въ окружности". Переводъ этотъ помѣщенъ въ „Journal Asiatique", III Serie, T. XI, Juin 1841 и озаглавленъ „Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois intitulé: *Tcheou-pei*, littéralement: Style ou signal dans une circonférence", par Edouard Biot". Бернацкій перевелъ заглавіе сочиненія слѣдующимъ образомъ „берцовая кость Тшiу", справедливость своего толкованія онъ основываетъ на томъ, что въ „Тшiу-Пи" много говорится объ инструментѣ *кеи-ки*, который вѣроятно представлялъ прямоугольный треугольникъ; на китайскомъ же языкѣ *кеи* и *ки* имѣютъ значеніе въ смыслѣ *бедра* и *ноги* и въ смыслѣ *высоты* и *основанія*. Ганкель говоритъ, что *Тшiу* значитъ окружность, *Пи* нога, а потому Тшiу-Пи можно переводить *нога въ окружности*, что вѣроятно означало ничто иное какъ *гномонъ*.

Тшiу-Пи часто смѣшиваютъ съ другимъ сочиненіемъ *Тшiу-Ли*, написанымъ также Тшiу-Кунгомъ. *Тшiу-Ли*, т. е. „обряды Тшу", заключаетъ описаніе всѣхъ обрядовъ, всю правительственную систему, обязанности правительства и всѣхъ подданныхъ и т. д. Въ этомъ сочиненіи находится также множество астрономическихъ наблюденій и примѣненіе нѣкоторыхъ математическихъ истинъ. Ни у одного народа нельзя указать на сочиненіе имѣющее сходство съ Тшiу-Ли, оно совершенно въ духѣ китайцевъ. Сочиненіе Тшiу-Ли было переведено на французскій языкъ подъ заглавіемъ: „Le *Tcheou-Ly* ou rites de Tcheou traduit par Ed. Biot. T. I—II. Paris, 1851".

Въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ оба вышеупомянутыя сочиненія, т. е. *Тшiу-Пи* и *Тшiу-Ли* считаютъ за одно и написанное въ одномъ изъ нихъ смѣшиваютъ съ написаннымъ въ другомъ. Въ началѣ нашего сочиненія, говоря о Геометріи Китайцевъ, мы впали невольно также

написано около 1100 г. до Р. Х. Все сочиненіе написано въ видѣ разговора между авторомъ этого сочиненія *Тшу-Кун*омъ (Tschou-Kung) и другимъ знатнымъ лицомъ, по имени *Шангъ-Кау* (Schang-Kaou). Сочиненіе состоитъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ каждая заключаетъ нѣсколько отдѣловъ. Въ первомъ отдѣлѣ вкратцѣ изложено содержаніе всего сочиненія *). Чтобы дать понятіе о Тшу-Пи мы приведемъ первый отдѣлъ этого сочиненія:

1) Однажды Тшу-Кунгъ сказалъ Шангъ-Кау: я узналъ сударь, что ты весьма свѣдущъ въ числахъ; я желалъ-бы узнать отъ тебя какъ старый Фоги обозначилъ градусы на сферѣ небесной, такъ какъ несуществуетъ ступеней для восхожденія на небеса, а равно нельзя примѣнять къ небу уровня и мѣръ, употребляемыхъ на землѣ. Въ виду этого я бы желалъ узнать какъ ему удалось установить эти числа?

2) Шангъ-Кау отвѣтилъ: искусство считать можетъ быть сведено на кругъ и квадратъ.

3) Кругъ произошелъ отъ квадрата, а квадратъ отъ круга.

4) Квадратъ произошелъ отъ прямаго угла (т. е. отъ прямоугольнаго треугольника *кеи-ки*).

5) Прямой уголъ составленъ изъ сочетанія девяти единицъ (вѣроятно сказанное относится къ прямоугольному треугольнику, коего стороны 3, 4, 5; въ такомъ треугольникѣ 4 + 5 = 9).

6) Если мы разложимъ прямой уголъ (т. е. прямоугольный треугольникъ) на его составныя части и положимъ ширину—*кеоu* равной 3, длину—*коu* равной 4, то линія соединяющая углы—*king-yu* будетъ равна 5.

7) Если мы сдѣлаемъ изъ внѣшнихъ сторонъ прямоугольникъ, то половина этого прямоугольника будетъ равна площади треугольника.

8) Если сложить всѣ три стороны, то получится сумма чиселъ 3, 4, 5.

9) Квадратъ гипотенузы равный 25, равенъ суммѣ квадратовъ меньшихъ сторонъ.

10) Наука, при помощи которой Iу (Ju) устроилъ все находящееся подъ небомъ (т. е. въ Китаѣ) основана на этихъ числахъ.

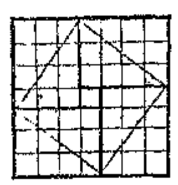
въ эту погрѣшность, при чемъ названіе *Тшу-Пи* неправильно перевели, назвавъ его заглавіемъ другаго сочиненія, т. е. *Тшу-Ли*.

*) Первая книга Тшу-Пи была переведена въ прошломъ столѣтіи извѣстнымъ іезуитомъ *Гобилемъ* (Gaubil).

Гобиль пробылъ въ Китаѣ тридцать шесть лѣтъ въ качествѣ миссіонера, отъ 1723 по 1759. Благодаря основательному знакомству съ китайскимъ языкомъ Гобиль состоялъ переводчикомъ при Пекинскомъ дворѣ и принималъ участіе при дипломатической перепискѣ между китайскимъ и русскимъ правительствами. Гобиль авторъ нѣсколькихъ сочиненій, относящихся къ исторіи китайской астрономіи, китайской хронологіи и китайской астрономіи. Сочиненія эти заключаютъ весьма много интересныхъ данныхъ, показывающихъ современное Гобилю состояніе наукъ въ Китаѣ.

Послѣ этого слѣдуетъ три чертежа, служащіе вѣроятно для поясненія теоріи прямоугольнаго треугольника. Первая изъ фигуръ названа „фигура веревки". Фигура эта состоитъ въ слѣдующемъ: въ квадратъ, раздѣленный на 49 равныхъ частей, вписанъ другой квадратъ, раздѣленный на 25 частей. Второй квадратъ раздѣленъ на 4 прямоугольные треугольника и маленькій квадратъ (фиг. 14). На сколько уясняютъ эти чертежи теорію прямоуголь-

Фиг. 14.



наго треугольника, нельзя сказать, такъ какъ до сихъ поръ неизвѣстно положительно въ чемъ именно состоялъ инструментъ кеу-ку. Приведенный нами чертежъ напоминаетъ фигуру, при посредствѣ которой индусскіе математики доказывали теорему Пиѳагора (см. фиг. 1, на стр. 11).

11) Тшіу-Кунгъ отвѣтилъ: велико значеніе чиселъ. Я бы желалъ тебя еще спросить относительно основныхъ началъ, на которыхъ основано употребленіе прямаго угла и различныя его примѣненія.

12) Шангъ-Кау отвѣтилъ: прямой уголъ составленъ изъ трехъ прямыхъ, не изогнутыхъ, линій.

13) Поставленный, прямой уголъ служитъ для измѣренія высотъ.

14) Обороченный, онъ служитъ для измѣренія глубины.

15) При посредствѣ, горизонтально лежащаго прямаго угла, измѣряются разстоянія.

16) Вращеніемъ прямаго угла получаютъ окружность.

17) Изъ сочетанія прямыхъ угловъ получается квадратъ.

18) Квадратъ принадлежитъ землѣ, кругъ—небу, потому что небо круглое, а земля—квадратна.

19) Численныя соотношенія квадратной фигуры суть основныя начала. Размѣры круга опредѣляются изъ размѣровъ квадрата.

20) Площадь круга изображаетъ собою небо; цвѣтъ неба темно-синій, цвѣтъ земли желто-красный. Площадь круга образована сочетаніемъ небесныхъ соотношеній между числами; снаружи она синяя и черная; внутри красная и желтая. Этимъ опредѣляются положенія на небѣ и на землѣ.

21) Знакомый съ землею можетъ считаться ученымъ, а знакомый съ небомъ—мудрецомъ. Знаніе этого основано на прямой линіи. Прямая линія

есть часть прямаго угла, а численныя соотношенія между частями прямаго угла могутъ быть приложены ко всѣмъ фигурамъ.

22) Тшіу-Кунгъ воскликнулъ: по истинѣ, это изумительно!

На этомъ заканчивается первый отдѣлъ Тшіу-Пи, въ которомъ, какъ мы уже выше упоминали, вкратцѣ изложено содержаніе всего сочиненія. Изъ приведеннаго нами содержанія Тшіу-Пи видно, что почти всѣ предложенія этого сочиненія относятся къ свойствамъ прямоугольнаго треугольника. Положеніе 9) есть ничто иное какъ извѣстная теорема Пиѳагора; положенія 13), 14) и 15) указываютъ, что автору сочиненія были извѣстны нѣкоторыя тригонометрическія вычисленія; онъ зналъ какъ при помощи тригонометрическихъ вычисленій можетъ быть опредѣлено разстояніе между недоступными предметами; положеніе 16) указываетъ, что составителю было извѣстно нахожденіе площади круга при помощи радіуса; положеніе 19), по мнѣнію Біо, указываетъ на то, что авторъ сочиненія разсматривалъ кругъ какъ многоугольникъ съ большимъ числомъ сторонъ, положеніе 20) вѣроятно относится къ инструменту, при помощи котораго изображали небо и землю. Къ сожалѣнію мы ничего не знаемъ о подобномъ приборѣ. Изъ 21) положенія видно, что ариѳметическія соотношенія прилагали къ нѣкоторымъ геометрическимъ вопросамъ.

Многое въ этомъ сочиненіи остается до сихъ поръ непонятнымъ и неразъясненнымъ, причина этого отчасти та, что многое переведено не вполнѣ вѣрно. До сихъ поръ неизвѣстно въ точности, какой инструментъ извѣстенъ былъ китайцамъ подъ именемъ *кеу-ку*; былъ ли это прямоугольникъ, уровень, эккеръ или иной инструментъ, неизвѣстно. На основаніи нѣкоторыхъ соображеній можно полагать, что подъ этимъ названіемъ были извѣстны нѣсколько различныхъ приборовъ.

Вторая часть Тшіу-Пи написана, какъ полагаютъ въ болѣе позднее время. Содержаніе ея относится болѣе къ Астрономіи *). Отношеніе окружности къ діаметру, т. е. π, принято равнымъ 3. Во всѣхъ случаяхъ когда по данному діаметру требуется найти окружность круга, діаметръ умножаютъ на 3. Въ одномъ изъ примѣровъ сказано: „возьми діаметръ длиною въ $121\frac{75}{100}$ фута, умножь это число на 3, то получишь $365\frac{1}{4}$ футовъ". Изъ послѣдняго примѣра видно какъ пришли китайцы къ раздѣленію окружности не на 360 равныхъ частей, а на $365\frac{1}{4}$ градусовъ. Весьма вѣроятно, что это находится въ связи съ солнечнымъ годомъ въ $365\frac{1}{4}$ дней, который

*) По мнѣнію китайскихъ ученыхъ Тшіу-Пи написано около 1110 г. до Р. Х. въ царствованіе Тшіу-Кунга. Вторая часть этого сочиненія несомнѣнно болѣе поздняго происхожденія и полагаютъ написана во II в. по Р. Х.

былъ извѣстенъ китайскимъ астрономамъ. Дѣленіе окружности на 360 градусовъ было также извѣстно китайцамъ. Число 3 китайцы считали принадлежащимъ кругу, безъ сомнѣнія потому, что окружность круга получалась умноженіемъ діаметра на 3.

Составитель Тшіу-Ли написалъ также „*Правила* (Tschou-li)“, въ которыхъ находятся наставленія какъ воспитывать сыновей князей и другихъ высокопоставленныхъ лицъ. Въ правилахъ сказано: что сыновей такихъ лицъ необходимо обучать шести искусствамъ, а именно: пяти классамъ религіозныхъ церемоній, шести родамъ музыки, пяти правиламъ стрѣльбы изъ лука, пяти правиламъ ѣзды на колесницахъ, шести правилахъ письма и наконецъ девяти методамъ считать при помощи чиселъ. Подъ послѣднимъ, полагаютъ, разумѣется изученіе „Кіу-Тшанга“, т. е. „Девяти отдѣловъ Ариѳметики“.

Въ 717 г. по Р. Х. духовное лицо, по имени, *И-Кингъ* (Yih-King)*) написалъ сочиненіе „*Тагенъ-Ли-Шу* (Ta-yen-lii-schou)“. Къ этому сочиненію около 1240 г. былъ написанъ комментарій извѣстнымъ математикомъ *Тшіу-Кіу-Тшау* (Tsiu-kiu-tschaou). Комментарій этотъ озаглавленъ „*Девять главъ искусства считать*“; такое заглавіе вѣроятно было дано по сходству содержанія его съ содержаніемъ извѣстнаго Кіу-Тшанга. Сочиненіе это состоитъ изъ двухъ частей, по 9 главъ въ каждой. Изложимъ вкратцѣ содержаніе этого сочиненія.

Начнемъ съ *первой* части.

Глава I содержитъ примѣненія различныхъ численныхъ символовъ къ предсказыванію будущаго. Каждому числу соотвѣтствовалъ особенный знакъ, имѣющій значеніе ключа, при разгадкѣ будущаго. Такъ напр. *единица* изображалась двумя чертами, *два*—переломленной чертой, *три*—цѣлой чертой, *четыре*—цѣлой чертой и переломленной чертой и т. д. Нѣкоторые полагаютъ что изъ этихъ знаковъ возникли впослѣдствіи извѣстныя діаграммы, которыя суть остатки весьма древняго способа предсказывать будущее.

Глава II заключаетъ различныя примѣненія нѣкоторыхъ ариѳметическихъ правилъ къ астрономическимъ вычисленіямъ. Глава эта содержитъ весьма много интереснаго для исторіи Астрономіи.

Глава III посвящена рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ вычисленію различныхъ работъ. Такъ напр. рѣшена слѣдующая задача: четыре артели рабочихъ, состоящая каждая изъ извѣстнаго числа лицъ,

---

*) Буддійскій жрецъ И-Кингъ былъ извѣстенъ своими обширными познаніями. Онъ написалъ сочиненія по астрономіи, ариѳметикѣ и др. наукамъ, кромѣ того онъ авторъ сочиненія объ отклоненіи магнитной стрѣлки.

но не одинаковаго, взялись построить плотину. Известно также количество неоконченной работы; требуется определить количество работы, произведенной каждымъ изъ обществъ.

Глава IV содержитъ задачи, относящiяся къ вычисленiю капиталовъ. При рѣшенiи многихъ вопросовъ этой главы съ большимъ умѣнiемъ примѣняются правила процентовъ и учета денегъ.

Глава V занимается рѣшенiемъ слѣдующей задачи: три лица имѣютъ, каждое, одинаковое количество пшеницы. Пшеница эта куплена въ разныхъ мѣстахъ въ разныхъ мѣрахъ. Избытокъ надъ нормальной мѣрой извѣстенъ, требуется опредѣлить количество пшеницы.

Глава VI заключаетъ рѣшенiе слѣдующей задачи: изъ даннаго мѣста выступили три полка въ столицу, извѣстно число миль пройденныхъ каждымъ полкомъ въ день, а также извѣстны часы прихода полковъ въ столицу; требуется опредѣлить разстоянiе мѣста выхода полковъ отъ столицы.

Глава VII изслѣдуетъ задачу о курьерахъ, ѣдущихъ съ различной скоростью; требуется опредѣлить мѣсто ихъ ночлега.

Глава VIII содержитъ рѣшенiе задачи: опредѣлить размѣры фундамента зданiя, построеннаго изъ четырехъ родовъ кирпичей, величина которыхъ зависитъ отъ желанiя строителя; величина кирпичей извѣстна.

Глава IX занимается рѣшенiемъ слѣдующей задачи: изъ трехъ бочекъ, содержащихъ, каждая, одинаковое количество рису, украдено тремя ворами нѣкоторое его количество. Сколько было рису неизвѣстно, но извѣстно что въ *первой* бочкѣ осталея 1 *го* (ho), во *второй*—1 *шинъ* (sching) и 1 *го*, и въ *третьей* 1 *го*. Пойманные воры при допросѣ показали слѣдующее: *первый*, что онъ нѣсколько разъ отсыпалъ рисъ изъ первой бочки при посредствѣ конюшенной лопаты; *второй*, что онъ нѣсколько разъ наполнялъ рисомъ изъ второй бочки деревянный башмакъ; и наконецъ *третiй*, что онъ бралъ рисъ изъ третьей бочки деревянной миской. Лопата, башмакъ и миска найдены на мѣстѣ преступленiя при чемъ оказалось, что лопата вмѣщаетъ въ себѣ 1 *шинъ* и 1 *го*, башмакъ 1 *шинъ* и 7 *го*, а миска 1 *шинъ* и 2 *го*. Требуется узнать количество риса, украденное каждымъ изъ воровъ? Отвѣтъ: всего украдено 6 *ши* (schih), 5 *тау* (tau), 6 *шиновъ* и 3 *го*; при чемъ *первый* воръ укралъ 3 *ши*, 1 *тау*, 9 *шиновъ* и 2 *го*; *второй*—3 *ши*, 1 *тау*, 7 *шиновъ* и 9 *го*; и наконецъ *третiй*—3 *ши*, 1 *тау*, 9 *шиновъ* и 2 *го*.

Вторая часть почти исключительно содержитъ вопросы и вычисленiя, относящiеся къ Астрономiи и Физикѣ. Большая часть вопросовъ рѣшена при помощи извѣстнаго правила *Таенъ* (Ta-yen), о которомъ мы скажемъ ниже.

Въ настоящее время извѣстно весьма много сочиненій математическаго содержанія, написанныхъ китайцами, къ сожалѣнію только знакомы намъ ихъ заглавія. Изъ числа такихъ сочиненій укажемъ на слѣдующія:

Въ I в. до Р. Х. написано было сочиненіе подъ заглавіемъ: „*Ариѳметическія правила въ девяти отдѣламъ* (Kiu tschang swan suh)“, авторъ котораго *Тшана-Тсанъ* (Tschang-Tsang) говоритъ, что его сочиненіе есть исправленное изданіе болѣе древняго, авторъ котораго неизвѣстенъ. Сочиненіе это было много разъ снова издаваемо и комментировано.

Въ III в. по Р. Х. математикъ *Сунъ-Тзе* написалъ сочиненіе „*Ариѳметическіе классики*“, которое часто упоминается позднѣйшими писателями. Около того же времени *Сеу-Кiу* (Seu-Kiu) написалъ сочиненіе подъ заглавіемъ „*Сборникъ искусства счисленія* (Schou so ke e,“.

Въ VI в. *Геа-Гау-Янъ* (Hea-Hau-Yang) написалъ сочиненіе, заглавіе котораго также „*Ариѳметическіе классики* (Swan king)“; въ этомъ сочиненіи авторъ предлагаетъ нѣкоторые исправленные методы при рѣшеніи различныхъ задачъ. Авторъ не ограничивается изложеніемъ одного Кiу-Тшанга, а занимается также и другими вопросами.

Въ VII в. *Лiу-Гвуи* (Lиu-Hwuy) написалъ сочиненіе „*Полная система искусства мѣрить на основаніи наблюденія нѣсколькихъ вѣхъ* (Tschung tscha kea tsih wang tsche schuh)“. Въ VIII в. сочиненіе это было исправлено и комментировано, при чемъ оно появилось подъ другимъ заглавіемъ, именно: „*Островъ ариѳметическихъ классиковъ* (Hä taou swan king)“. Сочиненіе это названо такъ потому, что первый вопросъ, которымъ занимается авторъ, трактуетъ объ измѣреніи острова, изъ точки находящейся внѣ его.

Въ началѣ VII в. было написано первое сочиненіе тригонометрическаго содержанія, хотя первоначальныя—основныя начала Тригонометріи были извѣстны гораздо раньше. Авторъ поименованнаго сочиненія *Тшау-Тшванъ* (Tschaou-Tschwang) озаглавилъ его „*Ариѳметическіе классики тригонометріи Тшау* (Tschaou pe swan knig)“.

Въ концѣ VII в. математикъ *Тшинъ-Лванъ* (Tschin-Lwan) написалъ сочиненіе „*Ариѳметическія правила пяти классиковъ* (Wu king swan schuh)“; сочиненіе это было комментировано *Ле-Тшуномъ* (Le-Tschun). Къ тому же времени относятъ сочиненіе, написанное *Тшанъ-Кiу-Киномъ* (Tschang-Kiu-Kiun), озаглавленное также „*Ариѳметическіе классики*“. Послѣднее сочиненіе не смотря на то, что написано довольно неясно было издано нѣсколько разъ.

Въ концѣ VIII-го вѣка жилъ *Ванъ-Геау-Тунъ* (Wang-Heaou-Tung), занимавшій мѣсто императорскаго библіотекаря, онъ написалъ сочиненіе „*Ариѳметическіе классики древнихъ выраженій* (Tseih-ku-swan-king)“. Сочиненіе это интересно по комментаріямъ, сдѣланными Вангомъ на нѣко-

торыя изъ математическихъ сочиненій, написанныхъ до него. Въ этомъ сочиненіи рѣшено 20 стереометрическихъ задачъ, которыя приведены въ видѣ поясненій къ пятой главѣ извѣстнаго сочиненія „Девять отдѣловъ ариѳметики“. Если вѣрить словамъ китайскихъ математиковъ, то сочиненіе это написано весьма темно, а потому трудно понимаемо, но не смотря на эти недостатки оно имѣетъ значеніе. Въ 1803 г. сочиненіе Ванга было вновь издано математикомъ *Тшангъ-Тунъ-Иномъ* (Tsсhang-Tun-Jin) съ значительными дополненіями и разъясненіями.

Но несравненно важнѣе для насъ другое сочиненіе вышеупомянутаго Тши-Кіу-Тшау, названное имъ „*Представленіе небесной монады* (Leih-tien-yuen-yih)“. Содержаніе этого сочиненія знакомитъ насъ съ познаніями китайцевъ въ Алгебрѣ. Посмотримъ же въ чемъ заключались пріемы китайцевъ.

Подъ именемъ *монады* (единицы) слѣдуетъ понимать наше неизвѣстное x. Для обозначенія первой степени неизвѣстнаго существовалъ знакъ, произносившійся *yuen*, сама же неизвѣстная величина не писалась, она подразумѣвалась какъ монада, писались же только численные коэфиціенты, съ правой стороны которыхъ ставили знакъ *yuen*. Для обозначенія извѣстныхъ величинъ служилъ знакъ, произносившійся *tae*. Обыкновенно на практикѣ когда писали знакъ *yuen*, то опускали знакъ *tae*, и обратно. Уравненія писали всегда уже расположенными по возрастающимъ степенямъ неизвѣстнаго, вертикально, сверху внизъ; такимъ образомъ въ первой строкѣ стоялъ x, во второй x^2 и т. д., наконецъ въ самомъ низу стояла извѣстная величина, по нашему правая часть уравненія. Изъ сказаннаго можно видѣть, что китайскіе математики усвоили себѣ методъ придавать величинамъ, то или другое значеніе, смотря *по мѣсту* занимаемому ими въ ряду другихъ величинъ. Въ видѣ примѣра приведемъ уравненіе:

$$x^3+15x^2+66x-360=0,$$

написанное въ китайской формѣ:

		I		x^3
	I	☰		$15x^2$
	T	⊥		$66x$
III	T	Θ		360

Если какой нибудь степени неизвѣстнаго недоставало, то на мѣсто, занимаемое этимъ неизвѣстнымъ, ставили нуль. Если въ уравненіи входили неизвѣстныя въ видѣ $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$ и т. д., то они писались сверху x. Для отличія положительныхъ величинъ отъ отрицательныхъ, первыя писались красными чернилами, а вторыя—черными. Такое обозначеніе встрѣчается еще

въ сочиненіяхъ, написанныхъ въ VI столѣтіи. Та часть уравненія, которая содержала неизвѣстныя величины, по нашему лѣвая, китайцы называли *ke-tso;* часть же заключающая извѣстную величину, по нашему правая, они называли *tung-suh* или *yiu-suh*. Тши-Кіу-Тшау первый изъ китайскихъ математиковъ, начавшій перечеркивать горизонтальной чертой извѣстныя величины въ уравненіяхъ: это показано на приведенномъ примѣрѣ.

Обративъ вниманіе на форму, даваемую китайскими математиками своимъ уравненіямъ, можно замѣтить, что форма писать уравненія въ видѣ $x^3+15x^2+66x=360$, была гораздо ранѣе извѣстна въ Китаѣ, чѣмъ на Западѣ.

Въ сочиненіи Тши-Кіу-Тшау находятся также примѣры численныхъ рѣшеній уравненій. Изъ числа такихъ уравненій укажемъ на слѣдующее уравненіе четвертой степени:

$$x^4-1534464x^2+731124800x=526727577600$$

При рѣшеніи этого уравненія даны только окончательные результаты.

Тши-Кіу-Тшау написалъ еще одно сочиненіе, именно: *„Девять отдѣловъ науки о числахъ* (Su schu kiu tschang)". Другой математикъ, современникъ Тши-Кіу-Тшау, *Янъ-Гвуи* (Yang-Hwuy) написалъ сочиненіе *„Объясненія къ девяти отдѣламъ ариеметики* (Tsuang kea kiu tschong swan fa)". Кромѣ того онъ авторъ еще двухъ сочиненій, именно: *„Примѣненіе ариеметики къ вопросамъ обыденной жизни* (Tsuang kea jih yung swan fa)" и *„Полное руководство къ умноженію и дѣленію* (Schung tschou tung pien pun muh)". Послѣднія сочиненія были изданы вновь въ Шанхаѣ въ 1840-хъ годахъ.

Около того же времени жилъ геометръ *Тшу-Ши-Ки* (Tschu-Schi-Kih), написавшій въ 1303 г. сочиненіе подъ заглавіемъ *„Драгоцѣнное зеркало четырехъ началъ* (Szo yuen yuh kihn)". Сочиненіе свое авторъ начинаетъ съ „отношенія *лин* (*lihn*—коэфиціенты) при вычисленіи чиселъ до восьмой степени". При этомъ онъ говоритъ, что это „старый методъ", изъ чего можно заключить что пріемъ этотъ былъ извѣстенъ раньше. Таблица чиселъ, приведенная въ этомъ сочиненіи, написанная нашими цифрами имѣетъ форму:

1	первоначальная сумма
1 1	множители
1 2 1	квадраты
1 3 3 1	кубы
1 4 6 4 1	четвертая степень
1 5 10 10 5 1	пятая степень
1 6 15 20 15 6 1 . . .	шестая степень
1 7 21 35 35 21 7 1 . . .	седмая степень
1 8 28 56 70 56 28 8 1 . .	восьмая степень

Таблица эта есть ничто иное какъ *ариѳметическій треугольникъ*, нѣкоторыя свойства котораго были извѣстны арабскимъ математикамъ еще въ XI в., и который былъ найденъ Паскалемъ въ XVII столѣтіи.

Четыре *начала*, о которыхъ говоритъ авторъ сочиненія, это четыре знака, заимствованные изъ китайскаго письма, изображающіе: небо, землю, человѣка и вещь. Первые три начала (a, b, c) служатъ для обозначенія извѣстныхъ величинъ, а послѣднее для обозначенія неизвѣстной (x). Начала эти располагаются вокругъ знака *tae* слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & \textit{tae} & 1 \\ & 1 & \end{array}$$

при чемъ верхняя черта представляетъ *вещь* (x), нижняя—*небо* (a), правая—*человѣка* (c) и лѣвая *землю* (b); т. е.

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ b & \textit{tae} & c \\ & a & \end{array}$$

При такомъ методѣ обозначеній выраженіе:

$$(a+b+c+x)^2 =$$

$$= a^2+2ab+2ac+2ax+b^2+2bc+2bx+c^2+2cx+x^2$$

представится въ видѣ:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 0 & 2 & \\ & & & 2 & \\ 1 & 0 & \textit{tae} & 0 & 1 \\ & 2 & & & \\ & 2 & 0 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

или же:

$$\begin{array}{ccccc} & & x^2 & & \\ & 2bx & 0 & 2cx & \\ & & & 2ax & \\ b^2 & & \textit{tae} & & c^2 \\ & 2bc & & & \\ & 2ab & 0 & 2ac & \\ & & a^2 & & \end{array}$$

При помощи *правила таень* и методовъ приложенныхъ авторомъ сочиненія „Представленіе небесной монады“, имъ рѣшены съ замѣчательнымъ умѣніемъ уравненія 6-й, 7-й, 8-й и высшихъ степеней. Все это указываетъ, что Тши-Кіу-Тшау былъ основательно знакомъ съ вопросами, составляющими предметъ его сочиненія.

Изъ другихъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ сочиненій укажемъ еще на слѣдующія:

Около 1300 г. жилъ математикъ *Ко-Шеу-Кингъ* (Ko-Schou-King) *), написавшій первое сочиненіе по Сферической Тригонометріи, которое нынѣ утеряно; но до насъ дошло другое сочиненіе, написанное въ концѣ XVI-го столѣтія, въ которомъ изложены правила и пріемы найденные Ко-Шеу-Кингомъ. Сочиненіе это озаглавлено *„Ариѳметическія правила для сегментовъ и синусовъ версусовъ* (Hu-schi-swan-schuh)“. Въ началѣ XIV в. математикъ *Ле-я-инъ-кингъ* (Le-yay-jin-king) написалъ комментаріи на сочиненіе „Представленіе небесной монады“ и составилъ кромѣ того сочиненіе *„Зеркало для измѣренія круга* (Tsih-yuen-hä-king)“, въ которомъ находитъ приложеніе Алгебра при рѣшеніи нѣкоторыхъ тригонометрическихъ вопросовъ.

Наиболѣе блестящихъ результатовъ достигли китайскіе математики въ неопредѣленномъ анализѣ, въ которомъ у нихъ самое видное мѣсто принадлежитъ *правилу таень*. Правило это въ своемъ первоначальномъ видѣ встрѣчается въ сочиненіи „Ариѳметическіе классики (Swan-king)“, написаннымъ *Сунъ-Тзе* (Sun-tzeé); къ сожалѣнію неизвѣстно въ точности время, когда жилъ послѣдній; нѣкоторые относятъ его ко II в. до Р. Х., а другіе полагаютъ, что онъ жилъ въ III в. по Р. Х. Послѣднее мнѣніе болѣе вѣроятно.

Въ послѣдствіи времени правило это стали прилагать ученые къ рѣшенію нѣкоторыхъ астрономическихъ вопросовъ, именно вопроса объ циклахъ и эпициклахъ. Первый, приложившій *правило таень* къ рѣшенію подобныхъ вопросовъ былъ упомянутый нами выше И-Кингъ, изложившій его въ своемъ сочиненіи „Ta-yen-li-schou“, написанномъ въ 717 г. Правило это также находится въ сочиненіи Тши-Кіу-Тшау, жившаго въ XIII в.

Правило *таень* въ дословномъ переводѣ означаетъ „большое распространеніе“; оно служило къ отысканію неизвѣстныхъ величинъ при рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени. Основной изъ вопросовъ, при рѣ-

*) Ко-Шеу-Кингъ познанія свои заимствовалъ у арабскихъ ученыхъ, которые около того времени проникли въ Китай и оказали большое вліяніе на развитіе наукъ и ихъ направленіе среди китайскихъ ученыхъ. Ко-Шеу-Кингъ былъ современникомъ извѣстнаго арабскаго математика и астронома Нассиръ-Еддина.

шенія котораго примѣняется это правило, облеченъ Сунъ-Тзе въ стихотворную форму, довольно темную, вслѣдствіи чего трудно было понять въ чемъ именно состояло правило *таснъ* *).

Долгое время между европейскими математиками существовало мнѣніе, что правило *таснъ* китайцевъ и правило *кутука* индусовъ одно и тоже. Но въ настоящее время Маттисену удалось **) вполнѣ выяснить въ чемъ состояло правило *таснъ* и показать, что правило *кутука* существенно отличается отъ пріема употребленнаго китайскими математиками. По мнѣнію Маттисена *правило таснъ* имѣетъ сходство съ пріемомъ, предложеннымъ Горнеромъ для приближеннаго вычисленія численныхъ уравненій, между тѣмъ какъ *правило кутука* индусовъ имѣетъ сходство съ пріемомъ Эйлера. Пріемъ предложенный китайскими математиками для приближеннаго вычисленія уравненій, на Западѣ былъ въ первый разъ примѣненъ Віетомъ. Изъ сказаннаго можно съ увѣренностью сказать, что изслѣдованія нѣкоторыхъ вопросовъ неопредѣленнаго анализа дѣлаютъ наибольшую честь китайскимъ ученымъ, и что въ этомъ направленіи они опередили не только европейцевъ, но и индусовъ, которые, какъ мы увидимъ ниже, достигли весьма важныхъ результатовъ въ этомъ отдѣлѣ Алгебры.

---

*) *Правило таснъ* служило предметомъ спора между многими учеными. Впервые оно было выяснено, сравнительно удовлетворительнѣе, въ статьѣ: „*Matthiesen*, Zur Algebra der Chinesen“, помѣщенной въ „Zeitschrift für Mathematik und Physik; Jahrg. XIX, 1874“. Другая статья по тому же предмету написана тѣмъ же авторомъ подъ заглавіемъ „Vergleichung der indischen Cuttaca und der chinesischen Ta yen Regel“ и помѣщено имъ въ „Zeitschrift für mathem. und naturwis. Unterricht, T. VII, 1876“. Также довольно обстоятельно изложено и объяснено правило таснъ въ сочиненіи: „*Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I Bd., Leipz., 1880“.

Маттисенъ и Канторъ при своихъ объясненіяхъ пользуются методомъ сравненій Гаусса.

**) Послѣднія изслѣдованія Маттисена показали, что при помощи *правила таснъ* китайскіе ученые рѣшали нѣкоторые вопросы, рѣшенные въ „Disquisitiones arithmeticae“ Гаусса, и которыми впослѣдствіи также занимался Лежёнъ-Дирикле (Lejeune-Dirichle). Вопросы эти, рѣшенные послѣдними учеными при помощи метода сравненій, были рѣшены китайцами при помощи *правила таснъ* для гораздо болѣе общихъ случаевъ. Пріемы эти изложены въ *первомъ* отдѣлѣ сочиненія „Таіенъ-Лiи-Шу“ И-Кинга. Къ сожалѣнію до сихъ поръ не существуетъ перевода упомянутаго сочиненія, все же извѣстное о немъ заимствовано изъ сочиненій Виліе. Маттисенъ положительно отвергаетъ слова Бернацкаго, который говоритъ, что въ первомъ отдѣлѣ „Таіенъ-Лiи-Шу“ показаны способы предсказывать будущее на основаніи различныхъ численныхъ символовъ. Символы эти по мнѣнію Маттисена имѣютъ прямое отношеніе къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ неопредѣленнаго анализа, которымъ занимались съ такимъ успѣхомъ китайскіе математики. Весьма вѣроятно, что болѣе близкое ознакомленіе съ выше упомянутымъ сочиненіемъ прольетъ много свѣта на изслѣдованія китайскихъ математиковъ въ этой интересной отрасли математическихъ наукъ.

Въ началѣ XVIII столѣтія правиломъ таенъ занимался ученый по имени *Мей-Вуганъ* (Mei-Wuhgan), написавшій сочиненіе подъ заглавіемъ „*Жемчужины падающія въ Красную рѣку* (Tschih schwuy e tschin)". Сочиненіе такъ названо потому, что въ немъ приведенъ извѣстный разсказъ о мудрецѣ Гвангъ-Ти, уронившемъ въ Красную рѣку нѣсколько драгоцѣнныхъ жемчужинъ. Жемчужины эти онъ нашелъ по истеченіи долгаго времени. Авторъ этого сочиненія сравниваетъ сочиненіе *Лея* съ другимъ сочиненіемъ алгебраическаго содержанія, подъ заглавіемъ „Тзе-кангъ-фангъ", написаннаго европейцами, о которомъ мы скажемъ ниже. Изъ числа другихъ ученыхъ занимавшихся правиломъ таенъ, упомянемъ еще труды *Ле-Іуи* (Le-Juy) и *Тшангъ-Тунъ-Ина* (Tschang-Tun-Jin), жившихъ въ концѣ XVIII столѣтія. Первый изъ нихъ написалъ „*Оставшіяся сочиненія* (E schou)", а второй „*Математическій сборникъ* (Tsuy wei schan fang swan heo)", въ которомъ находиться приложеніе правило таенъ къ Геометріи. Въ четвертой части этого сборника упоминается математическое сочиненіе „Тзе-кангъ-фангъ", написанное европейскими математиками.

Въ среди XVI столѣтія математикъ *Тангъ-Шунъ-Тши* (Tang-schun-tschi) написалъ комментаріи на сочиненія Ле-я „Зеркало для измѣренія круга", а другой ученый *Ку-Инъ-Тсеанъ* (Ku-Ymg-tseang) снова издалъ сочиненія Ле-я и астрономическое сочиненіе Ко-Шеу-Кинга „Дуги и синусы версусы". При обѣихъ этихъ сочиненіяхъ онъ прибавилъ много своихъ изслѣдованій и указалъ на важность и значеніе сочиненій Ле-я.

Послѣднее математическое сочиненіе, написанное самостоятельно китайцами, составлено вѣроятно въ XVI в. и напечатано въ 1593 г. Заглавіе этого сочиненія „*Начала искусства вычисленія*" *). Сочиненіе это состоитъ изъ 12 книгъ; въ предисловіи къ нему упоминается, что настоящее изданіе есть новое и исправленное. Всѣ сочиненія математическаго содержанія, на-

---

Послѣднія изслѣдованія Маттисена помѣщены имъ въ статьѣ: „Die Methode *Tá-jăn* im *Suan-king* von *Sun-tsè* und ihre Verallgemeinerung durch *Jih-king* im I Abschnitte des *Tá-jan-li-schou*", напечатанной въ „*Zeitschrift* für Mathematik und Physik" за 1881 г. XXVI Jahrg. 2 Heft.

*) Сочиненіе это въ первый разъ было описано Біо въ замѣткѣ, помѣщенной въ „Journal des savants" за 1835 г. на стр. 270. Оглавленіе этого сочиненія было переведено также Біо и напечатано въ „Journal Asiatique, III serie, T. VII, 1839, Mars" подъ заглавіемъ: „Table générale d'un ouvrage chinois intitulé *Souan-fa-tong-tong*, ou *Traité complet de l'art de compter*, traduite et analysée par Éd. Biot". Либри также далъ краткое описаніе этого сочиненія въ прибавленіяхъ къ I-му тому своей „Исторіи математическихъ наукъ въ Италіи".

Экземпляры, числомъ три, этого сочиненія, служившіе Біо, принадлежатъ Національной библіотекѣ въ Парижѣ.

писанныя въ Китаѣ послѣ вышеупомянутаго, составлены уже подъ вліяніемъ миссіонеровъ, проникнувшихъ и утвердившихся въ Китаѣ въ началѣ XVII столѣтія.

Изложимъ вкратцѣ содержаніе „Началъ искусства вычисленія", такъ какъ сочиненіе это даетъ хорошее представленіе о состояніи математическихъ наукъ въ Китаѣ въ концѣ XVI-го столѣтія.

Книга I содержитъ: объясненіе системъ нумераціи, употребительныхъ въ Китаѣ; также приведены таблицы мѣръ; извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней; дѣйствія надъ дробями; различныя дѣйствія надъ числами вообще.

Книга II содержитъ: описаніе *суанъ-пана*; различныя дѣйствія надъ дробями; правило пропорцій; десятичныя дроби; распредѣленіе имущества; правило смѣшенія.

Книга III содержитъ: измѣреніе полей, при чемъ приведена первая глава древняго „Кіу-Тшанга"; таблицы мѣръ длины; описаніе различныхъ снарядовъ, употребляемыхъ при измѣреніи полей; описаніе 69 родовъ фигуръ; выраженіе отношенія окружности къ діаметру въ видѣ $\frac{22}{7}$; правила для измѣренія квадратныхъ и круглыхъ фигуръ; описаніе еще 22 различныхъ фигуръ; распредѣленіе податей и налоговъ; описаніе различныхъ мѣръ для измѣренія полей, квадратура фигуръ; кромѣ приведеннаго уже выраженія π, находится еще два другихъ, именно $\pi = \frac{18}{6}$ и $\pi = \frac{160}{33}$.

Книга IV содержитъ различные вопросы касающіеся различныхъ сѣмянъ и монетъ. Это вторая глава „Кіу-Тшанга". Распредѣленіе цѣнъ на различные припасы; о мѣрахъ вмѣстимости; правила для опредѣленія количества соли; о вѣсахъ и гиряхъ; правила плавки мѣди и желѣза.

Книга V содержитъ распредѣленія и раздѣлы. Это третяя глава „Кіу-Тшанга". Правило пропорціональнаго дѣленія. Въ этой книгѣ рѣшено много вопросовъ, изъ числа ихъ укажемъ на слѣдующій: найти число, которое будучи раздѣлено на 3, въ остаткѣ даетъ 2; на 5 даетъ въ остаткѣ 3; и наконецъ на 7 въ остаткѣ даетъ 2.

Книга VI изслѣдуетъ протяженія; это четвертая глава „Кіу-Тшанга". Извлеченіе квадратныхъ корней; ариѳметическій треугольникъ; различныя задачи на квадраты и кубы; извлеченіе кубическихъ корней; нахожденіе площади круга; превращеніе даннаго квадрата въ кругъ *); выраженіе объема

*) Въ VI томѣ (pag. 147—148) „Мемуаровъ пекинскихъ миссіонеровъ" находятся указанія, что китайскіе ученые занимались рѣшеніемъ извѣстныхъ задачъ: квадратуры круга и

шара (дано неправильное); розысканія относительно свойствъ треугольныхъ чиселъ; нахожденіе сторонъ треугольника, по данному периметру и площади треугольника, при помощи уравненія второй степени; опредѣленіе при помощи того же уравненія высоты и основанія прямоугольника. Нѣкоторые въ этомъ видятъ знаніе, что всякое уравненіе второй степени имѣетъ два корня; численное рѣшеніе нѣкоторыхъ уравненій третьей степени, при чемъ принять во вниманіе только одинъ изъ корней такихъ уравненій, о двухъ же другихъ нѣтъ и помину; нахожденіе площадей полей различныхъ формъ, какъ то: треугольныхъ, четыреугольныхъ, круглыхъ, кольцеобразныхъ и т. п.

Книга VII содержитъ измѣреніе различнаго рода работъ,—это пятая глава „Кіу-Тшанга". Постройки изъ земли; вычисленіе вмѣстимости башенъ; построеніе стѣнъ, пирамидъ, конусовъ, плотинъ; устройство каналовъ; семь вопросовъ, относящихся къ задачѣ о курьерахъ; пирамидальныя числа; ариѳметическія прогрессіи; суммованіе ариѳметическихъ строкъ; вычисленіе выемокъ; задачи на пропорціи. О распредѣленіи налоговъ; это шестая глава „Кіу-Тшанга".

Книга VIII содержитъ: объ избыткѣ и недостаткѣ,—это седмая книга „Кіу-Тшанга"; различныя задачи на пропорціи; точное вычисленіе различныхъ мѣръ,—это восьмая глава „Кіу-Тшанга"; о прямоугольномъ треугольникѣ, его свойствахъ и примѣненіяхъ,—это девятая глава „Кіу-Тшанга"; вписать кругъ въ прямоугольный треугольникъ; задача о бамбуковой трости, сломанной вѣтромъ; опредѣленіе разстояній и высотъ.

Книга IX содержитъ: измѣреніе земель и другіе вопросы.

Книга X содержитъ: распредѣленіе налоговъ и извлеченія изъ различныхъ сочиненій.

Книга XI содержитъ также рѣшеніе различныхъ вопросовъ.

Книга XII содержитъ: образованіе магическихъ квадратовъ *); суммиро-

---

удвоенія куба. Какіе пріемы были примѣнены китайцами при рѣшеніи этихъ задачъ намъ неизвѣстно.

Въ упомянутыхъ нами Мемуарахъ находится весьма много указаній на науки и искусства китайцевъ. Сочиненіе это озаглавлено: Mémoires concernant l'histoire, les sciences, les art, les moeurs, les usages, ect. des Chinois. Par les Missionnaires de Pekin. T. I—XVI. Paris. 1776—1814. in-4.

*) Китайскіе ученые придавали различнымъ числамъ мистическія значенія и толкованія. Особенное вниманіе они придавали, такъ называемымъ: *числамъ Конфуція*, *Коиа*, *Hotou* и *Lo-Chou*. Подъ именемъ Lo-Chou былъ извѣстенъ квадратъ, въ которомъ вписаны 25 бѣлыхъ и 20 черныхъ кружковъ, всего 45. Hotou представлялъ собою квадратъ, въ которомъ вписаны 25 бѣлыхъ и 30 черныхъ кружковъ, всего 55. Коиа заключалъ 64 кружка, 8 изъ числа ихъ представляли: небо, воды, огонь, громъ, вѣтры, воду, горы и землю. По мнѣнію

ваніе ариѳметическихъ строкъ; различные фигуры служащія для предсказываній; оглавленіе всего сочиненія.

Сочиненію предшествуетъ введеніе, въ которомъ говорится о цѣли труда; затѣмъ помѣщены различныя таблицы мистическаго содержанія, а также разнообразныя фигуры. Въ концѣ говорится о первоначальномъ происхожденіи чиселъ и о музыкальныхъ тонахъ. Каждая изъ книгъ содержитъ рѣшеніе большаго числа вопросовъ. Важнѣйшія правила изложены въ стихотворной формѣ. Сочиненіе это вѣроятно было принято какъ руководство въ школахъ, такъ какъ на заглавномъ листѣ находится изображеніе императорскаго герба, т. е. дракона.

Многое въ этомъ сочиненіи носитъ слѣды иностраннаго вліянія, такъ напримѣръ нѣкоторые способы производить умноженіе и построеніе магическихъ квадратовъ *), указываютъ на арабское происхожденіе этихъ пріемовъ. Для выраженія очень большаго числа, именно 10^{53}, принято названіе „песокъ Ганга (Hang-ho-schaou)", что ясно указываетъ на индусское вліяніе. Не смотря на это, приведенное нами сочиненіе достойно вниманія, какъ по полнотѣ своего содержанія, такъ и по множеству рѣшенныхъ въ немъ вопросовъ.

Изъ содержанія этого сочиненія видно, что китайскимъ математикамъ было извѣстно въ концѣ XVI столѣтія: теорія подобныхъ треугольниковъ, точныя выраженія поверхностей пирамиды и конуса, а также ихъ объемовъ;

Конфуціуса: „основное число есть 50, которое въ различныхъ приложеніяхъ замѣняютъ обыкновенно числомъ 49. Числа 1, 3, 5, 7, 9, сумма которыхъ 25 принадлежатъ небу. Числа 2, 4, 6, 8, 10—землѣ. Число 216 представляетъ небо, число 144 землю, а сумма ихъ есть 360—число дней въ году—*Ki*. Число же 11520 выражаетъ собою всѣ предметы и вообще все".

Китайскимъ астрономамъ былъ также извѣстенъ циклъ въ 19 лѣтъ, который они вѣроятно заимствовали у своихъ западныхъ сосѣдей. Время они дѣлили на періоды. Основной періодъ *tong* равнялся 1539 = 81×19 годамъ; три тонга равнялись одному *Yuen*, т. е. 4617 годамъ, или 243×19 годамъ. Полный періодъ заключалъ 81 куеновъ или 31×4617 = 143127 годовъ, это такъ называемый *Chang-Yuen*. Періодъ этотъ окончился въ 104 г. до Р. Х., когда солнце, луна и планеты находились въ соединеніи. Улу-Бекъ указываетъ на одну изъ главъ сочиненія Нассиръ-Еддина, въ которой сказано, что китайскіе астрономы отъ сотворенія міра до 817 г. геджиры (1436 г. по Р. Х.) насчитываютъ 88 639 860 лѣтъ.

Китайцамъ былъ также извѣстенъ періодъ въ 43200 лѣтъ о которомъ мы подробно говорили въ главѣ о Халдеяхъ и на происхожденіе котораго мы обратили вниманіе (см. стр. 302—303).

*) Историческое обозрѣніе вопроса о происхожденія магическихъ квадратовъ можно найти въ статьѣ „Historische Studien über die magischen Quadrate, помѣщенной въ сочиненіи: *Gunther*, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften; Leipz., 1876, in-8".

выраженіе отношенія окружности къ діаметру въ видѣ $\pi = \frac{22}{7}$; сумма членовъ ряда натуральныхъ чиселъ, а также ихъ квадратовъ. Было извѣстно также рѣшеніе уравненій второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ, а также рѣшеніе нѣкоторыхъ численныхъ уравненій третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ, при чемъ они принимали во вниманіе только одинъ изъ корней. Уравненія 3-й степени китайскіе математики рѣшали ощупью, если можно такъ выразиться, такъ какъ правильныхъ пріемовъ не существовало.

Съ начала XVII в. математическія науки въ Китаѣ принимаютъ новое направленіе. Причина этому вліяніе оказанное католическими миссіонерами. Въ это время коллегія астрономовъ, находящаяся въ Пекинѣ, пришла въ совершенный упадокъ и іезуиту *Матвѣю Ричи* *) было поручено императоромъ поставить ее на надлежащую высоту. Въ виду этого Ричи прежде всего позаботился составить хорошее сочиненіе по Ариѳметикѣ, которое впослѣдствіи было снова издано мандариномъ *Ле-Тше-Тшау* (Le-tsche-tsaou) подъ заглавіемъ: „Руководство къ Ариѳметикѣ". Кромѣ того Ричи перевелъ на китайскій языкъ первыя шесть книгъ „Началъ" Евклида, которыя появились въ 1608 г. на китайскомъ языкѣ. Труды, предпринятые Ричи съ успѣхомъ продолжали іезуиты *Шалъ* (Schaal) и *Фербіестъ* **), которые занимали мѣста президентовъ въ математическомъ судилищѣ въ Пекинѣ и которые написали нѣсколько сочиненій математическаго и астрономическаго содержанія на китайскомъ языкѣ ***). Вліяніе іезуитовъ на науки китайцевъ продолжалось до 1828 г., когда они были изгнаны изъ Китая.

---

*) *Матвѣй Ричи* (Matteo Ricci) былъ посланъ въ Китай въ 1588 г. для распространенія Евангелія. Ричи умеръ въ 1614 г. въ Пекинѣ.

**) Іезуитъ отецъ *Фердинандъ Фербіестъ* (Ferdinand Verbiest) былъ родомъ бельгіецъ изъ Брюге. Онъ былъ миссіонеръ. Посланный въ 1659 г. въ Китай съ другими миссіонерами Фербіестъ былъ заключенъ въ тюрьму по повелѣнію императора Кангъ-Ги. Просидѣвъ нѣсколько времени въ заключеніи Фербіестъ былъ призванъ къ императору для объясненія нѣкоторыхъ вопросовъ, касающихся календаря. Фербіестъ объяснилъ императору и его приближеннымъ всѣ неточности китайскаго календаря и указалъ средства для ихъ исправленія. Благодаря этому онъ занялъ почетное мѣсто при дворѣ и въ 1667 г. былъ сдѣланъ президентомъ математическаго судилища. Кромѣ того Фербіестъ преподавалъ астрономію самому императору и въ 1681 г. устроилъ пушечный заводъ, на которомъ было отлито 300 орудій. Фербіестъ умеръ въ 1688 г. въ Пекинѣ. Фербіестъ авторъ нѣсколькихъ сочиненій, написанныхъ на китайскомъ языкѣ; изъ нихъ наиболѣе извѣстно: „Astronomia europaea, sub imperatore Tartaro-Sinico *Cam-Hy* appellato, ex umbrâ in lucem revocata A. P. Ferdinando Verbiest, Flandro Belga brugensi, è Societate Jesu, academiae astronomicae in regiâ Pekinensi praefecto, anno salutis 1668". Заглавіе этого сочиненія напечатано на латинскомъ языкѣ. Вся книга состоитъ почти изъ однихъ таблицъ. Текстъ на китайскомъ языкѣ. Книга напечатана in-fol

***) Желающихъ познакомиться съ познаніями китайцевъ въ астрономіи мы отсылаемъ

Въ концѣ XVII столѣтія миссіонеры составили сочиненіе по Алгебрѣ, названное *„Тзе-кангъ-фангъ* (Tsay-kang-fang)" и представили его императору Кангу. Въ особенности много трудился надъ этимъ сочиненіемъ Шалъ. Сочиненіе это побудило императора издать указъ о составленіи извѣстной энциклопедіи, озаглавленной *„Тайные источники гармоніи чиселъ* (Leuh-lei-yuen-yuen)". Изданіе этого сочиненія такъ интересовало императора, что онъ самъ просматривалъ всѣ листы. Сочиненіе это состоитъ изъ трехъ главныхъ отдѣловъ, въ которыхъ изложены: Астрономія, Музыка и чистая Математика. Въ это сочиненіе были включены всѣ математическія свѣдѣнія сообщенныя китайцамъ іезуитскими миссіонерами. Третья часть вышеупомянутой энциклопедіи озаглавлена: *„Собраніе тонкостей ариѳметическихъ правилъ* (Suh-li-tsing-wang)", она и по нынѣ служитъ основнымъ руководствомъ при изученіи математики въ астрономической коллегіи въ Пекинѣ. Сочиненіе это состоитъ изъ двухъ главныхъ раздѣловъ.

Въ *первомъ* раздѣлѣ изложена „теорія величинъ"; онъ состоитъ изъ пяти частей. Въ 1-й говорится о происхожденіи чиселъ, при чемъ приведенъ извѣстный разсказъ о десятичной системѣ, увидѣнной Фоги на спинѣ дракона. Къ концу этой части приложено сочиненіе *Тшіу-Пи*. Въ трехъ слѣдующихъ частяхъ, заключающихъ 12 книгъ, содержится введеніе въ Геометрію, при чемъ говорится о фигурахъ и тѣлахъ разнообразныхъ формъ. Геометрія изложена менѣе удовлетворительно и менѣе строго, чѣмъ въ „Началахъ" Евклида. Въ 5-й части изложена ариѳметика, при чемъ большая часть доказательствъ дана на фигурахъ; также помѣщено много примѣровъ для поясненій; въ этой же части говорится о пропорціяхъ.

Во *второмъ* раздѣлѣ, состоящемъ изъ пяти частей, заключающихъ 40 главъ, изложены приложенія Ариѳметики. Въ 1-й части, состоящей изъ двухъ главъ, помѣщено введеніе, таблицы мѣръ, правила четырехъ основныхъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами. Во 2-й части, состоящей изъ восьми главъ, изложены свойства: линій, пропорцій, прогрессіи, правило смѣшенія, правило товарищества и уравненія. Въ 3-й части, состоящей изъ восьми главъ, показано: вычисленіе площадей фигуръ, извлеченіе квадратныхъ корней, нѣкоторыя предложенія Тригонометріи,

---

къ сочиненію: *J. B. Biot,* Études sur l'astronomie indienne et sur l'astronomie chinoise. Paris. 1862. in-8.

Также много данныхъ для исторіи математическихъ наукъ вообще, и астрономіи въ частности, среди китайцевъ находится въ сочиненіи: *L. A. Sédillot,* Matériaux pour servir a l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux. Paris. T. I—II. 1845—49. in-8. Седилло отрицаетъ самостоятельное развитіе точныхъ наукъ въ Китаѣ, а полагаетъ, что познанія свои китайцы заимствовали изъ-внѣ Китая.

употребленіе восьми тригонометрическихъ линій, опредѣленіе сторонъ треугольника, измѣреніе прямолинейныхъ и криволинейныхъ фигуръ, а также сегментовъ и правильныхъ многоугольниковъ. Въ 4-й части, состоящей также изъ восьми главъ, изложено: извлеченіе кубическихъ корней, измѣреніе многогранниковъ и кривыхъ поверхностей, вычисленіе объемовъ шара и сферическихъ сегментовъ. Также указаны вѣса различныхъ веществъ: животнаго, растительнаго и минеральнаго царства. Наконецъ въ 5-й части, состоящей изъ десяти главъ, заключается Алгебра и рѣшеніе различныхъ вопросовъ къ ней относящихся, употребленіе логариѳмовъ и другія приложенія. За этимъ слѣдуетъ еще 8 томовъ прибавленій.

Въ первыхъ двухъ томахъ показано какъ вычислять синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы, секансы и косекансы до 90°. Въ третьемъ и четвертомъ томахъ даны дѣлители чиселъ отъ 1 до 100000, для облегченія вычисленія логариѳмовъ. За каждымъ десяткомъ тысячъ даны всѣ простыя числа. Въ пятомъ и шестомъ томахъ даны десятизначные логариѳмы чиселъ отъ 1 до 100000. Таблицы эти суть по всему вѣроятію копія съ логариѳмическихъ таблицъ, составленныхъ *Адріаномъ Влакомъ* (Hadrian Vlacq) и напечатанныхъ въ Голландіи въ 1628 г. Въ концѣ этихъ таблицъ помѣщены правила для вычисленія логариѳмовъ чиселъ большихъ 100000, а также помѣщена таблица удѣльныхъ вѣсовъ различныхъ веществъ. Въ седьмомъ и восьмомъ томахъ содержатся таблицы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ, котангенсовъ, секансовъ и косекансовъ отъ 0° до 90°.

Въ заключеніе замѣтимъ еще, что китайскіе математики приписываютъ себѣ изобрѣтеніе логариѳмовъ. Въ 1840-хъ годахъ въ Шанхаѣ появилось сочиненіе „*Открытіе происхожденія логариѳмовъ* (Tay-suh-tan-yuen)", написанное *Ле-шеу-Ланомъ* (Le-scheou-Lan), который говоритъ, что ему извѣстенъ способъ вычислять логариѳмы, на основаніи геометрическихъ соображеній и что его методъ неизвѣстенъ европейскимъ ученымъ. На сколько заслуживаетъ вниманія подобное мнѣніе, мы не знаемъ, такъ какъ методъ китайскаго математика намъ совершенно неизвѣстенъ.

Индусы.

Въ началѣ нашего Очерка мы указали на особенности, представляемыя Геометріей индусовъ и упомянули, что они достигли высокаго развитія въ Алгебрѣ и Ариѳметикѣ; въ настоящее время мы коснемся этого вопроса обстоятельнѣе, указавъ чего именно достигли индусы въ этихъ наукахъ.

Благодатный климатъ страны, необыкновенное плодородіе почвы, изобиліе естественныхъ произведеній, все это имѣло громадное вліяніе на умственное развитіе и міровоззрѣнія индусовъ. Созерцаніе величественной природы способствовало совершенно иному взгляду на міръ и на все окружающее, и всего яснѣе и опредѣленнѣе отразилось на ихъ умственномъ мышленіи, которое получило то отличительное направленіе и характеръ о которомъ мы говорили выше.

Взглядъ индусовъ на внѣшній міръ былъ гораздо шире и величественнѣе, чѣмъ воззрѣнія древнихъ грековъ. Въ своей философіи они достигли того, что отъ разсмотрѣнія тѣлъ природы они перешли къ представленіямъ о безконечномъ, безграничномъ, безформенномъ, вѣчномъ; на міръ они стали смотрѣть какъ на нѣчто превратное, проходящее; представленіе о формѣ и видѣ уступило мѣсто понятіямъ о веществѣ и божественномъ началѣ. Подобныя воззрѣнія отразились и въ математикѣ индусовъ. Тоже самое имѣло мѣсто и у древнихъ грековъ, которые исходя изъ своихъ воззрѣній, искали дѣйствительно существующее, стремились узнать, на сколько необходимо, все окружающее. Индусы же напротивъ, изслѣдуя создавали формы и довольствовались найти, что нѣчто существуетъ, ни сколько незаботясь каково оно на самомъ дѣлѣ. Оба эти направленія были слишкомъ односторонни, но вмѣстѣ съ тѣмъ необходимы. Связи этихъ двухъ направленій новѣйшая математика обязана своимъ быстрымъ развитіемъ. Въ то время когда греки ставили все въ зависимость отъ формы, такъ что даже чисто ариѳметическія предложенія получали геометрическій характеръ,

индусы обращали вниманіе на однѣ только числа и Геометрія ихъ составляла часть ариѳметики.

Вліяніе окружающей природы лучше всего отразилось на религіозныхъ воззрѣніяхъ и космогоніи древнихъ индусовъ *). Въ этомъ направленіи они представляютъ поразительную противоположность съ понятіями древнихъ грековъ на тѣ же предметы. Индусы представляли себѣ своихъ боговъ подъ самыми странными и страшными образами, они являются у нихъ большею частью въ видѣ: карликовъ, великановъ, слоновъ, черепахъ и различныхъ чудовищъ; напримѣръ Шиву они изображали съ тремя глазами, съ черепомъ въ рукахъ, онъ носитъ ожерелье изъ человѣческихъ костей и опоясанъ змѣями. Жена его имѣетъ четыре руки, цвѣтъ ея темно-синій и т. п. Подвиги, сдѣланные богами индусовъ самые невѣроятные и необыкновенные. Боги эти возсѣдаютъ въ различныхъ этажахъ неба, живутъ десятки и сотни милліоновъ лѣтъ, число ихъ доходитъ до 330 милліоновъ. Во всѣхъ своихъ понятіяхъ индусы безграничны, всему сколько нибудь важному они приписываютъ самую глубокую древность, такъ напримѣръ по ихъ мнѣнію законы Ману написаны за 2 000 000 000 лѣтъ, между тѣмъ какъ извѣстно, что законы эти составлены не болѣе какъ за 3000 лѣтъ. Индусы такъ часто прибѣгаютъ къ употребленію огромныхъ чиселъ, что у нихъ даже существуетъ особое названіе *аланка* для обозначенія единицы сопровождаемой 60-ю нулями.

У грековъ, мы видимъ, совершенно противоположное, боги ихъ напоминаютъ собою обыкновенныхъ людей, не только по своему внѣшнему виду, но и по характеру и дѣйствіямъ.

Не смотря на то, что индусы приписываютъ своей наукѣ самую глубокую древность, но относительно этого вопроса положительныхъ указаній не существуетъ **). Самый древній изъ извѣстныхъ намъ въ настоящее время математиковъ индусовъ есть *Аріабатта*, жившій въ V в. по Р. Х., онъ написалъ сочиненіе астрономическаго содержанія, подъ заглавіемъ „*Аріабатт-*

*) Вліяніе природы на умственную дѣятельность человѣка прекрасно изображено у Бокля, въ его сочиненіи „Исторія цивилизаціи въ Англіи“, въ главѣ Вліяніе законовъ природы на устройство общества и характеръ отдѣльныхъ лицъ (Т. I, Гл. II).

**) По словамъ арабскаго писателя X-го вѣка Масуди у индусовъ уже въ глубокой древности процвѣтали науки. Значительный шагъ впередъ онѣ сдѣлали во время царя Брамы, когда въ храмахъ были поставлены изображенія небесныхъ глобусовъ, составлены правила астрологіи, изучено вліяніе звѣздъ на человѣка и животныхъ, въ это же время были составлены: *Сидганта*, т. е. книга времени временъ, астрономическія таблицы, а также изобрѣтены девять знаковъ, при помощи которыхъ индусы производятъ свои вычисленія. Масуди также утверждаетъ, что „Альмагестъ“ написанъ индусами, и что Птоломей изъ него заимствовалъ содержаніе своего сочиненія.

ніямъ". Изъ содержанія этого сочиненія можно заключить, что Аріабгатта былъ только собирателемъ и толкователемъ найденнаго уже до него другими. Обративъ вниманіе на методы и пріемы употребленные имъ, о которыхъ мы скажемъ ниже, необходимо предположить, что до того состоянія и развитія въ которомъ находились математическія науки во время Аріабгатты прошелъ не малый промежутокъ времени. Такое предположеніе еще тѣмъ вѣроятно, что намъ извѣстны математическія сочиненія халдеевъ и египтянъ, написанныя болѣе чѣмъ за 2000 л. до Р. Х., и несправедливо было-бы предполагать, что индусы отстали отъ нихъ. Но во всякомъ случаѣ древность, приписываемая индусскими учеными своимъ наукамъ, весьма далека отъ дѣйствительности. Подобная древность могла быть только создана фантазіей человѣка тропическихъ странъ *).

---

*) Пристрастіе индусовъ къ употребленію большихъ чиселъ отразилось въ ихъ космогоніи и религіозныхъ вѣрованіяхъ. Вся космогонія индусовъ основана на миѳологическихъ воззрѣніяхъ. Продолжительность всего вещественнаго міра они дѣлятъ на четыре большіе періода или вѣка, названные ими *yugas*. Періоды эти выражаются въ солнечныхъ годахъ. Періоды эти слѣдуютъ одинъ за другимъ въ слѣдующемъ порядкѣ и заключаютъ каждый извѣстное число лѣтъ:

1-й періодъ *Satya-yuga* (золотой вѣкъ) 1 728 000
2-й періодъ *Tretâ-yuga* (серебряный вѣкъ) 1 296 000
3-й періодъ *Dvâpara-yuga* (бронзовый вѣкъ) 864 000
4-й періодъ *Kali-yuga* (желѣзный вѣкъ) 432 000

Полная сумма составляетъ *mahâ-yuga* (большая юга) 4 320 000

Въ послѣдней югѣ мы живемъ. Число 4320000 умноженное на 1000 составляетъ новый періодъ, извѣстный подъ именемъ *kalpa*—это время протекшее отъ сотворенія всего міра. Въ сочиненіи астрономическаго содержанія *Sûrya-Sidhânta* сказано, что въ началѣ втораго вѣка, за 2160000 лѣтъ до начала kali-yuga, начали свое движеніе солнце, луна и пять большихъ планетъ. Въ эту эпоху свѣтила эти находились на одной прямой линіи, проходящей чрезъ солнце, въ полночь, подъ меридіаномъ города *Lanka*. Отъ этого мѣста и слѣдуетъ начинать счетъ. Мѣсто, названное индусами *Lanka*, принадлежитъ къ области ихъ фантазіи. Періодъ времени въ 4 320 000 лѣтъ носилъ названіе *Mahâ-yuga*. 360 человѣческихъ годовъ, т. е. обыкновенныхъ годовъ, равнялись одному божескому году; такимъ образомъ число годовъ заключающихся во всѣхъ четырехъ періодахъ равнялось 12 000 божескихъ годовъ.

Послѣ составленія законовъМану воззрѣнія браминовъ на продолжительность періодовъ времени, прошедшихъ со времени сотворенія міра, значительно расширились, періодъ въ 4 320 000 лѣтъ представляется уже воображенію браминовъ слишкомъ незначительнымъ и короткимъ. Они вводятъ представленіе о новомъ періодѣ, именно 1000 разъ взятый періодъ въ 4 320 000 лѣтъ они принимаютъ равнымъ одному дню Брамы, т. е. продолжительности существованія всего міра. Періодъ этотъ подраздѣлялся на другіе. 71 *mahayugas* составляли періодъ Ману или *manouantara*. Каждому дню Брамы соотвѣтствовала равная ему ночь. Число всѣхъ *manouantara*, по понятіямъ браминовъ, было безконечно. Послѣ каждаго *manouantara* слѣдовалъ потопъ, все разрушалось, а затѣмъ съ наступленіемъ слѣдующаго періода все создавалось вновь. 720 000 *mahayugas* или 3 110 400 000 000 человѣческихъ годовъ

Говоря объ индусской Геометріи, мы упомянули о индусскихъ ученыхъ, которые имѣли обыкновен[illegible] приписывать себѣ чужія изобрѣтенія и открытія и тѣмъ многократно вв[illegible]дили въ заблужденіе европейскихъ ученыхъ и въ томъ числѣ извѣстнаго Кольбрука *); къ этому можно прибавить еще слѣдующее: нѣкоторые ученые, въ послѣднее время, стали съ большимъ недовѣріемъ относиться къ глубокой древности всей индусской науки вообще, такъ напримѣръ извѣстный Седильо не вѣритъ даже въ глубокую древность санскритскаго языка, указывая на то, что нѣтъ ни одной санскритской надписи между многочисленными развалинами древнихъ пагодъ. Санскритскій языкъ никогда не былъ языкомъ разговорнымъ, это былъ священный языкъ браминовъ, на что указываетъ само названіе *sanctum scriptum* **). Къ этому можно прибавить еще то, что Кольбрукъ, много занимавшійся индусской литературой, положительно утверждаетъ, что санскритскій языкъ весьма мало отличается отъ греческаго. Мы уже выше упо-

---

составляли божескій годъ. По истеченіи одного вѣка Брамы, т. е. божескихъ годовъ, или 720 000 *mahayugas*, или 3 110 400 000 000 000 человѣческихъ лѣтъ, послѣ разрушенія и сотворенія 36 000 міровъ, должно наступить окончательное распаденіе всѣхъ веществъ и матеріи. Самъ Брама перестаетъ существовать и онъ возвращается въ то состояніе, изъ котораго онъ произошелъ.

Послѣ періода отдыха и тьмы снова наступаетъ цѣлый періодъ міровъ. Снова является Брама. Подобный порядокъ продолжается вѣчно

Среди такого хаоса цифръ, понятіе о которыхъ недоступно нашему представленію, брамины вполнѣ точно и опредѣленно стараются указать событія въ хронологическомъ порядкѣ.

Напомнимъ здѣсь, что періодъ въ 4 320 000 годовъ былъ извѣстенъ халдейскимъ астрономамъ. Значеніе періода въ 4 320 000 лѣтъ, и почему именно это число, а не другое, было выбрано индусами за время продолжительности всего міра, пытался объяснить извѣстный Біо, въ своемъ сочиненіи. *Biot, J. B.* Études sur l'astronomie indienne et chinoise. Paris. 1862. in-8.

Вопросъ о значеніи большихъ чиселъ, употребляемыхъ индусами, разобранъ въ статьѣ: *Albrecht Weber*, Vedische Angaben über Zeittheilung und hohe Zahlen., помѣщенной въ „Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Geselschaft" за 1861 г.

*) Извѣстный оріенталистъ Кольбрукъ (Henri Thomas Colebrooke) род. въ 1765 г., умеръ въ 1837 г. Въ 1782 г. онъ отправился въ Индію, гдѣ занималъ мѣсто секретаря Остъ-Индской Компаніи, потомъ онъ занималъ должность судьи въ Бенгалѣ и наконецъ въ 1805 г. верховнаго судьи въ Калькуттѣ. Въ 1797 г. Кольбрукъ издалъ собраніе индусскихъ законовъ, въ 4-хъ томахъ. Онъ написалъ много сочиненій, изъ которыхъ наиболѣе извѣстны: „Miscellaneous essays, Lond. 1827, 2-vol. in-8", санскритскій словарь; грамматика Панини и мн. др. Во время бытности своей въ Индіи Кольбрукъ собралъ множество древнихъ рукописей. Пробывъ болѣе 30 лѣтъ въ Индіи, Кольбрукъ возвратился въ 1816 г. въ Англію, гдѣ основалъ Азіатское Общество въ Лондонѣ.

**) *Санскритскій* языкъ это собственно языкъ классическій, ученый. Обыкновенный же языкъ, народное нарѣчіе, это *пракритъ*, который раздѣляется на нѣсколько нарѣчій.

минали о томъ, что пандиты обманывали европейскихъ ученыхъ, выдавая за свои собственныя сочиненія, заимствованное изъ иностранныхъ сочиненій. Объ этомъ упоминаетъ еще Альбируни, арабскій писатель XI в., сопровождавшій Махмуда во время его похода на Индостанъ *); онъ разсказываетъ, что имъ были переведены для индусовъ, нѣкоторые отрывки изъ сочиненій Евклида и Птоломея, но брамины немедленно переложили ихъ на стихи и представили въ такой видоизмѣненной формѣ, что онъ самъ едва могъ узнать свои переводы. Миссіонеры упоминаютъ также объ астрономическихъ таблицахъ Лагира, переведенныхъ на санскритскій языкъ, но индусскіе ученые астрономы выдаютъ ихъ за свое собственное изобрѣтеніе; Кольбрукъ, а также другіе ученые упоминаютъ, что они нерѣдко дѣлались жертвами обмана пандитовъ. Обманы были еще тѣмъ нетрудны, что большая часть сочиненій индусовъ написаны на пальмовыхъ листьяхъ *(oles)*, изъ которыхъ потомъ сшивали книги; листья эти всегда легко подмѣнить и придать имъ болѣе древній видъ. Подобные факты необходимо заставляютъ относиться весьма осторожно къ вопросамъ, гдѣ дѣло идетъ объ индусскомъ происхожденіи. Седильо даже утверждаетъ, что легенды о Кришнѣ *(Kristna)* и сопровождающіе ее комментаріи появились уже тогда, когда христіанство проникло въ Индостанъ; онъ полагаетъ, что не христіане заимствовали у индусовъ монастыри, исповѣдь, соборы и т. п., а совершенно обратно индусы у христіанъ. Извѣстный А. Веберъ, посвятившій всю свою жизнь изученію санскритской литературы замѣчаетъ, что есть основанія предполагать, что индусы заимствовали содержаніе своихъ древ-

---

*) Альбируни сопровождалъ халифа Махмуда во время похода въ Индію, предпринятаго въ началѣ XI в. Махмудъ высоко цѣнилъ науки и пригласилъ для участія въ своей экспедиціи многихъ ученыхъ, въ томъ числѣ Альбируни, и извѣстнаго врача Авицену, занимавшихся въ то время, совмѣстно, изученіемъ медицины, математики и философіи, въ городѣ Каризмѣ при устьяхъ Оксуса. Но на предложеніе Махмуда Авицена не согласился. Альбируни былъ основательно знакомъ съ греческимъ и санскритскими языками и имѣлъ самое многостороннее образованіе. Онъ авторъ многихъ сочиненій и въ томъ числѣ сочиненія о состояніи литературы и наукъ вообще въ Индіи во время прихода арабовъ; сочиненіе это написано Альбируни въ Индіи, въ 1031 г.

По словамъ Абульфараги, въ его „Арабской хроникѣ“, Альбируни перевелъ нѣкоторыя изъ арабскихъ ученыхъ сочиненій на санскритскій языкъ. Абульфарагъ считаетъ его однимъ изъ самыхъ образованныхъ и ученыхъ людей своего времени. Онъ упоминаетъ также объ его астрономическихъ наблюденіяхъ, произведенныхъ въ Газнѣ, Кабулѣ, Пешаварѣ и другихъ городахъ.

Арабами было обращено особенное вниманіе на изученіе наукъ индусовъ, но сожалѣнію объ этомъ существуетъ весьма мало указаній. Слѣды господства арабовъ въ Индіи сохранились до сихъ поръ, такъ напр. въ Дели ими была основана великолѣпная библіотека.

нѣйшихъ астрономическихъ сочиненій, извѣстныхъ подъ именемъ *Сидгантъ*, изъ греческихъ сочиненій. Въ подтвержденіе подобныхъ мнѣній нѣкоторые ученые указываютъ на отрывокъ изъ сочиненія астрономическаго содержанія, написаннаго Варага-Мигирой, жившимъ въ VI в., въ которомъ сказано: „хотя греки нечистые, но тѣмъ не менѣе они достойны уваженія за услуги, оказанные ими наукамъ; тѣмъ болѣе брамины заслуживаютъ вниманія, такъ какъ кромѣ познаній въ наукахъ, они соединяютъ въ себѣ еще чистоту души". На этотъ отрывокъ обратилъ вниманіе еще Альбируни, а впослѣдствіи Кольбрукъ и Рено *).

Другіе ученые противнаго мнѣнія, такъ напримѣръ, извѣстный Бенке утверждалъ, что Архимедъ свое сочиненіе „О числѣ песчинокъ" заимствовалъ изъ индусскихъ источниковъ. На послѣднее мнѣніе снова обратили вниманіе ученые въ настоящее время **).

Познакомившись съ методами и пріемами индусскихъ математиковъ, мы увидимъ, что едва-ли можно съ вѣроятностью допустить, чтобы индусскіе ученые заимствовали всѣ свои познанія у греческихъ философовъ, или обратно. Весьма можетъ быть, что первоначальныя основныя зачатки математическихъ наукъ у индусовъ обязаны своимъ происхожденіемъ изъ-внѣ. На развитіе математическихъ наукъ у индусовъ, могли оказать съ одной стороны вліяніе познанія египтянъ и грековъ, съ другой—халдеевъ. Такое вліяніе несомнѣнно существовало, но во всякомъ случаѣ не подлежитъ сомнѣнію, что методы и пріемы индусскихъ ученыхъ такъ своеобразны и представляютъ такъ мало сходства съ пріемами древнихъ греческихъ геометровъ, что необходимо допустить, что развитіе индусской математики шло вполнѣ самостоятельно безъ всякаго посторонняго вліянія.

---

*) Въ послѣднее время появилась интересная статья „*Leon Rodet*, l'Algèbre d'Al-Kharizmi et les méthodes indiennes et grecque", помѣщенная въ Journal Asiatique, T. XI, за 1878 г., въ которой авторъ положительно утверждаетъ, что первоначальныя свои свѣдѣнія въ математическихъ наукахъ индусы заимствовали изъ сочиненій древнихъ греческихъ математиковъ.

Выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ, а также теорія многоугольниковъ вписанныхъ въ кругъ была изложена въ сочиненіи Герона Старшаго „О діоптрѣ", а также въ III-й части его „Метрика", на что мы уже указывали говоря о трудахъ Герона Старшаго на стр. 114—119 настоящаго сочиненія. Мартенъ въ своемъ замѣчательномъ изслѣдованіи о трудахъ Герона (*H. Martin*, Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie, ect, напечатано въ Mémoires présentés par divers savants a l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, T IV. Paris 1854) положительно утверждаетъ, что сочиненія Герона были извѣстны индусамъ и что выраженіе для площади треугольника въ функціи сторонъ они заимствовали изъ его сочиненій. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что подобный взглядъ не раздѣляютъ многіе ученые, въ томъ числѣ извѣстный Ганкель.

**) *F. Woepcke*, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens Paris. 1863. in-8.

Самое лучшее представленіе объ индусской математикѣ можно составить познакомившись съ содержаніемъ извѣстныхъ въ настоящее время сочиненій математическаго и астрономическаго содержанія, написанныхъ индусскими учеными. Къ сожалѣнію, до сихъ поръ извѣстны весьма немногія сочиненія математическаго содержанія, написанныя на санскритскомъ языкѣ *).

Самыя древнія, изъ извѣстныхъ до сихъ поръ сочиненій на санскритскомъ языкѣ, въ которыхъ можно найти слѣды познаній индусовъ въ математическихъ наукахъ, это *Кальпасутра (Kalpasûtra)*, т. е. сборникъ въ которомъ указаны правила какъ производить жертвоприношенія. При этомъ сочиненіи приложено другое маленькое сочиненіе геометрически-теологическаго содержанія, въ которомъ даны правила какъ строить жертвенники, сочиненіе это носитъ названіе *Сульвасутра (Çulvasûtra)*, т. е. „Правила веревки". Въ настоящее время извѣстны три подобные сборника, составленные *Бодгаяна (Baudhâyana)*, *Апастамба (Âpastamba)* и *Катьяяна (Kâtyâyana)*. Къ сожалѣнію неизвѣстно время когда жили поименованныя лица. Нѣкоторые ученые полагаютъ, что они современники извѣстнаго грамматика Панини, жившаго по мнѣнію нѣкоторыхъ во II в. до Р. Х., а по мнѣнію другихъ во II в. по Р. Х. Весьма вѣроятно, что подобные сборники были составлены вскорѣ послѣ того, какъ написаны были Веды, т. е. священныя книги индусскихъ браминовъ. Веды же составлены около 1500 л. до Р. Х.

Изученіемъ и изслѣдованіемъ содержанія „Правилъ веревки" занимался Тибо, издавшій три извѣстные въ настоящее время подобные сборника **).

---

*) Европейцы познакомились съ математическими сочиненіями индусовъ только въ концѣ прошлаго столѣтія благодаря трудамъ Кольбрука, Страхея и Телера, написавшихъ слѣдующія сочиненія:

Bija Ganita, or the Algebra of the Hindus, by *Edw. Strachey*. London, 1813. in-4.

Lilavati or a treatise on Arithmetic and Geometry by Bhascara Acharya, translated from the original sanscrit by *J. Taylor*. Bombay, 1816, in-4.

Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara; translated by H. T. Colebrooke. London, 1817, in-4.

Изъ поименованныхъ сочиненій особеннаго вниманія заслуживаютъ труды Кольбрука. Много интересныхъ свѣдѣній о математикѣ индусовъ также можно найти въ сочиненіи: *Buchner*, De Algebra Indorum. Elbing, 1821.

Въ послѣднее время „Сидгантаціромани" Васкары была переведена въ Калькуттѣ *Wilkinson*'омъ и *Bâpû Deva Çâstrî* и напечатана въ Biblot. indic., new. series, № 13, 28 за 1862 г. Другое сочиненіе „Сурія-Сидганта" было переведено и комментировано *Bourgess*'омъ и напечатано въ Journ. of the Amer. orient. soc. T. VI, Newhaven. 1860. Первыя четыре главы сочиненія Васкары были также переведены *Brockhaus*'омъ и напечатаны въ Berich. der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1852.

**) Изъ числа такихъ сочиненій въ настоящее время изданы три, именно; „The Sulva-

Правильное построеніе жертвенника считалась у браминовъ дѣломъ первостатейной важности; малѣйшая неправильность въ направленіи расположенія или размѣрахъ различныхъ частей жертвенника, по понятіямъ индусскихъ браминовъ, влекло за собою непринятіе жертвоприношенія богами, о чемъ имъ страшно даже было подумать. Благодаря такимъ понятіямъ возникла цѣлая наука о построеніи жертвенниковъ или какъ ее назвалъ Роде „ведическая геометрія", остатки которой дошли до насъ въ сохранившихся Сулвасутрахъ При построеніи жертвенниковъ прежде всего проводилась главная—основная линія, т. е. ось симметріи фигуры основанія жертвенника Линія эта была всегда направлена съ Запада на Востокъ и носила названіе „линіи (ребра) спины *(prâcî)*". Площадь основанія жертвенниковъ обыкновенно имѣла форму какого нибудь животнаго, какъ напр. птицы, черепахи и т. п. Различныя части основанія, даже если оно имѣетъ правильную геометрическую форму, носятъ названія различныхъ частей фигуры животнаго, такъ напр. бедро, ребро, плечо и т. д. Направленіе главной оси жертвенниковъ, т. е. линіи идущей съ Запада на Востокъ, опредѣляли наблюденіемъ тѣни вертикально-стоящаго стержня до и послѣ полудня. Подобный пріемъ примѣнялся также Витрувіемъ. Изъ содержанія нѣкоторыхъ правилъ Сулвасутръ видно, что автору ихъ была извѣстна теорема Пиѳагора. Она является у него въ слѣдующей формѣ и выражена въ слѣдующихъ словахъ: „веревка, проведенная наискось въ продолговатомъ квадратѣ образуетъ тоже, что образуютъ вмѣстѣ, каждая отдѣльная изъ мѣръ: продольныхъ и поперечныхъ". Какъ не темно это выраженіе, но безъ сомнѣнія это есть предложеніе Пиѳагора, такъ какъ далѣе авторъ продолжаетъ: „это мы познаемъ на числахъ: 3 и 4, 12 и 5, 15 и 8, 7 и 24 12 и 35, 15 и 36".

При построеніи жертвенниковъ примѣняются треугольники, коихъ стороны 3, 4, 5 и 5, 12, 13, для проведенія перпендикулярныхъ линій. Болгаяна выражаетъ это терминомъ „провесть плечо къ линіи спины". Авторъ „Правилъ веревки" вмѣсто того, чтобы говорить, подобно намъ „квадратъ построенный на линіи", выражаетъ это въ слѣдующихъ словахъ: „то что образуется". Мы уже видѣли, что теорему Пиѳагора онъ выражаетъ словами: „то, что образуется на двухъ сторонахъ, равно тому, что образовано на діагонали".

Вышеуказаннымъ пріемомъ находится направленіе восточно-западной линіи также въ Сурѣ-Сидгантѣ. Когда эта линія найдена, то къ ней пер-

sutras by *G. Thibaut*. Reprinted from the Journal Asiatic Society of Bengal, Part. I for 1875. Calcutta, 1875". Вопросомъ этимъ также занимался Канторъ въ своихъ: „Gräkoindische Studien", помѣщенныхъ въ „Zeitschrift für Mathematik und Physik", T. XXII, 1877.

пендикулярная находится при помощи веревки, пользуясь теоремой Пиоагора. Пріемъ заключается въ слѣдующемъ примѣрѣ: пусть длина восточно-западной линии 36 падасовъ (*padas*); въ обоихъ концахъ этой линіи вбиваютъ колья въ землю. Къ этимъ кольямъ прикрѣпляютъ концы веревки длиною въ 54 падаса, на которой предварительно на разстояніи 15 падасовъ отъ одного изъ концевъ сдѣланъ узелъ. Если теперь натянуть веревку на поверхности земли, держа за узелъ, то получается прямой уголъ при концѣ восточно-западной линіи (фиг. 15). Пріемъ этотъ былъ извѣстенъ,

Фиг. 15.



какъ мы уже замѣтили выше, халдеямъ и египтянамъ. Подобнымъ же пріемомъ строилъ прямые углы Геронъ Старшій.

Въ Сульвасутрахъ показаны также правила обращенія одной фигуры въ другую ей равновеликую, а также увеличеніе или уменьшеніе фигуръ въ извѣстномъ отношеніи. Знаніе этого было необходимо, такъ какъ жертвенники должны были быть съ поверхностями различной величины. У индусовъ повторяется тоже, что и у древнихъ грековъ при рѣшеніи извѣстной задачи „удвоенія куба“, рѣшеніе которой повело къ знакомству съ коническими сѣченіями, о которыхъ нѣтъ и слѣдовъ у индусскихъ математиковъ. Индусскіе ученые ограничились умѣніемъ увеличить въ кратное число разъ данную плоскую фигуру, или иными словами найти квадратный корень. Подобныя задачи они умѣли рѣшать ариѳметически и геометрически. Примѣнить же геометрическій методъ при извлеченіи кубическихъ корней, которые они, какъ мы увидимъ ниже, извлекали съ большимъ умѣніемъ, представлялось имъ невозможнымъ, благодаря полному незнакомству ихъ съ коническими сѣченіями.

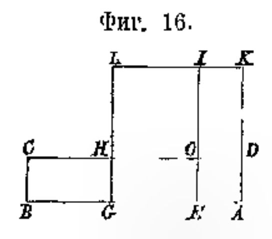
Геометрически извлеченіе квадратныхъ корней Бодгаяна выражаетъ слѣдующимъ правиломъ: веревка натянутая наискось равносторонняго прямоугольника, даетъ квадратъ двойной площади. Веревка натянутая наискось продолговатаго прямоугольника даетъ двѣ площади, которыя дѣлаютъ веревки, натянутыя вдоль большей и меньшей изъ сторонъ. Для поясненія втораго случая Бодгаяна приводитъ числа: 3 и 4, 12 и 5, 15 и 8, 7 и 24, 12 и 35, 15 и 36, которыя представляютъ стороны прямоугольника. Изъ сказаннаго ясно, что Бодгаяна доказываетъ Пиоагорову теорему не на пря-

моугольномъ треугольникѣ, а на прямоугольникѣ, при чемъ онъ различаетъ два случая, именно, когда катеты равны и когда они неравны *).

Приведенныя нами предложенія находятъ примѣненіе въ Сулвасутрахъ при построеніи жертвенниковъ, при чемъ въ большинствѣ случаевъ требуется рѣшить одинъ изъ слѣдующихъ двухъ вопросовъ: требуется обратить данную фигуру въ другую ей равновеликую, или же извѣстную длину нужно увеличить или уменьшить на столько, чтобы квадратъ на ней построенный увеличился въ отношеніи $1:m$. Нахожденіе стороны квадрата въ 2, 3, 10, 40 большаго даннаго легко найти при помощи теоремы Пиѳагора. Прилагая послѣдовательно теорему Пиѳагора сначала къ прямоугольному равнобедренному треугольнику, а потомъ снова строя на этой гипотенузѣ, принятой за катетъ, равнобедренный треугольникъ и т. д., мы послѣдовательно получимъ соотвѣтствующія величины гипотенузъ, или какъ онѣ названы въ Сулвасутрахъ: *dvikarani* $=\sqrt{2}$, *trikarani* $=\sqrt{3}$, *daçakarani* $=\sqrt{10}$, *catvariņçatkarani* $=\sqrt{40}$ и т. д.

Пріемъ, употребленный Бодгаяна, для обращенія одной фигуры въ другую ей равновеликую, существенно отличается отъ методовъ употребляемыхъ греческими геометрами. При обращеніи прямоугольника въ равновеликій квадратъ Бодгаяна пользуется только Пиѳагоровой теоремой **). Сущность его пріема заключается въ слѣдующемъ: отъ даннаго прямоугольника $ABCD$ отрѣзываютъ квадратъ $ADOE$, коего сторона $AE=AD$. Оставшуюся часть прямоугольника $EOCB$ при помощи прямой GH дѣлятъ пополамъ и лѣвую часть $GHCB$ прикладываютъ сверху къ маленькому квадрату $ADOE$, при чемъ она приметъ положеніе $DOIK$. Такимъ образомъ прямоугольникъ $ABCD$ обращенъ въ гномонъ $AGHOIKA$ ***), который

Фиг. 16.



*) Канторъ обращаетъ вниманіе на то, что точно такимъ же образомъ доказываетъ теорему Пиѳагора Геронъ Старшій въ своей Геометріи. Весьма вѣроятно, что и Пиѳагоръ обнаружилъ справедливость своего предложенія первоначально на квадратѣ и прямоугольникѣ.

**) Задачу эту Евклидъ въ своихъ „Началахъ" рѣшаетъ совершенно иначе. Онъ опускаетъ перпендикуляръ изъ точки на окружности на діаметръ. См. Пред. 14, Кн. 2 „Начала Евклида" стр. 131.

***) Подъ именемъ гномона въ „Началахъ" Евклида понимаютъ фигуру выдѣленную изъ квадрата, какъ напр. фигура $KAGHOIK$ (фиг. 16).

легко превратить въ квадратъ при помощи теоремы Пиѳагора. Особеннаго названія для гномона Бодгаяна не употребляетъ, онъ говоритъ прямо „разность двухъ квадратовъ *AKLG* и *OILH**)“ (фиг. 16).

Особенное вниманіе обратили индусскіе математики на извлеченіе квадратныхъ корней, которое, какъ извѣстно, геометрически всегда возможно, но ариѳметически часто выполнимо только по приближенію, до какой угодно степени точности. Степень приближенія полученная Бодгаяна и Анастамба при извлеченіи $\sqrt{2}$ вполнѣ достаточна въ практическихъ примѣненіяхъ и весьма близка къ истинной величинѣ. Выраженіе, данное ими для $\sqrt{2}$ заслуживаетъ особеннаго вниманія, оно слѣдующее:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} \ {}^{**)}.$$

Самые интересные вопросы Сулвасутръ относятся къ попыткамъ индусскихъ математиковъ рѣшить задачу о равенствѣ прямолинейной и круглой фигуръ. Вопросъ этотъ интересенъ какъ съ ариѳметической, такъ и съ геометрической точекъ зрѣнія. Греческіе геометры, какъ извѣстно, пытались рѣшить вопросъ о превращеніи даннаго круга въ равновеликій квадратъ, т. е. задачу извѣстную подъ именемъ *квадратуры круга*, индусскіе же математики въ Сулвасутрахъ стремятся рѣшить обратный вопросъ, т. е. превращеніе даннаго квадрата въ равновеликій кругъ; вопросъ этотъ можно назвать *циркулатурой квадрата*. Рѣшеніе данное въ Сулвасутрахъ состоитъ въ слѣдующемъ: въ данномъ квадратѣ *ABCD* проводятся діаго-

---

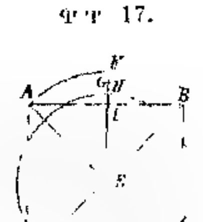
*) Въ сочиненіяхъ Баскары также встрѣчается гномонъ, но особеннаго термина для его обозначенія нѣтъ. Канторъ полагаетъ, что гномонъ указываетъ на греческое вліяніе.

**) Теонъ Смирнскій для $\sqrt{2}$ находитъ слѣдующія послѣдовательныя приближенія $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots\ldots$ Послѣднее, изъ написанныхъ выраженій, есть ничто иное какъ часть выраженія для $\sqrt{2}$ данная Бодгаяна, т. е. $\frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4}$. Выраженіе, данное Теономъ, Бодгаяна представляетъ въ видѣ единицы и суммы дробей съ числителями равными единицей.

Происхожденіе послѣдняго члена $\frac{1}{3.4.34}$ выраженія для $\sqrt{2}$, Канторъ объясняетъ слѣдующимъ образомъ: величина $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{17}{12}$ слишкомъ велика для $\sqrt{2}$, такъ какъ $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2\frac{1}{144}$; болѣе же точная величина найдется если изъ приведеннаго выше выраженія для $\sqrt{2}$ вычтемъ $\frac{1}{144} : 2\frac{17}{12} = \frac{1}{144} : \frac{34}{12} = \frac{1}{12.34}$, послѣдняя же дробь есть ничто иное какъ послѣдній членъ выраженія, даннаго Бодгаяна для $\sqrt{2}$, т. е. $\frac{1}{3.4.34}$.

нали AC и BD (фиг. 17) чрезъ точку ихъ пересѣченія E проведена прямая KI, параллельная сторонамъ AD и BC квадрата. Изъ точки E, какъ

Фиг. 17.



изъ центра, радіусомъ равнымъ AE, опишемъ дугу AF круга, которая пересѣчетъ продолженіе прямой KI въ точкѣ F. Отрѣзокъ IF въ точкахъ G и H дѣлятъ на три равныя части и радіусомъ EH описываютъ кругъ, который и принимаютъ за искомый —равновеликій данному квадрату $ABCD$.

Построенію этому Канторъ стремится дать слѣдующее численное толкованіе: отрѣзокъ IF раздѣленный на три равныя части, онъ предполагаетъ, былъ принятъ за 3, а потому: $EA = EI + 3$ или $EI.\sqrt{2} = EI + 3$, слѣдовательно:

$$EI^2 - 6EI = 9$$

или

$$EI = 3 + \sqrt{18}$$

принимая въ первомъ приближеніи $\sqrt{18} = 4$, находимъ $EI = 7$ или $EA = 10$, т. е. $\sqrt{2} = \frac{10}{7}$. Если такое предположеніе справедливо, то сторона квадрата равна 14, діагональ—20, а діаметръ равновеликаго ему круга—16. Площадь же этого круга выразится чрезъ:

$$14^2 = (16 - 2)^2 = \left(16 - \frac{16}{8}\right)^2$$

Послѣднее выраженіе заключаетъ въ себѣ двойное правило, именно: 1) при рѣшеніи вопроса о циркулатурѣ квадрата за діаметръ круга принимаютъ $\frac{8}{10}$ діагонали квадрата, и во 2) при рѣшеніи вопроса о квадратурѣ круга, за сторону квадрата принимаютъ $\frac{7}{8}$ діаметра круга *).

*) Подобный пріемъ примѣняется также въ папирусѣ Ринда, гдѣ сторону квадрата, равновеликаго данному кругу, принимаютъ равной $\frac{8}{9}$ діаметра этого круга (см. стр. 337).

Для нахожденія стороны квадрата, равновеликаго данному кругу, Бодгаяна пользуется еще болѣе точнымъ выраженіемъ, именно сторону квадрата онъ принимаетъ равной не $\frac{7}{8}$ діаметра даннаго круга, а вводитъ еще въ выражение діаметра множитель:

$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8}$$

Послѣдние три члена этого выраженія получились вслѣдствіи того, что Бодгаяна желалъ выразить примѣненное имъ построеніе формулой пользуясь не выраженіемъ:

$$\sqrt{2}=\frac{10}{7}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4.7}$$

а вышеприведеннымъ уже:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{3.4.34}=\frac{577}{408}$$

Изъ фигуры 17 видно, что:

$$EA=EI.\sqrt{2}\quad,\quad FI=EI(\sqrt{2}-1)\quad,\quad HI=EI\frac{\sqrt{2}-1}{3},$$

$$EH=EI+IH=EI.\frac{\sqrt{2}+2}{3}\quad,\quad EI=\frac{3}{2+\sqrt{2}}.EH$$

въ выраженіяхъ этихъ EI есть половина стороны квадрата, а EH радіусъ равновеликаго ему круга. Послѣднее изъ написанныхъ выраженій представляетъ соотношение между половиной стороны квадрата и радіусомъ круга; удвоенное это выраженіе представитъ соотношеніе между стороной квадрата и діаметромъ равновеликаго ему круга, оно зависитъ также отъ того же множителя $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$, что и первое соотношеніе. Подставляя въ этотъ множитель вмѣсто $\sqrt{2}$ найденное выше его значение $\frac{577}{408}$, найдемъ, что онъ выразится чрезъ:

$$\frac{1224}{1393}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8.29}-\frac{1}{8.29.6}+\frac{1}{8.29.6.8}-\frac{41}{8.29.6.8.1393}$$

Послѣдній членъ написаннаго выраженія разнится всего на $\frac{1}{34}$ отъ предшествующаго и по своей числовой величинѣ незначителенъ, по этой причинѣ Бодгаяна вѣроятно пренебрегъ имъ.

Кромѣ указаннаго правила для нахожденія квадратуры круга, находится еще другое, которое одинаково примѣняется Бодгаяна, Апастамба и Катаяна. Правило это заключается въ слѣдующемъ: „раздѣли (діаметръ)

на 15 равныхъ частей и отнимъ 2 части, то (т. е. то, что останется) и представить приближенно сторону квадрата *)".

Въ Сулвасутрахъ отношеніе окружности къ діаметру, т. е. π, полагается равнымъ 3, такъ какъ площадь квадрата или равновеликаго ему круга предполагается равной утроенному квадрату, построенному на радіусѣ. Мы уже выше упоминали, что халдейскіе математики полагали $\pi = 3$, а потому весьма вѣроятно, что это выраженіе перешло отъ нихъ къ индусамъ.

Познакомившись съ основными началами ведической Геометріи можно видѣть какъ важны Сулвасутры для исторіи развитія математическихъ наукъ у индусовъ. Весьма вѣроятно, что со временемъ когда ученые познакомятся съ другими сочиненіями подобнаго же содержанія станутъ извѣстны новыя данныя, которыя прольютъ свѣтъ и до нѣкоторой степени объяснятъ характеръ и направленіе принятое математическими науками у индусовъ и своеобразность ихъ методовъ и пріемовъ. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію собственно математическихъ сочиненій, написанныхъ индусскими учеными.

Самый древній изъ математиковъ, о которомъ упоминается въ индусскихъ лѣтописяхъ, это *Аріабатта*, написавшій около 550 г. по Р. Х. **) сочиненіе математически-астрономическаго содержанія, подъ заглавіемъ *„Аріабаттіамъ"*. Изъ другихъ сочиненій мы познакомимся съ трудами *Брамагупты*, жившаго въ VII в., и *Баскары* жившаго въ XI в. ***). До послѣд-

---

*) Канторъ обращаетъ вниманіе, что подобный пріемъ приближенія встрѣчается у Герона Старшаго при нахожденіи высоты равносторонняго треугольника. Отъ Герона онъ перешелъ къ римскимъ агримензорамъ и примѣняется Колумеллой.

**) Въ настоящее время вполнѣ точно извѣстно время, когда жилъ Аріабатта, благодаря указанію, находящемуся въ III-й главѣ его сочиненія Аріабаттіамъ. Онъ говоритъ „когда прошло шестьдесятъ разъ шестьдесятъ и истекло три юги, я могъ безъ всякаго сомнѣнія насчитать двадцать три года своего существованія". Изъ этого видно, что Аріабатта родился въ 3600—23 = 3578 году калиюги. Начало настоящаго лѣтосчисленія индусовъ совпадаетъ съ 78 годомъ нашей эры, а по словамъ Брамагупты началось въ 3179 калиюги, слѣдовательно первый годъ новой эры приходится на 3101 или 3102 гг. до Р. Х., а потому Аріабатта родился въ 3577—3102 гг. калиюги или въ 476 нашей эры. Сочиненіе его можно отнести къ началу VI в.

Аріабатта родился въ Паталипутрѣ (городъ цвѣтовъ), древней столицѣ историческихъ государей Индостана, въ которомъ процвѣтала школа ученыхъ и гдѣ вѣроятно преподавалъ свои ученія также Аріабатта. Во время Аріабатты процвѣтала еще другая школа, въ Уджаини (Ujjayini), представителемъ этой школы былъ Варага-Мигира, написавшій сочиненія астрономическаго и математическаго содержанія.

***) Времена когда жили Аріабатта, Брамагупта и Баскара установлены вполнѣ точно

наго времени было обращено болѣе вниманія на сочиненія послѣднихъ двухъ, изъ упомянутыхъ нами ученыхъ, хотя во многихъ частяхъ трактаты ихъ содержатъ только дальнѣйшее развитіе, сказаннаго уже прежде Аріабгаттой. На основаніи сказаннаго, мы сначала разсмотримъ сочиненіе Аріабгатты, а затѣмъ уже перейдемъ къ сочиненіямъ Брамагупты и Баскары.

Аріабгатты. Первый обратившій должное вниманіе на сочиненіе Аріабгатты „*Аріабгаттіамъ*" былъ профессоръ Лейденскаго университета Кернъ, издавшій его текстъ въ 1874 г. на санскритскомъ языкѣ. Къ тексту приложенъ пространный комментарій „*Bhatadîpikâ*", написанный на это сочиненіе *Парамадисварой (Paramâdîçvara)*, относительно котораго Керну неудалось собрать никакихъ указаній *).

„Аріабгаттіамъ" состоитъ изъ четырехъ частей, которыя заключаютъ всего 123 строфы. Содержаніе, каждой изъ этихъ частей, слѣдующее:

I—„Небесная гармонія", —это собраніе численныхъ таблицъ.

II—„Начала счисленія".

III—„О времени и его измѣреніи".

IV—„Шары".

Въ настоящее время переведена только вторая часть **) „Аріабгаттіама" французскимъ ученымъ *Роде* (Rodet), написавшимъ къ ней комментарій ***) въ 1879 г. Познакомимся вкратцѣ съ содержаніемъ переведенной

благодаря изслѣдованіямъ *Bhaû Dâjî*, On the age and authenticity of the works of Varâhamihira, Brahmegupta, Bhattotpala and Bhaskaracharya, помѣщеннымъ въ „Journal of the Asiatic Society" за 1865 г.

*) Кромѣ сочиненія „Аріабгаттіамъ" Аріабгатта написалъ еще другое, заглавіе котораго „*Десять куплетовъ (Daçagîti)*"; въ настоящее время, по словамъ Керна, сохранились еще рукописные списки этого сочиненія.

**) Первая часть „Аріабгаттіама" заключаетъ собраніе численныхъ таблицъ, имѣющихъ примѣненіе при астрономическихъ вычисленіяхъ. Въ III-й части въ самомъ началѣ говорится о раздѣленіи времени. Время авторъ дѣлитъ на слѣдующія части: „годъ имѣетъ двѣнадцать мѣсяцевъ, мѣсяцъ тридцать дней; день состоитъ изъ шестидесяти *nâdi*, а каждый *nâdi* изъ шестидесяти *vinâdi*". Далѣе Аріабгатта продолжаетъ: „шестьдесятъ долгихъ гласныхъ составляютъ одинъ *vinâdika* или же шесть вдыханій".

***) Текстъ второй части „Аріабгаттіама", переведенный Роде, заключаетъ всего 33 правила, изложенныхъ въ стихотворной формѣ, въ самомъ сжатомъ видѣ. Мы полагаемъ не безъинтереснымъ привести здѣсь нѣкоторыя изъ правилъ перевода Роде.

I.—Восхваливъ Браму, Землю, Луну, Меркурія, Венеру, Солнце, Марса, Сатурна и созвѣздія, Аріабгатта въ „Городѣ цвѣтовъ" излагаетъ начала высокочтимой науки, состоящей въ слѣдующемъ.

II.—*Eka, daçan, çata, sahasra, ayuta, niyuta, prayuta, koti, arbuda, vrnda* относительно своего мѣста (положенія), каждое въ десять разъ больше послѣдующаго.

III. „Квадратъ" (*varga*) есть четыреугольникъ съ равными сторонами; его „площадь",

части „Аріабгаттіама“, которая укажетъ намъ состояніе математики во время Аріабгатты *).

Въ началѣ второй части авторъ приводитъ названія десяти чиселъ, изъ которыхъ каждое предъидущее въ десять разъ больше послѣдующаго, но далѣе сотени милліоновъ, т. е. 10^8, онъ не идетъ **). Затѣмъ слѣдуютъ опредѣленія квадрата и куба и выраженіе ихъ площади и объема. Аріабгатта говоритъ, что квадратъ есть четырехсторонникъ, съ равными сторо-

т. е. площадь есть произведеніе двухъ равныхъ чиселъ.—Произведеніе трехъ равныхъ чиселъ есть „кубъ“ (*ghana* - тѣло), и фигура съ двѣнадцатью ребрами.

VI.—Площадь треугольника (трехсторонника) равна произведенію перпендикуляра общаго двумъ сторонамъ (половинамъ), и половины основанія.—Половина этого произведенія умноженная на высоту есть тѣло съ шестью ребрами.

VII.—Половина окружности (*paridhi*) умноженная на половину діаметра (*ardha-vishkambha*) даетъ площадь круга (*vrtta*).—Этотъ послѣдній умноженный на свой собственный корень (квадратный), выражаетъ точно объемъ шара (*gôla*).

IX.—Хорда шестой части окружности (*paridhi*) равна половинѣ діаметра.

X.—Прибавьте 4 къ 100, умножьте на 8, прибавьте еще 62000, это будетъ для діаметра равнаго двумъ миріадамъ (*ayutâs*) приближенная величина окружности.

XI.—Раздѣлите (на равныя части) четверть окружности при помощи треугольника и четыреугольника, то получите на радіусѣ всѣ „полухорды“ (т. е. синусы—*jyâ-ardha*, дугъ (*câpa*) которыя пожелаете.

XIII.—Кругъ получается вращеніемъ. Прямоугольный треугольникъ опредѣляется гипотенузой (*karna*), прямоугольникъ—діагональю (*karna*); горизонтальная линія—уровнемъ, вертикальная—отвѣсомъ.

XX.—Число членовъ есть (сумма) умноженная на 8 разъ взятую разность, прибавленная къ квадрату избытка дважды взятаго перваго члена надъ разностью. Отъ полученнаго выраженія взять) корень квадратный, уменьшенный на дважды взятый первый членъ. Полученное выраженіе дѣлять на разность, къ этому прибавляютъ 1 и берутъ половину.

XXII.—Послѣдній членъ, этотъ прибавленный къ единицѣ, этотъ увеличенный на число членовъ; отъ произведенія этихъ трехъ чиселъ возьмите одну шестую, это будетъ объемъ квадратной кучи.

XXX.—Разность между числами рупій, принадлежащихъ двумъ лицамъ, раздѣлите на разность предметовъ: частное будетъ стоимость предмета, если имущества ихъ равны.

*) Современникомъ Аріабгатты былъ *Варага-Мигира* (Varâha-Mihira), занимавшійся астрономіей и астрологіей. Варага-Мигира написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ было болѣе извѣстно Самгита (Sanhita), въ которомъ авторъ говоритъ о вліяніи и значеніи кометъ. Варага-Мигира принадлежитъ къ другой школѣ чѣмъ Аріабгатта.

Въ своихъ сочиненіяхъ Варага-Мигира говоритъ, что самый древній, изъ извѣстныхъ ученыхъ носилъ имя Мая (Maya). Самое древнее изъ астрономическихъ сочиненій *Сурья-Сиддханта* (Soûrya-siddhânta) индусскіе ученые приписываютъ Маю; объ этомъ также упоминаетъ Альбируни, къ сожалѣнію онъ не упоминаетъ времени, когда жилъ послѣдній.

**) Пріемъ Аріабгатты подробно изложенъ въ статьяхъ: *Rodet*, Leçons de calcul d'Âryabhata. Journal Asiatique Mai—Juin 1879.—*Rodet*, Sur la veritable signification de la notation numérique inventée par Âryabhata. Journ. Asiat. Octobre—Novem.—Décem. 1880.

нами, площадь же его есть произведеніе двухъ равныхъ чиселъ. Произведеніе трехъ равныхъ чиселъ есть кубъ, или фигура съ двѣнадцатью ребрами. Всѣ фигуры и всѣ тѣла Аріабгатта выражаетъ числомъ сторонъ и реберъ. Далѣе показано правило для извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней. Площадь треугольника Аріабгатта полагаетъ равной половинѣ произведенія основанія на высоту. Для объема тетраедра дано неправильное выраженіе. Площадь круга онъ полагаетъ равной произведенію половины окружности на радіусъ. Для шара же выраженіе объема дано неправильное, именно объемъ шара принимается равнымъ $\frac{1}{2}\pi^{3}.R^{3}$. Принявъ это выраженіе за объемъ шара, отношеніе окружности къ діаметру выразится чрезъ $\pi=\frac{16}{9}$.

Далѣе слѣдуетъ теорема Пиѳагора, которая выражена въ такой же почти формѣ какъ въ „Правилахъ веревки". Затѣмъ слѣдуетъ рядъ предложеній, вытекающихъ изъ пиѳагоровой теоремы. Въ 10-мъ правилѣ показано какъ вычислить приближенное отношеніе окружности къ діаметру, которое, сдѣлавъ всѣ дѣйствія указанныя авторомъ, будетъ:

$$\pi=\frac{62832}{20000}=3,1416$$

Выраженіе это замѣчательно по своей точности и способу какъ оно получается *). Также интересно, что это выраженіе впослѣдствіи дано также Баскарой, но въ сокращенной формѣ, именно:

$$\pi=\frac{3927}{1250}$$

Въ 12-мъ правилѣ показано устройство таблицы синусовъ, которые выражены также какъ и въ древнѣйшемъ астрономическомъ сочиненіи „Суріа-Сиддантѣ" **). Синусы выражены въ минутахъ, т. е. въ шестидесятич-

---

*) Число 62832 принято Аріабгаттой для діаметра равнаго двумъ миріадамъ, или радіуса равнаго одной миріадѣ, весьма интересно въ томъ отношеніи, что указываетъ какъ-бы на греческое происхожденіе, такъ какъ одни греки считали при помощи миріадъ. Но съ другой стороны необходимо обратить вниманіе на то, что выраженіе $\pi=\frac{22}{7}$, данное Архимедомъ, нигдѣ не упоминается Аріабгаттой.

**) Самое древнее изъ астрономическихъ сочиненій индусовъ носитъ названіе *Суріа-Сиддганта* (Sûrya—солнце, Siddhânta—наука, система, теорія), авторомъ его считаютъ *Асура-Майа* (Asura-Maya—демонъ Майа). Когда жилъ Асура-Майа нельзя сказать положительно, за недостаткомъ какихъ-либо положительныхъ указаній. Варага-Мигира, современникъ Аріабгатты, упоминаетъ Суріу Сиддганту, изъ чего можно заключить, что сочиненіе это было извѣстно въ V в. Въ сочиненіи этомъ многое носитъ слѣды греческаго вліянія, нѣкоторые

нихъ частяхъ. На это слѣдуетъ обратить вниманіе, такъ какъ мы уже выше указали, что халдеи также употребляли шестидесятичную систему счисленія, которая была у нихъ въ большомъ ходу. Также приведены таблицы разностей синусовъ, изъ которыхъ видно, что Аріабгатта дѣлитъ квадрантъ на 24 части, по 3°45′ = 225 въ каждой. Подобное дѣленіе встрѣчается также и у позднѣйшихъ писателей. Таблица разностей синусовъ, данная Аріабгаттой, тождественна съ таблицей, находящейся въ „Сурiѣ-Сидгантѣ". Таблица эта слѣдующая:

Дуги	Синусы	Разности
0	0	
		225′
1	225′	
		224′
2	449′	
		222′
3	671′	
		219′
4	890′	
		215′
5	1105′	
. . .		. .
. .		. .
. .	. . .	. . .
		37′
22	3409′	
		22′
23	3431′	
		7′
24	3438′	

термины напоминаютъ греческія слова. Веберъ въ своей статьѣ „Zur Geschichte der indischen Astrologie" помѣщенной въ „Indische Studien. Т. II" обращаетъ вниманіе на то обстоятельство, что египетскіе цари изъ династіи Птолемеевъ въ индусскихъ надписяхъ названы Tura-Maya, на основаніи этого онъ высказываетъ предположеніе не есть ли имя Asura-Maya, измѣненное Tura-Maya, а потому не есть-ли Asura-Maya греческій астрономъ Птоломей, извѣстный авторъ „Альмагеста", жившій во II в. по Р. Х.

Вліяніе грековъ на нѣкоторыя отрасли наукъ индусовъ несомнѣнно. Варага-Мигира говоритъ, что названія различныхъ созвѣздій онъ заимствовалъ у Javaneçkarâcârya, т. е. у греческаго мужа, такъ какъ подъ именемъ yavana слѣдуетъ понимать грековъ. Въ своихъ сочиненіяхъ Варага-Мигира, а также другіе писатели, упоминаютъ городъ Romaka-Pura, т. е. Римъ, а также Javana-Pura, т. е. городъ грековъ—Александрію.

Устройство приведенной таблицы вполнѣ понятно и можетъ быть выражено слѣдующей алгебраической формулой:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n - \frac{S_n}{S_1}$$

гдѣ S_1 выражаетъ синусъ дуги 1 или 225′; формула эта въ примѣненіи ко второму синусу дастъ:

$$449 = 225 + 224 = S_1 + \left(S_1 - \frac{S_1}{S_1}\right)$$

Вопросомъ о таблицахъ синусовъ, бывшихъ въ употребленіи у индусскихъ астрономовъ, много занимался Бургесъ. Изслѣдованія его по этому предмету помѣщены въ его комментаріяхъ на „Суріу-Сидганту“ *).

*) Сочиненіе это переведено подъ заглавіемъ: Translation of the Sûrya-Syddhânta; trans. by Rév. *E. B. Burgess*, New-Haven; Connecticut. 1860. in-8. Надъ переводомъ этого сочиненія также много трудился американскій ученый *Whitney*, высказавшій мнѣніе, что содержаніе „Суріи-Сидганты“ индусскіе ученые заимствовали изъ греческихъ источниковъ, написанныхъ, во всякомъ случаѣ, ранѣе „Альмагеста“ Птолемея. Въ началѣ 1860-хъ годовъ санскритскій текстъ „Суріи-Сидганты“ былъ напечатанъ въ сборникѣ „Bibliotheca indica“, благодаря трудамъ американца *Fit. Edward Hall'я* и пандита—профессора математики въ „Government College“ въ Бенаресѣ *Bâpû-Deva Castri*.

Астрономическій трактатъ „Суріа-Сидганта“ написанъ стихами, при чемъ всѣ числа и всѣ вычисленія выражены словами. Такъ какъ числа выражаются различными символическими представленіями, то нѣкоторыя числа выражаются различными словами. Все сочиненіе состоитъ изъ однѣхъ правилъ и указаній хода вычисленій, поясненій и толкованій нѣтъ никакихъ. Въ виду такихъ особенностей чтеніе и изданіе переводовъ „Суріи-Сидганты“ было дѣло весьма трудное и требовало необходимо глубокое знакомство съ лингвистическими особенностями санскритскаго языка и основательное знаніе астрономіи. Въ настоящее время задача эта рѣшена.

Главные вопросы, рѣшенные въ правилахъ „Суріи-Сидганты“, относятся къ опредѣленію для всякаго момента времени положенія солнца, луны и пяти планетъ; предсказывать затмѣнія солнца и луны, а также предсказывать различныя явленія, т. е. астрологическіе вопросы. На сколько извѣстно въ этомъ заключалось изученіе астрономіи въ школахъ браминовъ. Такой характеръ носило изученіе этой науки еще въ XVIII в.

По мнѣнію Вебера, составителю „Суріи-Сидганты“ были извѣстны нѣкоторыя изъ сочиненій астрологическаго содержанія, написанныя нѣкоторыми учеными александрійской школы въ началѣ нашей эры. Въ числѣ такихъ сочиненій онъ полагаетъ было извѣстно индусамъ сочиненіе „О рожденіяхъ“ александрійскаго астролога *Павла* (Paulus Alexandrinus), жившаго въ 378 г. Нѣкоторыя изъ правилъ 1-й главы „Суріи-Сидганты“ несомнѣнно носятъ слѣды этого сочиненія. Каждая изъ главъ (adhikâra) „Суріи-Сидганты“ занимается извѣстнымъ классомъ вопросовъ. Изъ главъ особеннаго вниманія заслуживаютъ: I—„О среднихъ (мѣстахъ)“; II—„О видимыхъ (мѣстахъ)“, III—„О трехъ вопросахъ“, которые состоятъ 1-й, въ опредѣленіи направленія по которому видимо свѣтило, 2-й, опредѣленіе положенія этого направленія относительно четырехъ главныхъ точекъ горизонта, экватора и эклиптики; и 3-й

Въ 13-мъ правилѣ Аріабгатта излагаетъ теорію гномона. Слѣдующія правила также посвящены этому вопросу. Весьма странно, что Аріабгатта ничего не говоритъ о построеніи гномона.

По поводу теоріи гномона и опредѣленій, данныхъ Аріабгаттой, Парамадисвара въ своихъ комментаріяхъ весьма подробно описываетъ устройство прибора служащаго къ черченію круговъ, а также его употребленіе. Инструментъ этотъ онъ называетъ „ракомъ" (*karkata*); затѣмъ онъ говоритъ о построеніи треугольниковъ на полѣ при помощи трехъ „палочекъ" (*çalâkâ*), равныхъ по длинѣ тремъ сторонамъ треугольника; также указаны пріемы для нивеллированія даннаго мѣста, и употребленіе отвѣса *). Изъ словъ комментарія можно заключить, что пріемы эти относятся къ весьма отдаленному времени и были общеизвѣстны.

Въ 18-мъ правилѣ изложено предложеніе, относящееся къ вычисленію затмѣній. Затмѣваемая часть свѣтила названа „выкушеннымъ кускомъ" (*grâsa*); названіе это произошло отъ того, что по миѳологическимъ представленіямъ индусовъ затмѣнія свѣтилъ происходятъ отъ укушенія свѣтилъ дракономъ (*Râhu*).

Въ 19-мъ и 20-мъ правилахъ говорится объ ариѳметическихъ прогрессіяхъ. Правила данныя Аріабгаттой весьма интересны въ томъ отношеніи, что это суть тѣ же алгебраическія формулы, которыми пользуются въ настоящее время при нахожденіи суммы и числа членовъ ариѳметическихъ прогрессій. Пояснимъ это подробнѣе.

опредѣленіе момента этого положенія. IV-я глава посвящена луннымъ затмѣніямъ; V-я затмѣніямъ солнца. Въ VII-й главѣ говорится о вліяніи *nakshatras* на судьбу человѣка. Въ VIII-й главѣ разбирается вопросъ „О соединеніяхъ планетъ".

Нѣкоторыя изъ вычисленій, указанныхъ въ правилахъ „Сурья-Сидганты" были передѣланы *Davis*'омъ, а также издателями этого сочиненія *Hall*'емъ и *Bâpû-Deva*, которые на основаніи указанныхъ правилъ вычислили затмѣніе луны имѣвшее мѣсто 6 февраля 1860 г., и затмѣніе солнца 26 февраля 1851 г. Полученные ими результаты отступаютъ отъ истинныхъ, такъ какъ данныя, принятыя индусскими учеными, при составленіи правилъ „Сурья-Сидганты" необходимо могли измѣниться въ промежутокъ времени въ 1400 лѣтъ.

*) Пріемъ для нивеллированія, указанный въ комментаріяхъ Парамадисвары, весьма любопытенъ. Дословно онъ слѣдующій: „Сдѣлавъ на глазъ нивеллировку даннаго мѣста, на немъ чертятъ кругъ, внѣ этого круга чертятъ „междукружіе" (т. е. кольцеобразную площадь) шириною въ два или три пальца. Промежутокъ между двумя окружностями углубляютъ и получаютъ выемку; выемку эту наполняютъ водой. Если выемка вся кругомъ наполнена водой въ уровень съ землей, то поверхность земли нивеллирована правильно. Тамъ гдѣ (видно) пониженіе воды поверхность земли приподнята, тамъ гдѣ повышеніе воды поверхность земли ниже. Вотъ".

Пусть S будетъ сумма членовъ ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ n членовъ, простирающихся отъ p-го по q-й. Извѣстно, что:

$$S = q\left(a + \frac{q-1}{2}r\right) - p\left(a + \frac{p-1}{2}r\right)$$

$$= (q-p)a + \left[q\frac{q-1}{2} - p\frac{p-1}{2}\right]r$$

$$= (q-p)a + \frac{r}{2}(q^2 - p^2 - q + p)$$

$$= (q-p)\left[a + \frac{r}{2}(q+p-1)\right]$$

$$= (q-p)\left[a + \left(\frac{q-p-1}{2} + p\right)r\right]$$

$$= n\left[a + \left(\frac{n-1}{2} + p\right)r\right] \qquad (\alpha)$$

Полагая въ послѣднемъ выраженіи $p = 0$, находимъ:

$$S = n\left(a + \frac{n-1}{2}r\right)$$

или располагая по убывающимъ степенямъ n, находимъ:

$$n^2r - n(r - 2a) - 2S = 0 \qquad (m)$$

откуда, рѣшая это уравненіе второй степени, находимъ:

$$n = \frac{(r-2a) \pm \sqrt{(r-2a)^2 + 8Sr}}{2r} \qquad (n)$$

или:

$$n = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{-2a \pm \sqrt{(r-2a)^2 + 8Sr}}{r}\right] \qquad (\beta)$$

Выраженія (α) и (β) формулированы Аріабгаттой въ правилахъ 19-мъ и 20-мъ. Правило 20-е мы привели въ примѣчаніи (стр. 392). Выраженія эти Аріабгатта читаетъ справа на лѣво. Изъ выше сказаннаго слѣдуетъ, что во время Аріабгатты было извѣстно рѣшеніе уравненій 2-й степени въ общей формѣ (m):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

рѣшеніе представлялось въ видѣ (n):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Также заслуживаетъ вниманія, что было извѣстно преобразованіе уравненія (n) къ виду (β), а это показываетъ, что индусскимъ математикамъ было извѣстно производство алгебраическихъ вычисленій и преобразованій.

Въ 21-мъ правилѣ показано вычисленіе числа ядеръ въ треугольной кучѣ. Правила формулированныя Аріабгаттой суть ничто иное какъ слѣдующія алгебраическія формулы:

$$P = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

и

$$P = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{(n+1)^3-(n+1)}{6}$$

Послѣдняя формула весьма интересна въ томъ отношеніи, что изъ нея видно, что Аріабгатта умѣетъ совершенно точно найти число ядеръ въ треугольной кучи, сосчитавъ только число ядеръ ребра, между тѣмъ какъ онъ не умѣетъ найти объема тетраедра по данной высотѣ и площади (см. стр. 393) *).

Въ 22-мъ правилѣ формулировано выраженіе для нахожденія числа ядеръ въ кучѣ съ квадратнымъ основаніемъ, т. е. формула:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} \qquad (k)$$

Другая часть этого правила показываетъ, что Аріабгаттѣ извѣстна формула:

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2$$

т. е. сумма кубовъ первыхъ чиселъ равняется квадрату суммы этихъ чиселъ.

Къ 22-му правилу комментаторъ Парамадисвара дѣлаетъ замѣчаніе, въ которомъ говоритъ, что въ выраженіи (k) необходимо принять во вниманіе, что „послѣдній членъ" (*pada*) и „число членовъ" (*gaccha*) имѣютъ одно и то же числовое значеніе.

Въ 25-мъ правилѣ дано выраженіе для вычисленія сложныхъ процен-

*) Изъ приведеннаго можно думать, что мнѣніе нѣкоторыхъ ученыхъ, что теорія фигурныхъ чиселъ явилась какъ слѣдствіе умѣнія вычислять площади и объемы, не основательно.

товъ. Формула немного разнится отъ употребляемой въ настоящее время, такъ какъ индусы руководствовались иными началами при взыманіи процентовъ; это видно изъ численныхъ примѣровъ.

Въ 26-мъ правилѣ говорится о „тройномъ правилѣ" (*trairâçikam*). Здѣсь же говорится о приведеніи къ одному общему знаменателю. Дѣйствіе это выражено терминомъ: „родъ бытія одного и того же *varna*". Слово *varna* въ первоначальномъ значеніи означаетъ „цвѣтъ", но его употребляютъ также въ смыслѣ касты. Въ приведенномъ правилѣ оно примѣняется въ послѣднемъ смыслѣ и означаетъ собою слово „родъ, видъ".

Въ 28-мъ правилѣ Аріабгатта формулируетъ особый методъ, бывшій весьма распространеннымъ въ Индостанѣ. Методъ этотъ, впослѣдствіи, былъ названъ Баскарой „обратнымъ дѣйствіемъ" (*vilôma-kriyâ*). Пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ: примѣнить въ обратномъ порядкѣ къ данному—извѣстному результату, или же который требуется узнать по условію вопроса, всѣ тѣ обратныя дѣйствія, которыя данныя вопроса указываютъ произвести надъ искомымъ числомъ для полученія результата. Правило, данное Аріабгаттой, пояснено Парамадисварой на слѣдующемъ численномъ примѣрѣ: „Найти число, которое будучи умножено на 3, затѣмъ раздѣлено на 5, прибавлено къ нему 6, извлеченъ изъ него корень, вычтена 1, возвышенное въ квадратъ, дало 4?".

Результатъ есть 4, или какъ индусскіе математики говорятъ „то что должно видѣть" (*drçyam*). Послѣднее дѣйствіе, изъ котораго получился этотъ результатъ, было возвышеніе въ квадратъ, слѣдовательно нужно изъ него извлечь корень квадратный, получимъ 2; изъ этого числа была вычтена 1, слѣдовательно нужно ее прибавить, получимъ 3; изъ этого числа былъ извлеченъ корень квадратный, слѣдовательно теперь нужно возвысить въ квадратъ, получимъ 9; къ этому числу было прибавлено 6, слѣдовательно его нужно вычесть, получимъ 3; число это было раздѣлено на 5, теперь нужно умножить, получимъ 15; полученное число было умножено на 3, нужно раздѣлить теперь на 3 и тогда получимъ наконецъ искомое число 5.

Въ 29-мъ правилѣ Аріабгатта формулируетъ пріемъ для производства слѣдующихъ дѣйствій:

$$\begin{array}{c} S_4-d=a+b+c=m \\ S_4-a=b+c+d=p \\ S_4-b=a+c+d=q \\ \underline{S_4-c=a+b+d=s} \\ 3a+3b+3c+3d=m+p+q+s \end{array}$$

Парамадисвара, въ своихъ комментаріяхъ, поясняя это дѣйствіе на численномъ примѣрѣ, замѣчаетъ, что такъ какъ:

$$\frac{m+p+q+s}{3}=a+b+c+d$$

то необходимо слѣдуетъ:

$$\frac{m+p+q+s}{3}-m=d \quad , \quad \frac{m+p+q+s}{3}-p=a, \ldots .$$

Весьма вѣроятно, что послѣднія выраженія были также извѣстны Аріабгаттѣ *).

Въ 30-мъ правилѣ показано рѣшеніе уравненій 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Вопросъ формулированный въ этомъ правилѣ заключается въ слѣдующемъ: два лица (*purushau*) имѣютъ „равные капиталы" (*arthakrtam tulyam*) **); капиталы эти, каждый, состоятъ изъ извѣстнаго количества какихъ нибудь предметовъ (*gulikâ*) ***) и извѣстнаго количества денегъ (*rupakâs*) ****). Число предметовъ, сумма денегъ у каждаго изъ лицъ различны. Означая чрезъ a и b число предметовъ, m и p количество рупій, можно составить уравненіе:

$$mx+a=px+b$$

откуда:

$$x=\frac{b-a}{m-p}$$

Послѣднее выраженіе формулировано въ 30-мъ правилѣ Аріабгаттой.

Относительно знаковъ при числахъ m, p, a, и b Аріабгатта не дѣлаетъ никакого замѣчанія, изъ чего можно заключить, что онъ, подобно

---

*) Канторъ находитъ, что пріемъ, предложенный Аріабгаттой, представляетъ сходство съ методомъ *Тимарида*, названнымъ Ямвлихомъ *эпантемой*, о которомъ мы уже говорили въ отдѣлѣ „Греки", на стр 135.

Въ переводѣ на нашъ нынѣшній алгебраическій языкъ эпантема выразится формулой:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots+x_n=A$$

$$x_1+x_2=b \qquad x_1+x_3=b' \qquad x_1+x_4=b'' \qquad x_1+x_n=b^{(n)}$$

откуда всегда будемъ имѣть:

$$x=\frac{b+b'+b''+\ldots+b^{(n)}-A}{n-2}$$

Напомнимъ здѣсь, что *эпантема*, по мнѣнію Нессельмана, есть самый древній примѣръ алгебраическихъ разсужденій древнихъ грековъ (см. *Nesselmann*, Die Algebra der Griechen, T. I. p. 233).

**) Терминъ *tulya* Аріабгатта употребляетъ въ смыслѣ *равенства* обѣихъ частей уравненія. Слово это происходитъ отъ слова *tula—вѣсы*. Терминомъ этимъ индусскіе математики, по мнѣнію Роде, хотѣли выразить условіе, что обѣ части уравненія должны быть *однородны*.

***) Слово *gulikâ* въ дословномъ переводѣ значитъ „маленькій шарикъ". Роде употребляетъ его въ смыслѣ „предмета". Употребленіе этого слово Аріабгаттой указываетъ, что въ его время не былъ еще извѣстенъ терминъ *yavat-tavat* для обозначенія неизвѣстной величины.

****) Слово *rupakâs* собственно означаетъ монеты съ изображеніями.

своимъ послѣдователямъ, при составленіи правилъ не обращалъ вниманія на знаки. Значеніе знаковъ при числахъ было вѣроятно извѣстно, такъ какъ въ логистикѣ*) индусовъ особенное значеніе имѣли „шесть дѣйствій“ (*shad-vidham*), которыя они прилагали также къ отрицательнымъ количествамъ (*rnam*).

Формула, данная Аріабгаттой, для рѣшенія уравненія первой степени, съ однимъ неизвѣстнымъ, замѣчательна какъ по своей точности, такъ еще тѣмъ, что она есть самый общій видъ рѣшенія подобныхъ уравненій.

Въ 31-мъ правилѣ дано самое общее рѣшеніе извѣстной задачи „о курьерахъ“. На сколько можно понимать Аріабгатта занимается этимъ вопросомъ въ примѣненіи къ двумъ планетамъ. Подобное предположеніе весьма вѣроятно, такъ какъ сочиненіе Аріабгатты есть собственно астрономическій трактатъ**). Термины „обратное движеніе“ (*viloma*) и „движеніе въ томъ же направленіи“ (*anuloma*), употребленные въ упомянутомъ правилѣ, прилагались индусскими астрономами для выраженія движенія свѣтилъ, проложенныхъ на сферу небесную. Правило, формулированное Аріабгаттой, даетъ право предполагать, что ему была извѣстна формула:

$$\frac{x}{v}=\frac{d}{v\pm v'}$$

при чемъ онъ имѣлъ вполнѣ ясное понятіе о двойномъ знакѣ знаменателя***), или окончательнаго результата, въ зависимости отъ относительныхъ скоростей движенія, такъ какъ онъ говоритъ: „моментъ встрѣчи въ прошедшемъ или будущемъ“ (*atîta—êshya*).

Въ послѣднихъ двухъ правилахъ 32-мъ и 33-мъ формулировано рѣшеніе вопроса, который въ настоящее время носитъ въ элементарной Алгебрѣ названіе „неопредѣленнаго анализа первой степени“, и который со-

---

*) Подъ именемъ *логистики* греческіе математики понимали практическую Ариѳметику (см. стр. 126—127).

**) Аріабгаттѣ было извѣстно суточное вращеніе земли, которымъ онъ объяснялъ видимое движеніе звѣздъ на сферѣ небесной. Явленіе это по его словамъ представляетъ сходство „съ человѣкомъ ѣдущимъ въ лодкѣ, которому кажется, что предметы на берегу находящіеся удаляются отъ него въ противномъ направленіи“. Школа въ Ujjayinî не раздѣляла мнѣнія о суточномъ обращеніи земли.

***) Разстояніе x, которое проѣзжаютъ курьеры до мѣста встрѣчи, дается формулой $x=\frac{vd}{v\pm v'}$, въ которой d выражаетъ разстояніе между курьерами, а v и v' скорости съ которыми они ѣдутъ. Знакъ + въ знаменателѣ относиться къ случаю когда курьеры ѣдутъ на встрѣчу одинъ другому, знакъ — къ случаю когда они ѣдутъ по одному и тому же направленію, при чемъ одинъ нагоняетъ другаго. Въ послѣднемъ случаѣ, если v' скорость, съ

стоитъ въ томъ, чтобы найти цѣлыя значенія для x и y, удовлетворяющія неопредѣленному уравненію:

$$ax+by=c$$

Рѣшеніе вопросовъ, относящихся къ неопредѣленному анализу было любимымъ занятіемъ индусскихъ математиковъ. Брамагупта и Баскара посвятили ему отдѣльныя главы въ своихъ сочиненіяхъ. Пріемъ примѣненный Брамагуптой былъ названъ имъ *кулука* или *куттака* (*kuttaka*—разсѣкать, размельчать). Аріабгатта, какъ видно, былъ весьма основательно знакомъ съ рѣшеніемъ подобнаго рода вопросовъ, при чемъ даетъ рѣшеніе для гораздо болѣе общаго случая. Брамагупта и Баскара ограничиваются простымъ случаемъ уравненія:

$$ax+by=c$$

Аріабгатта же указываетъ методъ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ двухъ совмѣстныхъ уравненій вида:

$$ax+by=c \qquad \text{и} \qquad ex+fz=g$$

Парамадисвара, въ своихъ комментаріяхъ, поясняетъ это на численномъ примѣрѣ:

$$8x+29y=4 \qquad \text{и} \qquad 17x+45z=7$$

при чемъ требуется, чтобы для одного и того же цѣлаго значенія x, значенія:

$$y=\frac{ax-c}{b} \qquad \text{и} \qquad z=\frac{ex-g}{f}$$

выражались въ цѣлыхъ числахъ.

Роде въ своихъ комментаріяхъ на вторую часть „Аріабгаттіама" подробно излагаетъ пріемъ, употребленный Аріабгаттой для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени. Изъ численнаго примѣра даннаго Парамадисварой видно, что методъ *разсѣканія* заключался въ нахожденіи для x двухъ значеній α и β, изъ коихъ каждое отдѣльно удовлетворяло-бы даннымъ уравненіямъ; значенія эти Аріабгатта называетъ „временными значеніями" (*agra*). Всякое значеніе x, которое дѣлаетъ y цѣлымъ будетъ формы $\alpha+bt$, всякое же значеніе, которое дѣлаетъ z цѣлымъ будетъ формы $\beta+fu$; одно только значеніе будетъ удовлетворять обѣимъ уравненіямъ заразъ и будетъ дано соотношеніемъ:

$$a+bt=\beta+fu$$

котороѣ ѣдетъ курьеръ болѣе удаленный отъ наблюдателя и при томъ $v' > v$, то значеніе x получится отрицательное и знакъ — показываетъ, что x должно быть отсчитано въ противномъ направленіи, т. е. что встрѣча имѣла уже мѣсто.

или, при $\alpha > \beta$:

$$u = \frac{bt + (\alpha - \beta)}{f}$$

которое должно удовлетвориться цѣлыми значеніями u и t.

На этой формулѣ Аріабгатта излагаетъ свой методъ; онъ даетъ также способъ найти „временныя значенія“ α и β. Аріабгатта говоритъ: „нужно дѣлить знаменатель b, соотвѣтствующій большему изъ временныхъ значеній α, на знаменатель f, соотвѣтствующій меньшему изъ временныхъ значеній β, затѣмъ нужно дѣлить остатки одинъ на другой“. Парамадисвара объясняетъ это на приведенномъ уже численномъ примѣрѣ, въ которомъ $\alpha = 15$, $\beta = 11$, $b = 29$ и $f = 45$; при этомъ $u = \frac{29t + 4}{45}$. Не входя въ дальнѣйшія подробности метода *разсѣеванія*, замѣтимъ только, что въ основаніи его лежитъ теорія непрерывныхъ дробей *).

Изъ этого бѣглаго очерка второй части сочиненія Аріабгатты видно, сколько оно заключаетъ интереснаго и важнаго. Сочиненіе это, безъ сомнѣнія, оказало не малую пользу дальнѣйшему развитію математическихъ наукъ у индусовъ. Объяснить и комментировать сочиненіе Аріабгатты было дѣломъ весьма труднымъ, такъ какъ правила, данныя авторомъ, облечены въ форму самыхъ лаконическихъ и малопонятныхъ стиховъ. Текстъ второй части состоитъ всего изъ 33 строфъ!

Весьма желательно, чтобы былъ переведенъ весь текстъ „Аріабгаттіама“, а также комментаріи на него, сдѣланные Парамадисварой. Роде обѣщаетъ дать переводъ текста, изданнаго Керномъ **).

Брамагупта. Брамагупта родился въ 598 г. по Р. Х. и написалъ около 628 г. сочиненіе астрономическаго содержанія, заглавіе котораго „*Брама-Спута-Сиддганта*“, т. е. „*Улучшенная система Брамы (Brâhma-sphuta-siddhânta)*. Сочиненіе это состоитъ изъ двадцати книгъ, изъ которыхъ XII-я посвящена Ариѳметикѣ (*Ganitad'hyaya*), а XVIII-я Алгебрѣ (*Cuttacad'hyaya*). Изложимъ вкратцѣ содержаніе поименованныхъ частей. Начнемъ съ Ариѳметики.

*) На это указываетъ также Роде въ своей статьѣ. *L. Rodet*, Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Âryabhata. Journal Asiatique. VII série. T. XVI. № 3. 1880.

**) Въ недавнее время профессоръ Лейденскаго университета *Кернъ* издалъ текстъ сочиненія Аріабгатты, подъ заглавіемъ. The Aryabhatiya, with commentary Bhatadipika of Paramâdiçvara, edited by Dr. *H. Kern*. Leiden. 1874. in-4. Вторая глава этого сочиненія была переведена на французскій языкъ и комментирована *Роде* и напечатана подъ заглавіемъ Leçons de Calcul d'Âryabhata, par *Leon Rodet*. Переводъ этотъ помѣщенъ въ Journal Asiatique, Mai-Juin, 1879, Paris, in-8.

Ариѳметика состоитъ изъ десяти главъ. По мнѣнію Брамагупты вычислителемъ называется всякій основательно знакомый со всѣми 20-ю дѣйствіями и 8-ю опредѣленіями. Подъ именемъ *дѣйствій* онъ понимаетъ: 1) сложеніе, 2) вычитаніе, 3) умноженіе, 4) дѣленіе, 5) возвышеніе въ квадратъ, 6) извлеченіе квадратнаго корня, 7) возвышеніе въ кубъ, 8) извлеченіе кубическаго корня, 9)—14) шесть дѣйствій надъ дробными числами 15)—19) правила трехъ, пяти, семи, девяти и одиннадцати членовъ, т. е. простое тройное правило и сложное тройное правило; и 20) правило мѣны. Къ числу *опредѣленій* Брамагупта относитъ: 1) опредѣленіе смѣсей, вычисленіе процентовъ и опредѣленіе пробы, 2) прогрессіи, 3) плоскую Геометрію, 4)—7) вычисленіе объемовъ при различныхъ практическихъ приложеніяхъ и 8) измѣреніе при посредствѣ тѣни.

Въ І-й главѣ Ариѳметики изложены всѣ 20 дѣйствій, которыя сведены къ 12 общимъ правиламъ, выраженнымъ въ самой сжатой формѣ. Болѣе обстоятельно онѣ разобраны уже впослѣдствіи комментаторомъ Шатурведой, который пояснилъ ихъ примѣрами.

Глава II есть дополненіе первой; въ ней изложена шестидесятичная система счисленія; въ концѣ главы Брамагупта замѣчаетъ, что этимъ вопросомъ онъ займется впослѣдствіи подробнѣе при вычисленіи синусовъ. Въ своихъ комментаріяхъ Шатурведа говоритъ, что онъ поясняетъ только немногія части, такъ какъ въ противномъ случаѣ не хватило-бы нѣсколько сотъ томовъ для каждой главы.

Глава III содержитъ вычисленіе ариѳметическихъ строкъ. Далѣе показано нахожденіе суммы треугольныхъ чиселъ, а также квадратныхъ и кубическихъ.

Глава IV посвящена плоской Геометріи, которая составляетъ отдѣлъ Ариѳметики.

Геометрія у индусскихъ математиковъ носитъ совершенно иной характеръ, чѣмъ у греческихъ геометровъ. Строго-научной геометрической системы не существовало, объ аксіомахъ и доказательствѣ теоремъ нѣтъ и помину, такъ какъ индусскіе математики стремились только отыскать численныя соотношенія между различными частями данной фигуры, нисколько не заботясь и не обращая вниманія на ея свойства. Основное начало, которымъ индусскіе математики руководствовались при выводѣ геометрическихъ истинъ и предложеній, это принципъ *наглядности*; о справедливости предложеній они заключали прямо изъ чертежа, оно являлось у нихъ какъ логическое слѣдствіе построенія. Вмѣсто всякихъ разсужденій и доказательствъ индусскіе математики ограничивались тѣмъ, что чертили чертежъ, соотвѣтствующій извѣстному предложенію, дѣлали соотвѣтствующее построеніе и рядомъ

писали слово „смотри",—это считалось вполнѣ достаточнымъ. При выводѣ нѣкоторыхъ предложеній примѣняются методы *конгруэнціи* (тождества), *симметріи* и *подобія*. Впослѣдствіи, когда мы будемъ говорить о трудахъ Васкары, мы приведемъ нѣсколько геометрическихъ примѣровъ, заимствованные изъ сочиненій послѣдняго ученаго. На особенности геометрическаго метода индусовъ мы уже указали въ началѣ настоящаго сочиненія (см. стр. 10—19). Изъ геометрическихъ фигуръ Брамагупта разсматриваетъ только треугольникъ, четыреугольникъ и кругъ. Предложенія разсмотрѣнныя имъ относятся только къ нахожденію площадей и вычисленію нѣкоторыхъ частей этихъ фигуръ. Теоремъ же относящихся къ какимъ либо свойствамъ этихъ фигуръ нѣтъ. Особенное вниманіе Брамагупта обратилъ на вычисленіе различныхъ частей четыреугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ; о другихъ четыреугольникахъ онъ не упоминаетъ. Въ виду этого и на основаніи различныхъ соображеній извѣстный Шаль*) высказалъ предположеніе, что вся геометрическая часть сочиненія Брамагупты имѣетъ своимъ назначеніемъ рѣшеніе слѣдующихъ четырехъ вопросовъ, относящихся къ треугольнику и четыреугольнику:

a) Найти въ функціи сторонъ треугольника, его площадь и радіусъ круга, описаннаго около него**).

---

*) Геометріей индусовъ занимался извѣстный Шаль, который одинъ изъ первыхъ обратилъ особенное вниманіе на труды Кольбрука, Страхея и Тайлора. Одну изъ главъ своего сочиненія „Aperçu historique" онъ посвятилъ этому вопросу.

Во всѣхъ извѣстныхъ намъ исторіяхъ математическихъ наукъ говорится весьма мало о развитіи и состояніи математическихъ познаній индусовъ. Арнетъ былъ первый обратившій вниманіе на этотъ вопросъ и посвятившій ему одну изъ главъ своего сочиненія: „*Arneth*, Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes. Stuttgart, 1852, in-8°". Къ сожалѣнію на это сочиненіе было обращено мало вниманія и оно почти неизвѣстно. Въ послѣднее время математикой индусовъ занимался Ганкель въ одной изъ главъ своего сочиненія: „*Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig, 1874, in-8°". Многое Ганкель заимствовалъ изъ сочиненія Арнета. Наконецъ, въ вышедшемъ недавно первомъ томѣ сочиненія Кантора „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", также весьма обстоятельно изложено все извѣстное до настоящаго времени объ познаніяхъ индусовъ въ математическихъ наукахъ.

**) Выраженіе для площади треугольника было также извѣстно арабскимъ геометрамъ, отъ которыхъ оно вѣроятно перешло на Западъ. Выраженіе это встрѣчается въ сочиненіяхъ Савосарды, Фибоначчи, Іордана Неморариуса, Лукаса де-Борго, Тартальи, Кардана, Рамуса и мн. др. Весьма интересно, что справедливость этого предложенія индусскіе геометры обнаружили для треугольника, коего стороны 13, 14 и 15. Эти числа встрѣчаются также въ сочиненіи Герона Старшаго, а также у арабскихъ геометровъ. Ганкель высказалъ мнѣніе,

b) Построить треугольникъ, въ которомъ эта площадь и этотъ радіусъ были-бы выражены въ раціональныхъ числахъ. При этомъ предполагается, что и стороны выражены также въ раціональныхъ числахъ.

c) Найти площадь четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, въ функціи его сторонъ, а также его діагонали, перпендикуляры, опущенные изъ его вершинъ, отрѣзки, которые они дѣлаютъ между собою пересѣкаясь и діаметръ круга.

d) Построить четыреугольникъ, вписанный въ кругъ, коего-бы площадь, діагонали, перпендикуляры и другія различныя прямыя линіи, равно какъ и діаметръ круга, были-бы выражены въ раціональныхъ числахъ.

Таково содержаніе геометрической части сочиненія Брамагупты, которое, какъ мы уже упоминали выше, многіе долгое время принимали за Элементы Геометріи, въ родѣ „Началъ" Евклида *). Особенное вниманіе было обращено математиками на выраженіе площади четыреугольника въ функціи его сторонъ, находящееся въ сочиненіи Брамагупты**). Вопросъ этотъ, какъ извѣстно, занималъ многихъ математиковъ XVI, XVII и XVIII столѣтія***). Для отноше-

что индусами сначала было найдено выраженіе для высоты треугольника въ функціи сторонъ, т. е. формула:

$$h = \frac{\sqrt{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2c}$$

а затѣмъ уже рядомъ алгебраическихъ преобразованій они нашли выраженіе площади въ функціи сторонъ, т. е. формулу

$$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

гдѣ

$$2p = a + b + c.$$

*) Были-ли извѣстны индусскимъ ученымъ „Начала" Евклида неизвѣстно, такъ какъ по этому вопросу нѣтъ никакихъ указаній. Съ большой вѣроятностью можно предполагать, что они съ этимъ сочиненіемъ не были знакомы, такъ какъ нѣтъ ничего въ сочиненіяхъ Аріабгатты, Брамагупты и Баскары напоминающаго пріемы Евклида. „Начала" Евклида стали извѣстны индусамъ въ началѣ XVIII в., благодаря переводу, сдѣланному по повелѣнію раджи Яи Синги. Арабскіе переводы „Началъ" существовали въ Индостанѣ, но когда они были привезены туда неизвѣстно. При взятіи англичанами Серингапатнама въ 1799 г. въ библіотекѣ Типо-Саиба были найдены арабскіе переводы „Началъ" Евклида и нѣкоторыхъ сочиненій Аристотеля.

**) *Вейсенборнъ* занимался сравненіемъ различныхъ предложеній, относящихся къ трапеціи, встрѣчающихся въ сочиненіяхъ Евклида, Герона Старшаго и Брамагупты. См. *Weissenborn*, Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmegupta. Статья эта помѣщена въ „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, II—Heft, Leipzig. 1879".

***) Выраженіе для площади вписаннаго въ кругъ четыреугольника въ функціи сторонъ четыреугольника занимало умы многихъ ученыхъ, изъ числа ихъ упомянемъ: Бенедиктиса, Скалигера, Прегоріуса, Віета. Скалигеръ далъ невѣрное рѣшеніе. Вопросъ этотъ также предлагалъ для рѣшенія Регіомонтанусъ, при этомъ требовалось опредѣлить еще діаметръ

нія окружности къ діаметру Брамагупта дает выраженіе $\pi = \sqrt{10}$. Всего въ этой главѣ разсмотрѣно 23 вопроса. Въ заключеніе необходимо замѣтить, что самъ Брамагупта нигдѣ не говоритъ, что имъ взяты четыреугольники вписанные въ кругъ.

Въ главахъ V—X Брамагупта занимается вычисленіемъ объемовъ и вмѣстимости нѣкоторыхъ тѣлъ. Главы эти не представляютъ ничего особеннаго.

Перейдемъ къ Алгебрѣ. Алгебра Брамагупты состоитъ изъ 8 главъ.

Въ I-й главѣ показано рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія первой степени, вида:

$$ax + by = c$$

въ цѣлыхъ числахъ. На рѣшеніе подобныхъ уравненій индусскіе математики обратили особенное вниманіе. Пріемъ, предложенный Брамагуптой для рѣшенія подобныхъ уравненій былъ уже извѣстенъ Аріабгаттѣ, но есть основаніе предполагать, что онъ былъ найденъ гораздо раньше. Мы уже выше замѣтили, что методъ данный Аріабгаттой для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій первой степени, былъ извѣстенъ между браминами подъ именемъ „способа разсѣеванія“ и былъ основанъ на разложеніи дроби $\frac{a}{b}$ въ непрерывную дробь. Пріемъ этотъ впослѣдствіи былъ снова предложенъ Эйлеромъ.

Во II-й главѣ подробно изложены дѣйствія надъ различными величинами, дѣйствія надъ корнями и ирраціональными числами, а также правила дѣйствій надъ неизвѣстными величинами.

Въ III-й главѣ изложено рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

круга, въ который вписанъ четыреугольникъ. Самыя полныя рѣшенія вопроса о построеніи четыреугольника вписаннаго въ кругъ по четыремъ даннымъ сторонамъ даны Брамагуптой и Преторіусомъ, которые одни ввели условіе, что стороны выражены въ раціональныхъ числахъ. Въ настоящее время выраженіе это входитъ въ предѣлы элементарныхъ учебниковъ Геометріи, гдѣ оно встрѣчается въ формѣ.

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+d-c)(a+b+c-d)(a+c+d-b)(c+b+d-a)}.$$

Выраженіе для площади треугольника въ функціи сторонъ есть частный случай только что написаннаго, для этого стоитъ только одну изъ сторонъ четыреугольника принять равной нулю. Такое положеніе было введено еще *Шатурведой*, однимъ изъ комментаторовъ Брамагупты, который говоритъ: „что для случая треугольника нужно взять есть послѣдовательные три стороны изъ четырехъ написанныхъ полусуммъ, и что четвертая остается безъ измѣненія“. Нѣкоторыя изъ примѣчаній Шатурведы указываютъ, что имъ не всегда было понято сказанное Брамагуптой.

Въ IV-й главѣ—рѣшеніе уравненій второй степени.

Въ V-й главѣ изложено рѣшеніе уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными. Большая часть изъ этихъ уравненій принадлежатъ къ числу неопредѣленныхъ и при ихъ рѣшеніи примѣняются правила, изложенныя въ первой главѣ. Многіе изъ примѣровъ этой главы заимствованы изъ астрономіи.

Въ VI-й главѣ показано рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій вида

$$xy + ax + by = c$$

Въ VII-й главѣ показано, какъ рѣшаются уравненія вида:

$$ax^2 + b = y^2$$

главнымъ образомъ въ цѣлыхъ числахъ.

Въ VIII-й главѣ изложены правила и задачи, имѣющія приложеніе въ астрономическихъ вычисленіяхъ.

Въ концѣ своего сочиненія Брамагупта говоритъ: „Предложенія, изложенныя въ настоящемъ сочиненіи, даны только ради удовольствія. Мудрецъ можетъ найти тысячи подобныхъ примѣровъ, или же на основаніи указанныхъ правилъ рѣшать примѣры, предложенные другими. Подобно тому, какъ солнце своимъ блескомъ затмѣваетъ звѣзды, точно также и свѣдущій можетъ затмить другихъ астрономовъ въ собраніи народа, если онъ станетъ предлагать алгебраическія задачи для рѣшеній, а тѣмъ болѣе если самъ будетъ ихъ рѣшать".

Изъ этого бѣглаго обзора содержанія сочиненія Брамагупты видно, что его нельзя назвать руководствомъ, но тѣмъ не менѣе нѣкоторые вопросы изложены въ немъ вполнѣ систематически и составляютъ какъ-бы вполнѣ опредѣленный кругъ изслѣдованій. Большая часть вопросовъ, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи, относятся къ астрономіи, но многіе также неимѣютъ къ ней непосредственнаго отношенія. Не смотря на многіе недостатки этого сочиненія оно заслуживаетъ вниманія. Въ особенности много занимался Брамагупта неопредѣленными уравненіями.

Въ сочиненіи Брамагупты особеннаго вниманія заслуживаютъ его понятія объ отрицательныхъ величинахъ и о ихъ значеніи. Онъ выражается въ слѣдующихъ словахъ: „сумма двухъ *имуществъ* есть *имущество;* сумма двухъ *долговъ—долгъ,* сумма *имущества* и *долга* равна ихъ разности, если-же они равны, то она есть нуль. Сумма нуля и *долга* есть долгъ; *имущества* и нуля—*имущество;* сумма двухъ нулей есть нуль".

Далѣе, указывая правила, которымъ слѣдуетъ придерживаться при вычитаніи, Брамагупта продолжаетъ: „меньшее вычитается изъ большаго, *имущество* изъ *имущества*, *долгъ* изъ *долга;* но если вычитываютъ большее

изъ меньшаго, то избытокъ мѣняется (т. е. знакъ). *Долгъ* вычтенный изъ нуля дѣлается *имуществомъ*, а *имущество—долгомъ*. *Долгъ* безъ нуля остается *долгомъ*, а *имущество—имуществомъ*. Если требуется вычесть изъ *долга имущество* или изъ *имущества долгъ*, то необходимо взять ихъ сумму".

Также весьма интересно опредѣленіе, которое даетъ Брамагупта величинѣ дѣленной на нуль. Онъ говоритъ: „*имущество* или *долгъ*, раздѣленный на нуль есть *khacchêdam*, т. е. величина, имѣющая знаменателемъ нуль".

Изъ вышеприведеннаго видно, что Брамагупта представлялъ себѣ отрицательныя величины, какъ величины положительныя, только отсчитываемыя въ другую сторону отъ нуля. Это достойно вниманія, такъ какъ подобный взглядъ на отрицательныя величины былъ установленъ европейскими математиками много времени спустя Брамагупты.

Баскара. Познакомившись съ сочиненіями Брамагупты перейдемъ къ разсмотрѣнію сочиненій другаго индусскаго математика Баскары *), жившаго отъ 1141 г. по 1225 г., который написалъ астрономическій трактатъ подъ заглавіемъ „*Сиддантаціромани*" (*Siddhântaçiromani* т. е. вѣнецъ одной изъ астрономическихъ системъ) **). Къ этому сочиненію Баскара написалъ введеніе, состоящее изъ двухъ частей: первая заключаетъ Ариѳметику, заглавіе ея *Лилавати* (*Lilâvati*—красивая); вторая содержитъ Алгебру -*Виаганита* (*Bija-Ganita*—вычисленіе корней).

Сочиненія Баскары содержатъ почти тоже, что и сочиненія Брамагу-

---

*) Баскару часто называютъ *Баскара-Ахарiа*, но второе названіе не есть имя, а ученая степень, такъ какъ у индусовъ названіе *Âcârya* соотвѣтствовало ученой степени доктора философіи.

Баскара былъ родомъ и жилъ въ городѣ Биддурѣ въ Декалѣ.

**) Одна изъ главъ астрономическаго трактата Баскары занимается вопросомъ о шаровидности земли (*Gola Adya*), другая посвящена астрономическимъ вычисленіямъ (*Gannita Adya*).

Въ началѣ своего сочиненія Баскара дѣлаетъ слѣдующее интересное разсужденіе относительно неподвижности земли въ пространствѣ: „земной шаръ, состоящій изъ земли, воздуха, пространства и огня неподвиженъ въ пространствѣ, онъ окруженъ планетами и неподвиженъ, благодаря собственной силѣ. Подставокъ никакихъ нѣтъ. Если-бы земля нуждалась въ подпорѣ, то эта подпора необходимо также нуждалась въ другой подпорѣ и т. д. И въ концѣ концовъ все таки нужно вообразить себѣ нѣчто такое, которое держалось бы безъ подпоры. Почему же это нѣчто не можетъ быть земной шаръ, который есть одна изъ видимыхъ формъ божества?" Далѣе Баскара продолжаетъ „земля обладаетъ притягивательной силой, которая притягиваетъ всѣ тѣла находящіяся въ воздухѣ и имѣющія вѣсъ. Вслѣдствіи этого тѣла эти какъ-бы падаютъ. Куда могла-бы упасть земля, которая окружена пространствомъ?".

ты, но они для насъ представляютъ особенный интересъ, такъ какъ въ нихъ пояснено многое сказанное послѣднимъ. Баскара обратилъ особенное вниманіе на точность выраженій и представленій, иногда видны даже попытки и стремленіе приводить нѣчто въ родѣ доказательствъ. Кромѣ того сочиненія Баскара доступнѣе, такъ какъ многое въ нихъ написано прозой, между тѣмъ какъ сочиненія Брамагупты всѣ написаны самыми вычурными стихами. Въ концѣ своего сочиненія Баскара указываетъ на цѣль своего труда и на его отношеніе къ попыткамъ подобнаго рода, сдѣланными до него; къ сожалѣнію способъ выражаться Баскары, для насъ до того непонятенъ, что нельзя себѣ составить никакого представленія въ чемъ именно состояли работы его предшественниковъ. Баскара выражается въ слѣдующихъ словахъ.

„Такъ какъ сочиненія по Алгебрѣ, написанныя Брамагуптой, Кридха-рой и Падманабгой слишкомъ обширны, то я предпринялъ извлечь изъ нихъ все самое главное и составить хорошее руководство для всѣхъ, желающихъ изучить эту науку. Настоящая книга заключаетъ тысячу строкъ, въ которыхъ изложены правила и примѣры. Послѣдніе предназначены для поясненія правилъ, или же указываютъ на ихъ цѣль и приложенія, а также служатъ къ облегченію разбора отдѣльныхъ случаевъ и наконецъ иногда они поясняютъ основныя положенія. Число отдѣльныхъ случаевъ безконечно велико, а потому можно было привести только немногіе. Съ одной стороны обширное море науки для людей съ слабымъ разсудкомъ трудно переплываемо, съ другой—исполненные талантовъ не нуждаются въ дальнѣйшемъ ученіи. Искра науки, достигнувъ понятливаго ума, разгорается благодаря своей собственной силѣ. Подобно каплѣ масла, распространяющейся по водѣ, подобно тайнѣ, повѣренной злому, подобно милостинямъ, подаппымъ достойному, какъ-бы она ни была мала, точно также распространяется наука въ развитомъ умѣ, благодаря своей собственной силѣ“.

„Для людей съ свѣтлымъ умомъ легко понять, что Ариѳметика состоитъ изъ правила трехъ членовъ, Алгебра-же есть остроуміе, какъ я уже выше замѣтилъ въ главѣ о ... Правило трехъ членовъ составляютъ Ариѳметику, Алгебра же есть чистый разсудокъ. Что можетъ существовать неизвѣстнаго для понимающаго? а потому для однихъ только неразвитыхъ написано настоящее сочиненіе“.

„Для умноженія своего знанія, для укрѣпленія увѣренности въ свою душевную силу, ты долженъ читать сочиненія различныхъ математиковъ, а потомъ снова читать эти основныя начала математики, прекрасныя по языку, легко понимаемыя большинствомъ, обнимающія всю суть счисленія; они заключаютъ объясненіе основныхъ предложеній, исполнены высоты и лишены ошибокъ“.

Изъ приведенныхъ словъ Баскара видно, что до него существовало много математическихъ сочиненій. Онъ прямо указываетъ, что содержаніе своего труда онъ заимствовалъ изъ обширныхъ сочиненій по тому же предмету. Баскара былъ только собирателемъ, онъ помѣстилъ въ своемъ сочиненіи все то, что казалось ему необходимымъ, остальное онъ выбросилъ, какъ напримѣръ многіе изъ примѣровъ, приведенныхъ въ „Брама-Спутѣ-Сидгантѣ".

„Сидгантацiромани" было, въ свою очередь, комментировано многими учеными, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстенъ *Ганеш (Ganesa)*, жившій около 1545 г. Но большая часть комментаторовъ новаго ничего не прибавила, правила и основныя положенія оставались безъ измѣненія *).

Мы сначала познакомимся съ содержаніемъ Ариѳметики, а затѣмъ уже Алгебры Баскары.

Лилавати состоитъ изъ тринадцати главъ **).

Въ I-й главѣ помѣщено введеніе, въ которомъ приведены таблицы мѣръ протяженій, вѣса и денегъ ***).

Во II-й главѣ изложены восемь ариѳметическихъ дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ квадратъ, извлеченіе квадратнаго корня, возвышеніе въ кубъ и извлеченіе кубическаго корня. Послѣ этого слѣдуютъ дѣйствія надъ дробями и наконецъ показаны дѣйствія при посредствѣ нуля. Въ одномъ изъ отдѣловъ этой главы Баскара указываетъ правила для приведенія дробей къ одному знаменателю. Производство дѣйствій мало чѣмъ разнится отъ употребляемыхъ въ настоящее время. Произведеніе изъ двухъ равныхъ множителей Баскара, подобно другимъ индусскимъ математикамъ, называетъ *varga* — квадратъ, произведеніе трехъ равныхъ множителей *ghana* — кубъ. Понятія о квадратѣ и кубѣ у индусскихъ математиковъ не сопровождаются, какъ у древнихъ греческихъ геометровъ, представленіями о площади и объемѣ, подобныя выраженія являлись у индусовъ прямо какъ произведенія. Имъ были извѣстны выраженія:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

---

*) Въ настоящее время сочиненія Брамагупты и Баскары мало кому извѣстны изъ туземныхъ жителей Индостана. Въ Пунѣ (Poona), главномъ центрѣ браминской учености, едва-можно найти нѣсколько лицъ, которымъ извѣстны „Лилавати", „Биганита" и др. сочиненія. Въ школахъ ограничиваются заучиваніемъ [illegible], изложенныхъ въ „Сурiѣ-Сидгантѣ".

**) „Лилавати" была переведена въ 1587 г. на персидскій языкъ, по повѣленію шаха Акбера математикомъ *Физи* (Fyzi). „Біганита" была также переведена на персидскій языкъ въ 1634 г. математикомъ *Рушидомъ* (Ata Allah Ruschid ben Ahmed Nadir).

***) Сочиненіе свое Баскара начинаетъ съ того, что обращается къ божеству, голова котораго похожа на слоновую, и ноги котораго обожаемы богами.

которыя они примѣняли также при извлеченіи корней. Существовало также понятіе и о высшихъ степеняхъ. Четвертая степень называлась *varga-varga*, шестая — *ghana-varga* или *varga-ghana*, восьмая — *varga-varga-varga*, девятая — *ghana-ghana* и т. д. Пятая степень выражалась *varga-ghana-ghata*, седьмая — *varga-varga-ghana-ghata* и т. д. Безъ слова *ghata* показатели умножаются, при этомъ же словѣ они складываются. Говоря объ „Ариѳметикахъ" Діофанта мы указали, что онъ степень всегда выражалъ только чрезъ сложеніе, индусы же употребляли сложеніе и умноженіе, смотря потому была-ли степень нечетная или четная. Пояснить это всего лучше на примѣрахъ.

Баскара писалъ:

$$a^4=(a^2)^2\ ,\ a^5=a^2.a^3\ ,\ a^6=(a^2)^3\ ,\ a^7=a^2.a^2.a^3,$$

Діофантъ же:

$$a^4=a^2.a^2\ ,\ a^5=a^2.a^3\ ,\ a^6=a^3.a^3\ ,\ a^7=a^2.a^2.a^3,\ldots$$

Сложеніе индусы обозначали тѣмъ, что слагаемыя ставили рядомъ. При вычитаніи уменьшаемое ставится рядомъ съ вычитаемымъ, но надъ вторымъ ставится всегда точка. Умноженіе обозначали тѣмъ, что послѣ множителей ставили слово *bhavita*, т. е. *предшествующее*. Для обозначенія дѣленія ставили дѣлитель подъ дѣлимымъ, но черты не употребляли. Для обозначенія извлеченія квадратнаго корня изъ ирраціональнаго числа, передъ соотвѣтствующимъ числомъ ставили слогъ *ka*, начальный слова *karaní*, т. е. ирраціональное. Такъ напримѣръ дѣйствіе $\sqrt{272}-\sqrt{26}$ индусскіе математики писали *ka* 272 *ka* $\dot{2}6$.

Изъ сказаннаго видно, что почти всѣ дѣйствія индусскіе математики выражали символически словами, а не знаками. Символы свои они прилагали только къ одночленнымъ выраженіямъ, такъ какъ представленія, соотвѣтствующаго нашимъ скобкамъ еще въ то время несуществовало у индусовъ. При умноженіи на нуль произведеніе неуничтожается, если только снова слѣдуютъ дѣйствія съ нулемъ, такъ какъ индусскіе математики говорили, что такое произведеніе снова возстановляется. Дробь съ знаменателемъ равнымъ нулю Баскара считаетъ неопредѣленнымъ выраженіемъ, но одинъ изъ комментаторовъ замѣчаетъ, что истинное значеніе подобной дроби есть безконечность *).

Глава III состоитъ изъ шести отдѣловъ. Въ 1-мъ отдѣлѣ изложены

*) Въ одной изъ задачъ второй главы Баскара обращается съ слѣдующими словами къ самой Лилавати: „Скажи мнѣ дорогая и прекрасная Лилавати, ты у которой глаза подобны глазамъ молодаго оленя, какой получиться результатъ отъ умноженія 135 на 12? Подъ именемъ Лилавати полагаютъ Баскара разумѣетъ саму Ариѳметику.

правила, какъ производятся дѣйствія въ обратномъ порядкѣ. Правила эти Баскара прилагаетъ къ цѣлому ряду задачъ, изъ числа которыхъ мы укажемъ на слѣдующую: „найти число, которое дало-бы въ частномъ 2 послѣ производства надъ нимъ слѣдующихъ дѣйствій: сначала число умножено на 3, затѣмъ оно увеличено на $\frac{3}{4}$ этого произведенія, снова раздѣлено на 7 и уменьшено на $\frac{1}{7}$ частнаго, полученный остатокъ возвышенъ въ квадратъ, затѣмъ уменьшенъ на 52, изъ полученнаго числа извлеченъ квадратный корень, затѣмъ прибавлено 8 и наконецъ раздѣлено на 10". Подобные вопросы въ настоящее время рѣшаются при помощи уравненій, Баскара же излагаетъ правила, при посредствѣ которыхъ всѣ дѣйствія нужно производить въ обратномъ порядкѣ, начиная съ послѣдняго и такимъ образомъ дойти до неизвѣстнаго числа. Во 2-мъ отдѣлѣ слѣдуетъ рядъ вопросовъ, который рѣшается при помощи метода, напоминающаго правило, извѣстное подъ именемъ *правила фальшиваго положенія (regula falsi).* Изъ числа этихъ вопросовъ укажемъ на слѣдующій: „изъ пучка цвѣтовъ чистыхъ лотосовъ взяты третья, пятая и шестая части, которыя соотвѣтственно приподнесены богамъ: Шивѣ, Вишнѣ и Солнцу; четвертая же часть досталась Бавани. Оставшіеся шесть лотосовъ даны многоуважаемому учителю. Скажи мнѣ немедленно число всѣхъ цвѣтковъ?" При рѣшеніи этой задачи Баскара поступаетъ слѣдующимъ образомъ: онъ выбираетъ сначала произвольное число, дѣлящееся безъ остатка на 3, 4, 5 и 6; пусть это число будетъ 60. Взятое число неудовлетворяетъ предложенной задачѣ, такъ какъ въ остаткѣ оно даетъ 3, а не 6. Изъ этого Баскара заключаетъ, что нужно взять число вдвое большее, т. е. 120, которое и удовлетворяетъ задачѣ. Въ 3-мъ отдѣлѣ показано какъ изъ извѣстнаго сочетанія величинъ могутъ быть найдены эти величины. Вопросъ этотъ рѣшаетъ Баскара при слѣдующихъ задачахъ: по данной суммѣ и разности двухъ чиселъ найти самыя числа; а также по данной разности квадратовъ и разности чиселъ найти самыя числа по формулѣ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Въ 4-мъ отдѣлѣ даны правила, при помощи которыхъ можно отыскать два числа, коихъ сумма или же разность квадратовъ, уменьшенная на единицу, была-бы снова число квадратное. Баскара предлагаетъ три правила. По первому одно число $n=\frac{8m^2-1}{2m}$, а другое $\frac{n^2}{2}+1$, и мы всегда будемъ имѣть, что $n^2\pm\left(\frac{n^2}{2}+1\right)^2-1$ равно числу квадратному. По другому пріему оба числа будутъ $m+\frac{1}{2m}$ и 1, и наконецъ по третьему, они суть $8m^4+1$ и $8m^3$. Въ 5-мъ отдѣлѣ изложено рѣшеніе уравненій вида $x\pm a\sqrt{x}=b$ и $cx\pm a\sqrt{x}=b$, при чемъ послѣднее при-

водится къ виду $x^2 - \frac{a}{c}x = \frac{b}{c}$. Всѣ правила Баскара поясняетъ на примѣрахъ, состоящихъ изъ дѣйствій надъ извѣстными числами для полученія неизвѣстныхъ. Въ 6-мъ отдѣлѣ изложены тройныя правила и приложеніе ихъ къ различнымъ вопросамъ торговли.

Всѣ изложенныя розысканія Баскара производитъ почти тѣми-же самыми пріемами и методами, которые употребительны и въ настоящее время.

Глава IV состоитъ также изъ шести отдѣловъ; она озаглавлена „розысканія относящіяся къ смѣсямъ". Въ 1-мъ отдѣлѣ этой главы авторъ рѣшаетъ различные вопросы, относящіеся къ правиламъ процентовъ и товарищества. Во 2-мъ отдѣлѣ разбирается задача: „опредѣлить время нужное для наполненія бассейна водой, текущей въ него изъ нѣсколькихъ источниковъ, если извѣстны времена, въ которыя бассейнъ наполняется каждымъ изъ источниковъ отдѣльно". Въ 3-мъ отдѣлѣ, озаглавленномъ „покупка и продажа", рѣшено нѣсколько задачъ, относящихся къ вопросамъ практической жизни. Въ 4-мъ отдѣлѣ рѣшена слѣдующая задача и приведено правило для ея рѣшенія. Задача состоитъ въ слѣдующемъ: „изъ четырехъ ювелировъ имѣютъ, первый—8 рубиновъ, второй 10 сафировъ, третій—100 жемчужинъ и четвертый 5—алмазовъ; при встрѣчѣ каждый изъ нихъ отдаетъ остальнымъ тремъ по части своего имущества. Послѣ раздѣла части ихъ одинаковы; требуется опредѣлить стоимость имущества каждаго изъ ювелировъ". Для рѣшенія этой задачи Баскара предлагаетъ слѣдующее правило: изъ каждаго изъ чиселъ 8, 10, 100 и 5 нужно вычесть число лицъ—4; затѣмъ слѣдуетъ взять произвольное число, напр. 96, которое дѣлятъ на полученные остатки 4, 6, 96 и 1; полученныя частныя 29, 16, 1 и 96 будутъ отношенія различныхъ стоимостей имуществъ ювелировъ. Въ 5-мъ отдѣлѣ изложены задачи на правило смѣшенія, а также опредѣленіе пробы золота и серебра. Въ 6-мъ отдѣлѣ Баскара занимается вопросомъ о нахожденіи числа различныхъ соединеній, но при этомъ онъ замѣчаетъ, что онъ не будетъ распространятся надъ этимъ вопросомъ, чтобы не увеличить объема своей книги.

Глава V, состоящая изъ двухъ отдѣловъ, посвящена ариѳметическимъ и геометрическимъ строкамъ. Въ восьми правилахъ изложено какъ находить суммы рядовъ:

$$1+2+3+4+\ldots+n$$

$$1+3+6+\ldots+n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

Далѣе авторъ переходитъ къ общему ряду:

$$a\ ,\ a+k\ ,\ a+2k\ ,\ \ldots\ ,\ a+(n-1)k$$

и показываетъ какъ находить его сумму. Во 2-мъ отдѣлѣ показаны правила для суммированія геометрическихъ строкъ.

Глава VI содержитъ плоскую Геометрію, изложеніе которой мало отличается отъ находящагося въ сочиненіи Брамагупты, сдѣланы только незначительныя дополненія. Объ этой главѣ мы уже имѣли возможность говорить выше, въ началѣ настоящаго сочиненія. Въ началѣ этой главы Васкара, подобно Брамагуптѣ, занимается прямоугольными треугольниками, при чемъ пиѳагорова теорема приведена какъ вполнѣ очевидное предложеніе (см. стр. 11). Затѣмъ приведено нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ показано, какъ по двумъ даннымъ сторонамъ прямоугольнаго треугольника отыскивается третья сторона; при этомъ числа такъ подобраны, что результатъ всегда получается число раціональное. Если катеты равны, то гипотенуза ирраціональна; при этомъ Баскара показываетъ какъ отыскивается корень числа въ этомъ случаѣ. Правило предложенное Баскарой состоитъ въ слѣдующемъ: если требуется извлечь корень изъ $\frac{169}{8}$, то умножаютъ числитель на произведеніе изъ 8 и четной степени 10, напр. 10000, полученное произведеніе есть 13520000, приближенный корень этого выраженія 3677, а потому $\sqrt{\frac{169}{8}} = \frac{3677}{800} = 4\frac{477}{800}$. Подобный пріемъ употребляется и въ настоящее время для извлеченія корней изъ чиселъ по приближенію. Затѣмъ слѣдуютъ предложенія и правила, относящіеся къ составленію прямоугольныхъ треугольниковъ, коихъ стороны выражаются раціональными числами. Изъ числа подобныхъ предложеній укажемъ на слѣдующія:

$$2ab+(a-b)^2=a^2+b^2 \quad \text{и} \quad (a-b)(a+b)=a^2+b^2.$$

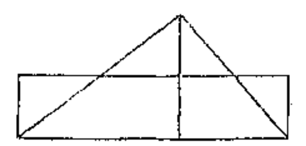
Далѣе слѣдуетъ цѣлый рядъ правилъ, изложенныхъ въ очень наглядной формѣ и поясненныхъ примѣрами, относящихся къ вычисленію прямоугольныхъ треугольниковъ, когда извѣстны сумма или разность гипотенузы и одного изъ катетовъ и другой катетъ, или-же подобное соотношеніе между катетами и гипотенузой. Изъ числа такихъ примѣровъ укажемъ на слѣдующій: „Бамбуковая трость 32-хъ футовъ вышины переломлена вѣтромъ; вершина трости касается поверхности земли на разстояніи 16 футовъ отъ основанія. Скажи мнѣ математикъ, на какомъ разстояніи отъ основанія переломалась трость?“ По правилу части трости равны: одна $\frac{1}{2}\left(32+\frac{16^2}{32}\right)$, а другая $\frac{1}{2}\left(32-\frac{16^2}{32}\right)$, или же 20 и 12. Приведенная задача извѣстна въ математикѣ подъ именемъ „задачи о бамбуковой трости“. Другая изъ задачъ рѣшенныхъ Баскарой состоитъ въ слѣдующемъ: „Въ одномъ озерѣ росъ цвѣтокъ лотоса и возвышался на полъ фута надъ водой; вѣтромъ его

отнесло въ сторону и онъ скрылся подъ водой на разстояніи двухъ футовъ отъ своего первоначальнаго мѣста. Вычисли скоро математикъ глубину воды?" Подобныя задачи были извѣстны еще Брамагуптѣ.

Затѣмъ слѣдуетъ рѣшеніе такой задачи: „Двѣ бамбуковыя трости, стоящія перпендикулярно къ поверхности земли, находятся на нѣкоторомъ разстояніи одна отъ другой. Вообразивъ себѣ линіи, проведенныя изъ вершинъ къ противолежащимъ основаніямъ, требуется опредѣлить отрѣзки, на которые разсѣкается прямая, соединяющая основанія, перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки пересѣченія проведенныхъ прямыхъ на линію соединяющую основанія, а также опредѣлить и величину самаго перпендикуляра". Если m и n высоты тростей, а a разстояніе между ихъ основаніями, то величина перпендикуляра будетъ $\frac{m \cdot n}{m+n}$, а величина отрѣзка при m равна $\frac{am}{m+n}$, а при n равна $\frac{an}{m+n}$. Для нахожденія этихъ выраженій нужно прежде всего выразить отрѣзки чрезъ высоту, а потомъ сложить полученныя выраженія. Подобное правило было уже указано Брамагуптои при опредѣленіи высоты треугольника, образованнаго отъ пересѣченія двухъ противолежащихъ сторонъ четыреугольника.

Мы уже выше сказали, что Баскара во многихъ мѣстахъ своего сочиненія старается быть точнѣе Брамагупты, онъ начинаетъ вводить уже кое какія положенія, такъ напримѣръ онъ говоритъ, что сумма двухъ сторонъ треугольника болѣе третьей. Затѣмъ Баскара находитъ выраженіе для площади треугольника, которую онъ полагаетъ равной половинѣ произведенія основанія на высоту. Пріемъ тотъ же, что и примѣненный Брамагуптой. Одинъ изъ комментаторовъ Баскары, Ганеза, даетъ слѣдующее доказательство при нахожденіи площади треугольника: на основаніи треугольника онъ строитъ прямоугольникъ (фиг. 18), котораго высота равна половинѣ высоты

Фиг. 18.



треугольника. Такое построеніе дѣйствительно приводитъ къ цѣли если только доказать равенство площадей маленькихъ треугольниковъ, отсѣченныхъ отъ прямоугольника, съ двумя маленькими треугольниками, отсѣченными отъ большаго треугольника верхнимъ основаніемъ прямоугольника. Но

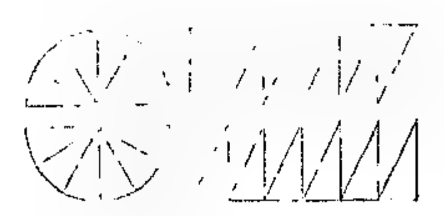
доказывать равенство этихъ треугольниковъ индусскіе математики считали излишнимъ. Они полагали, что это вполнѣ очевидно изъ чертежа, а потому вполнѣ достаточно. Ганеза ограничивается тѣмъ, что рядомъ съ чертежемъ, соотвѣтствующимъ этому построенію, пишетъ слово „смотри".

Отъ треугольниковъ Баскара переходитъ къ четыреугольникамъ, при чемъ онъ замѣчаетъ, что для опредѣленія четыреугольника недостаточно четырехъ сторонъ, но необходима еще діагональ, изъ этого можно заключить, что Баскара имѣлъ въ виду не только вписанные въ кругъ четыреугольники, но вообще всякіе четыреугольники. Относительно выраженій для площадей треугольника и четыреугольника въ функціи сторонъ Баскара замѣчаетъ, что древніе математики неправильно примѣняли ихъ ко всякимъ четыреугольникамъ и что онѣ только приближенны. Справедливость этихъ выраженій для четыреугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, также повидимому неизвѣстна Баскарѣ. При вычисленіи различныхъ частей четыреугольниковъ Баскара не ограничивается раціональными числами, онъ беретъ также и ирраціональныя, изъ чего можно заключить, что онъ стремился обобщить нѣкоторыя изъ предложеній, данныхъ Брамагуптой. Дѣлая такія обобщенія Баскара часто впадаетъ въ ошибки, что подало поводъ многимъ изъ новѣйшихъ математиковъ раздѣлять мнѣніе о томъ, что Баскара многія изъ предложеній, данныхъ Брамагуптой, не понялъ. Также заслуживаетъ вниманія въ этой главѣ правило данное Баскарой для нахожденія площади четыреугольника, разложеніемъ четыреугольника на два треугольника. Пріемъ этотъ вполнѣ принадлежитъ Баскарѣ.

Далѣе Баскара занимается нахожденіемъ площади и окружности круга. Для отношенія окружности къ діаметру онъ даетъ сначала точное выраженіе $\frac{3927}{1250}$, а затѣмъ приближенное въ видѣ $\frac{22}{7}$. Примѣняя первое выраженіе для π, длина окружности выразится чрезъ $2\,\frac{3927}{1250}\,r$, а примѣняя второе $2\,\frac{22}{7}\,r$. Одинъ изъ комментаторовъ, Ганеза, въ своихъ толкованіяхъ указываетъ, какъ было найдено выраженіе $\pi = \frac{3927}{1250}$. Онъ говоритъ, что зная сторону правильнаго вписаннаго въ кругъ шестиугольника были вычислены послѣдовательно стороны 12-ти, 24-хъ, ... и 384-хъ-угольниковъ, послѣдовательнымъ дѣленіемъ соотвѣтствующихъ дугъ пополамъ. Подобный пріемъ, какъ извѣстно, былъ примѣненъ также Архимедомъ и Птоломеемъ, а потому на основаніи этого нѣкоторые математики утверждаютъ, что многія изъ своихъ познаній въ Геометріи индусскіе математики заимствовали отъ греческихъ геометровъ. Весьма интересенъ пріемъ, помощью котораго Ганеза находитъ площадь круга, которую онъ полагаетъ равной площади

прямоугольника, построеннаго на радіусѣ и половинѣ длины окружности. Вмѣсто всякихъ разсужденій и доказательствъ Ганеза довольствуется слѣдующимъ построеніемъ, которое онъ поясняетъ однимъ словомъ „смотри“ (фиг. 19).

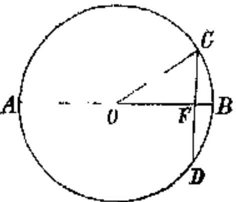
Фиг. 19.



Пріемъ Ганезы состоитъ въ слѣдующемъ: площадь круга онъ разбиваетъ на секторы; затѣмъ кругъ разрѣзываетъ по діаметру пополамъ, а каждую изъ половинъ снова разрѣзываетъ столько разъ, сколько въ ней секторовъ. Разрѣзавъ полукруги, онъ ихъ выправляетъ и получаетъ двѣ фигуры, имѣющія сходство съ пилами. Площади этихъ двухъ пилъ тождественны и сумма ихъ равна площади круга. Обѣ пилы составляютъ прямоугольникъ, основаніе, котораго равно половинѣ окружности даннаго круга, а высота равна радіусу. Изъ этого онъ заключаетъ, что площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ. Подобный методъ доказательства вполнѣ въ духѣ индусскихъ геометровъ, для которыхъ, какъ мы выше замѣтили, исходною точкою при всѣхъ доказательствахъ справедливости предложеній служило начало наглядности или очевидности.

Васкара даетъ также правила для нахожденія поверхности и объема шара, чего нѣтъ въ сочиненіи Брамагупты. Одинъ изъ комментаторовъ говоритъ,

Фиг. 20.



что при нахожденіи объема шара, слѣдуетъ разсматривать шаръ, какъ состоящій изъ иглоподобныхъ пирамидъ, вершины которыхъ сходятся въ центрѣ шара, а основанія лежатъ на поверхности шара. Въ слѣдующихъ предложеніяхъ этой главы показано соотношеніе между хордой, діа-

метромъ и высотой сегмента круга. Называя чрезъ d діаметръ AB круга, чрезъ s—хорду CD и чрезъ x—высоту FB сегмента (фиг. 20), или какъ ее называли индусы *utkramajyâ*, т. е. *стрѣлы*, Баскара находитъ выраженіе:

$$\frac{s^2}{4} = dx - x^2 \tag{1}$$

или

$$s = 2\sqrt{x(2r-x)}$$

По даннымъ двумъ изъ величинъ входящихъ въ это выраженіе Баскара даетъ выраженіе для третьей. Изъ числа геометрическихъ предложеній этой главы укажемъ еще на выраженія хорды въ функціи дуги и обратно, которыя были вѣроятно найдены эмпирически. Обозначивъ чрезъ s—хорду, c—окружность, a—дугу и d—діаметръ, формулы имѣютъ слѣдующій видъ:

$$s = \frac{4d(c-a)a}{\frac{5}{4}c^2-(c-a)a} \quad \text{и} \quad a = \frac{c}{2} - c\sqrt{\frac{d-s}{s+4d}}$$

Выраженія эти точны до вторыхъ десятичныхъ знаковъ, а потому представляютъ довольно грубую степень приближенія, но тѣмъ не менѣе онѣ интересны въ томъ отношеніи, что при помощи ихъ были вѣроятно вычислены первыя таблицы синусовъ.

Выраженіе (1) встрѣчается также въ сочиненіяхъ Брамагупты, только въ иномъ видѣ, онъ опускаетъ членъ x^2. Такое допущеніе возможно только при очень малой величинѣ x. Въ такомъ видѣ выраженіе это представляетъ предложеніе, извѣстное уже Аріабгаттѣ, что квадратъ полухорды равенъ произведенію отрѣзковъ діаметра перпендикулярнаго этой хордѣ. Если допустить, что индусскимъ геометрамъ было извѣстно предложеніе, что всякій уголъ вписанный въ полуокружность прямой, то справедливость предложенія извѣстнаго Аріабгаттѣ легко было обнаружить.

Главы VII, VIII, IX и X относятся къ измѣренію объемовъ тѣлъ при рѣшеніи различныхъ практическихъ вопросовъ. Изложеніе тоже, что и въ сочиненіи Брамагупты. Поименованныя главы очень коротки и не заключаютъ ничего интереснаго.

Глава XI озаглавлена „тѣнь гномона". Въ этой главѣ Баскара занимается вопросомъ объ измѣреніи при помощи тѣней. Называя чрезъ g высоту гномона, h—высоту свѣтящейся точки, d—разстояніе основанія источника свѣта отъ гномона и l—длину тѣни, изъ подобія треугольниковъ найдемъ слѣдующее соотношеніе между этими величинами:

$$lh = gd + gl$$

По даннымъ тремъ изъ величинъ l, h, d и g можно всегда найти четвертую; для этой цѣли Баскара даетъ правила.

Въ заключеніи главы онъ говоритъ: „Подобно высшему существу, которое избавляетъ своихъ почитателей отъ страданій и которое есть единственная причина сотворенія міра, все проникающее и все обнимающее, въ его различныхъ проявленіяхъ, какъ то: въ видѣ міровъ, раевъ, рѣкъ, горъ, боговъ, чертей, людей, деревьевъ и городовъ, точно также и настоящее собраніе предписаній проникнуто и обнимается правиломъ трехъ членовъ. Но если это есть простое основаніе, то почему же оно съ такимъ трудомъ столькими писателями такъ обстоятельно излагается? Отвѣтъ слѣдующій: все то, что всегда вычисляется въ Алгебрѣ или Ариѳметикѣ при посредствѣ одного множителя или дѣлителя, глубокіе ученые принимаютъ за правило трехъ членовъ. Однако, свѣдущими наставниками оно было раздѣлено на различныя и разнообразныя правила: они излагали эти видоизмѣненныя, болѣе простыя, правила, думая чрезъ это поднять уровень образованія немногихъ избранныхъ, подобныхъ намъ".

Глава XII занимается рѣшеніемъ нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ вопросовъ въ цѣлыхъ числахъ, но такъ какъ объ этомъ Баскара трактуетъ болѣе подробно въ своей Алгебрѣ, то мы на этой главѣ неостановимся.

Глава XIII—послѣдняя. Въ этой главѣ говориться о различныхъ соединеніяхъ, сначала о перемѣщеніяхъ, а потомъ и о сочетаніяхъ. Выраженія, показывающія число различныхъ перемѣщеній и сочетаній вполнѣ вѣрны, изъ чего можно заключить, что съ этимъ вопросомъ индусскіе математики были вполнѣ основательно знакомы.

Вопросъ о различныхъ сочетаніяхъ является у индусовъ очень древнимъ. Первые слѣды его нѣкоторые ученые видятъ въ двадцати четырехъ именахъ Вишну, которыя онъ носитъ смотря по тому порядку въ какомъ онъ держитъ въ своихъ четырехъ рукахъ дубину, цѣль, цвѣтокъ лотоса и раковину. Особенное значеніе имѣлъ вопросъ о числѣ различныхъ сочетаній и перемѣщеній въ индусской просодіи, гдѣ перечисляются всѣ возможные случаи образованія стиховъ, состоящихъ изъ одинаковаго числа слоговъ, въ зависимости отъ долготы и краткости отдѣльныхъ слоговъ *). Хотя Васкара даетъ правила для нахожденія числа различныхъ соединеній и сочетаній безъ всякихъ доказательствъ, но тѣмъ не менѣе онѣ заслуживаютъ особеннаго вниманія, такъ какъ извѣстно, что вопросъ этотъ былъ почти совершенно чуждъ древнимъ греческимъ геометрамъ и вполнѣ принадлежитъ индусамъ у которыхъ онъ получилъ вѣроятно свое первоначальное развитіе.**)

*) Интересныя указанія по этому вопросу можно найти въ статьѣ: „*Alb. Weber*, Ueber die Metrik der Inder", помѣщенной въ „Indische Studien", T. VIII pag. 326 - 928 и 425

**) Есть указанія, что вопросъ о соединеніяхъ и сочетаніяхъ былъ извѣстенъ древ-

Въ концѣ своей Ариѳметики Баскара говоритъ слѣдующее: „Счастіе и радость, безъ сомнѣнія, будутъ постоянно возрастать въ этомъ мірѣ для тѣхъ, которые посвятили себя благородному искусству Лилавати; прекрасно составлены всѣ ея части, чисты и совершенны ея рѣшенія и изященъ ея языкъ *)“.

Познакомившись вкратцѣ съ содержаніемъ ариѳметическаго сочиненія Баскары, перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію второй части „Сидганташиромани“, которая заключаетъ Алгебру или какъ Баскара ее называетъ „Біаганита“, т. е. „вычисленіе корней“.

Біаганита. Въ введеніи къ своему сочиненію Баскара опредѣляетъ предметъ Алгебры въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

„Я почитаю невидимое первобытное существо, о которомъ говорятъ санкгіасы (ученые), что оно есть источникъ познавательной способности, которой обладаютъ всѣ одушевленныя существа и которая служитъ къ ихъ развитію; оно есть единственное основаніе всего видимаго. Я молю управляющую силу, которая считается мудрецами, знакомыми съ природой, началомъ всѣхъ познаній, такъ какъ она есть единственное начало всего видимаго. Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые съ ней видятъ въ ней средство къ пониманію всего существующаго; она есть основаніе всего видимаго“.

„Такъ какъ дѣйствія надъ извѣстными величинами, какъ мы уже видѣли, были основаны на дѣйствіяхъ при помощи неизвѣстныхъ величинъ и такъ какъ рѣшеніе вопросовъ можетъ быть понято весьма немногими, и совершенно непонято людьми слабо одаренными отъ природы, то я предпринялъ, въ настоящее время, изложить и разобрать сущность Алгебры или анализа“.

нимъ греческимъ философамъ. Вопросъ этотъ былъ извѣстенъ *Аристотелю* и былъ примѣненъ ученикомъ его *Аристоксеномъ* изъ Тарента къ нахожденію числа возможныхъ соединеній извѣстныхъ элементовъ. Кромѣ того вопросъ о соединеніяхъ и сочетаніяхъ занималъ *Ксенократа*, стоика *Хризиппа* (282—209 г. до Р. Х.), а также, по словамъ Плутарха, *Гиппарха*. Когда жилъ послѣдній Плутархъ ничего не говоритъ, онъ упоминаетъ только, что Гиппархъ этотъ „принадлежалъ къ числу ариѳметиковъ“. Весьма вѣроятно, что это извѣстный астрономъ Гиппархъ, жившій между 161 и 126 гг. до Р. Х. Такое предположеніе еще тѣмъ заслуживаетъ вниманія, что по словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей Гиппархъ написалъ сочиненіе „О квадратныхъ уравненіяхъ“, объ этомъ мы уже упоминали (см. стр. 257). Астрономъ Гиппархъ былъ родомъ изъ Никеи, въ Виѳиніи, онъ производилъ свои наблюденія на островѣ Родосѣ (объ Гиппархѣ см. стр. 111—112).

*) Сочиненія Баскары пользовались большой извѣстностью у индусскихъ ученыхъ, такъ какъ онѣ были комментированы многими учеными. Изъ числа такихъ комментаторовъ болѣе извѣстны: *Гангадгара* (Gangadhara), жившій около 1420 г.; *Сурьядаза* (Suryadâsa)—около 1540, *Ганеза* (Ganeza)—около 1545; *Ранганата* (Ranganâtha)—около 1640; *Рама-Кришна* (Râma-Krishna); *Кришна-Батта* (Krishna-Bhatta). Время, когда жили послѣдніе два комментатора неизвѣстно.

Сочиненіе Баскары состоитъ изъ восьми главъ, съ содержаніемъ которыхъ мы теперь познакомимся.

Глава I озаглавлена „36 дѣйствій" (*shat-trimçat pari-karmâni*). Она состоитъ изъ пяти отдѣловъ, изъ которыхъ первый подраздѣляется снова на два. Отдѣлы эти содержатъ:

1-й и 2-й шесть дѣйствій надъ плюсомъ и минусомъ (*shadvidham dhana-rna*).

3-й — шесть дѣйствій надъ нулемъ (*shadvidham kha*).

4-й — шесть дѣйствій надъ неизвѣстнымъ (*shadvidham avyakta*).

5-й — шесть дѣйствій надъ нѣсколькими неизвѣстными (*shadvidham aneka-varna*).

6-й — шесть дѣйствій надъ ирраціональными величинами (*shadvidham karani*).

Подъ именемъ *шести дѣйствій* Баскара понимаетъ сложеніе, вычитаніе умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корней.

Первый изъ поименованныхъ отдѣловъ кромѣ различныхъ примѣровъ содержитъ *правила*—*sûtras*, изложенныя въ стихотворной формѣ. Правила эти состоятъ въ слѣдующемъ:

1) При сложеніи складываютъ двѣ *потери* или два *имущества*; разность между *выигрышемъ* и *долгомъ* равна ихъ суммѣ.

2) Правило при вычитаніи: *имущество* дѣлается *долгомъ*, *долгъ*—*имуществомъ*; затѣмъ производятъ сложеніе какъ указано.

3) Произведеніе двухъ *имуществъ* или же двухъ *неимуществъ* есть *имущество*; произведеніе *имущества* и *долга* есть *долгъ*. Тоже правило имѣетъ мѣсто при дѣленіи.

4) Квадратъ *имущества* или *долга* есть *имущество*; *имущество* имѣетъ два корня, одинъ въ видѣ *выигрыша*, другой въ видѣ *долга*. Корень изъ *долга* несуществуетъ, такъ какъ послѣдній не есть квадратъ.

Изъ приведенныхъ правилъ видно, что Баскара положительнымъ величинамъ—*dhanam* придаетъ значеніе *имущества*, *богатства*, *выигрыша*; отрицательнымъ же—*rnam* значеніе *долга*, *потери*. Кромѣ того правила эти указываютъ вполнѣ ясно, что Баскара имѣлъ понятіе о двойномъ знакѣ при радикалѣ второй степени.

Третій отдѣлъ посвященъ дѣйствіямъ надъ нулемъ. Баскара говоритъ: „увеличенные или уменьшенные на нуль имущество и долгъ остаются безъ измѣненія; вычтенные изъ нуля они принимаютъ обратное значеніе" (т. е. долгъ дѣлается имуществомъ, а имущество долгомъ). Изъ сказаннаго видно, что Баскара представлялъ себѣ отрицательное количество, какъ количество положительное, только отсчитываемое внизъ отъ нуля.

Далѣе Баскара говоритъ: „дѣлимое 3; дѣлитель 0; результатъ дѣ-

ленія $\frac{3}{0}$, который есть безконечность, называется частное отъ нуля. Онъ не претерпѣваетъ измѣненій. Величина, которую называютъ „частное отъ нуля", не можетъ ни увеличиться, ни уменьшиться, какія-бы большія сложенія или вычитанія мы не производили, подобно тому какъ ко времени, не имѣющему ни начала, ни конца, дѣлая серіи существованій (бытіе)".

Изъ содержанія поименованныхъ трехъ отдѣловъ первой главы мы видимъ, что Васкара имѣлъ вполнѣ ясное представленіе объ положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ и объ ихъ различіи. Онъ зналъ, что корень квадратный имѣетъ два значенія—одно положительное, другое отрицательное; что нельзя извлечь корень квадратный изъ отрицательнаго числа. Ему было также извѣстно, что дробь, которой знаменатель нуль, безконечно велика; что произведеніе двухъ отрицательныхъ чиселъ есть число положительное, а произведеніе положительнаго числа и отрицательнаго—число отрицательное. Впрочемъ необходимо замѣтить, что послѣднія правила были извѣстны еще Аріабгаттѣ.

Въ 4-мъ отдѣлѣ показаны дѣйствія надъ буквенными величинами и даны примѣры на числахъ, и наконецъ въ 5-мъ отдѣлѣ показаны дѣйствія надъ ирраціональными величинами.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о томъ какъ обозначали индусскіе математики неизвѣстныя и извѣстныя величины, а также уравненія.

Неизвѣстную величину они называли *yavat-tavat*, что соотвѣтствуетъ латинскому выраженію *tantum-quantum* *). Для обозначенія неизвѣстной величины x служилъ знакъ या, соотвѣтствующій слогу *ya*. Квадратъ неизвѣстной величины, т. е. x^2, они обозначали знакомъ या व, который соотвѣтствуетъ сокращенному слову *varga*. Если приходилось имѣть дѣло съ нѣсколькими неизвѣстными величинами, напр. $x, y, z, \ldots$, то индусскіе математики различали ихъ по цвѣтамъ **), обозначая одну неизвѣстную знакомъ का—*ka* (*kâlaca*—черная), другую знакомъ नी—*ni* (*nilaca*—голубая), третьею знакомъ पी—*pi* (*pitaca*—желтая), четвертую знакомъ लो—*lo* (*lôhitaca*—красная) и т. д. Коэфиціенты ставились всегда позади неизвѣстнаго, рядомъ съ нимъ. Извѣстная величина сопровождалась всегда словомъ

---

*) Роде высказываетъ предположеніе, что терминъ *yavat-tavat*, обозначающій неизвѣстное и соотвѣтствующій термину *tantum-quantum*, есть ничто иное какъ переводъ на санскритскій языкъ греческаго ἀριθμός, которое само есть переводъ египетскаго *hâ* (*hau*)—*куча*, означающимъ неизвѣстную величину въ папирусѣ Ринда (см. стр. 383).

**) Обозначеніе неизвѣстныхъ величинъ названіями цвѣтовъ своимъ происхожденіемъ вѣроятно обязано тому, что на санскритскомъ языкѣ буквы носили названія цвѣтовъ.

rupa, что означаетъ *опредѣленное число*. Знака равенства въ уравненіяхъ не существовало, а обѣ части уравненія писали одну подъ другой.

Для поясненія изложеннаго мы считаемъ не безъинтереснымъ привести уравненіе, заимствованное нами изъ сочиненія Баскары. Вотъ это уравненіе:

या व २	यां १	रू ३०	=	*ya bha* 2	*yȧ* 1	*ru* 30
या व ०	या ०	रू ८		*ya bha* 0	*ya* 0	*ru* 8

уравненіе это, написанное настоящимъ алгебраическимъ языкомъ будетъ имѣть видъ:

$$2x^2-x+30$$
$$=0x^2+0x+8$$

или же написанное въ общеупотребительной формѣ, оно приметъ видъ:

$$2x^2-x+30=8$$

Глава II содержитъ рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени (*cuttuca d'hyaya*). Глава эта есть дальнѣйшее развитіе, сказаннаго въ двѣнадцатой главѣ „Лилавати“ *).

Мы уже выше видѣли, что рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени было извѣстно еще Аріабгаттѣ. Въ сочиненіи Баскары всѣ неопредѣленныя уравненія первой степени предложены для рѣшеній въ формѣ $\frac{ax+b}{c}=y$, при чемъ требуется опредѣлить x въ цѣлыхъ числахъ такъ, чтобы $ax+b$ дѣлилось-бы безъ остатка на c, т. е. чтобы y было число цѣлое.

Глава III содержитъ рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій второй степени *(varga pacriti)*. Глава эта состоитъ изъ трехъ отдѣловъ. Въ 1-мъ отдѣлѣ изложенъ пріемъ для рѣшенія уравненій формы $ax^2+1=y^2$, при чемъ a коэфиціентъ, 1—слагаемое, x—меньшій корень, а y большій. Методъ состоитъ въ слѣдующемъ: если найдено послѣдовательными пробами рѣшеніе $x=n$ и $y=m$, то будутъ также удовлетворять и $x=2mn$ и $y=an^2+m^2$, или если найдены два рѣшенія $x=n$, $y=m$ и $x=p$, $y=q$ то $x=mp\pm nq$ и $y=anp\pm mq$ будутъ новыя значенія, которыя также удовлетворятъ уравненію. Справедливость сказаннаго показано Баскарой на примѣрахъ, но доказательства онъ не приводитъ. Такъ какъ указанный пріемъ приводитъ къ цѣли только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, то

*) Обѣ главы носятъ одно и то же заглавіе. Кольбрукъ озаглавилъ ихъ *Pulverizer*, т. е. *раздробленіе*.

Васкара во 2-мъ отдѣлѣ даетъ болѣе общій пріемъ, извѣстный подъ именемъ *циклическаго*. Въ 3-мъ отдѣлѣ этой главы рѣшены различныя задачи.

Неопредѣленныя уравненія второй степени являются всегда у индусскихъ математиковъ подъ видомъ $ay^2+t=x^2$, къ которому они всегда умѣютъ ихъ сводить. Извѣстно, что Діофантъ умѣлъ рѣшать подобныя уравненія въ раціональныхъ числахъ, но только для частныхъ значеній $a=x^2$ и $t=c^2$, индусскіе же математики предложили *общій пріемъ* для рѣшенія уравненія $ay^2+1=x^2$ въ цѣлыхъ числахъ. Уравненіе это и въ настоящее время имѣетъ важное значеніе въ теоріи квадратныхъ формъ. Излагать въ чемъ состоитъ циклическій методъ мы не будемъ, такъ какъ это отвлекло бы насъ слишкомъ далеко, замѣтимъ только, что весь пріемъ основанъ на замѣчаніи, что если p и q суть рѣшенія уравненія $aq^2+t=p^2$, а p' и q' рѣшенія уравненія $aq'^2+t'=p'^2$, то $y=pq'+qp'$ и $x=pp'+aqq'$ будутъ тождественныя рѣшенія уравненія $ay^2+tt'=x^2$.

Циклическій методъ замѣчателенъ по глубинѣ мысли и тонкости пріемовъ *). По выраженію Ганкеля, пріемъ этотъ принадлежитъ къ числу самыхъ тонкихъ изслѣдованій, сдѣланныхъ въ теоріи чиселъ до Лагранжа. Пріемъ индусскихъ математиковъ былъ снова найденъ Лагранжемъ въ 1769 г. **). Задача, которою занимались индусы была снова впервые предложена Ферма въ 1657 г. и рѣшена англійскимъ математикомъ лордомъ Врункеромъ *(Brouncker)*. Впослѣдствіи задачей этой снова занялся Эйлеръ и свелъ ее на разложеніе въ непрерывныя дроби ***). Въ настоящее время рѣшеніе уравненія $ay^2+1=x^2$ извѣстно въ Анализѣ подъ именемъ *задачи Пеля (Pell)*, хотя она была извѣстна уже до него. Доказательства циклическаго пріема индусскіе математики не дали, такъ какъ давать доказательства вообще они считали излишнимъ, вѣроятно это входило въ устное преподаваніе ихъ ученыхъ. Также ими не было доказано, что пріемъ этотъ всегда годится если a число не квадратное; доказать это пытался уже Валлисъ ****), но успѣлъ въ этомъ только Лагранжъ.

Рѣшеніе уравненій формы $ax^2+b=cy^2$ указываетъ, что Васкарѣ были извѣстны такъ называемые *квадратичные вычеты* и *кубическіе вычеты*.

Глава IV содержитъ рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. При помощи уравненій рѣшается много вопросовъ, которые

*) Сущность циклическаго метода изложена въ сочиненіи: *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. in-8. pag. 200—205.

**) Sur la solution d'un problème indéterminé du 2 degré. Mémoires de l'Académie de Berlin. 1769. T. XXIII.

***) De usu novi algorithmi Novi Comment. Petrop. 1767. T. XI.

****) *Wallis*, Opera mathem. T. II. Commercium epist. Ep. 9, 14, 17, 18, 19, 46; а также въ его „Алгебрѣ", C. 98, 99.

были уже разобраны въ Ариѳметикѣ Баскары. Правилъ указано немного; отдѣльные случаи пояснены на частныхъ примѣрахъ. Мы уже выше упомянули, что всякое уравненіе первой степени формы:

$$6x+300=10x+100$$

индусскіе математики писали въ видѣ:

уа 6 *ru* 300

уа 10 *ru* 100 .

если же какого нибудь члена недоставало, въ уравненіяхъ написанныхъ въ такой формѣ, напр. уравненіе:

$$6x=24$$

то недостающіе члены замѣщали нулемъ, т. е. писали уравненіе въ формѣ:

уа 6 *ru* 0

уа 0 *ru* 24

Рѣшеніе уравненій получается вычитая одинъ рядъ изъ другаго; такимъ образомъ для перваго изъ написанныхъ уравненій мы будемъ имѣть:

уа 4 *ru* 4ȯ0

откуда слѣдуетъ, что *уа* равно *ru* 100. Въ послѣднемъ видѣ и даются рѣшенія уравненій.

Нѣкоторые изъ вопросовъ этой главы сводятся на рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными, а другіе на рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій. Изъ числа послѣднихъ укажемъ на вопросы, которые сводятся на рѣшеніе уравненій вида $Ax^2=Bx$ и $Ax^3=Bx^2$; уравненія эти Баскара, подобно Діофанту, причисляетъ къ числу уравненій первой степени. Нѣкоторыя изъ уравненій этой главы напоминаютъ своими рѣшеніями остроумные пріемы Діофанта; многіе вопросы Баскара рѣшаетъ не менѣе искусстно и просто, при этомъ рѣшеніе нѣкоторыхъ изъ нихъ онъ приписываетъ болѣе древнимъ писателямъ. Изъ числа вопросовъ этой главы укажемъ на слѣдующее уравненіе съ двумя неизвѣстными, которое сводится къ рѣшенію уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Задача состоитъ въ слѣдующемъ: „Нѣкто сказалъ своему пріятелю: другъ мой, дай мнѣ 100 и я буду вдвое богаче тебя! второй отвѣтилъ: если ты мнѣ дашь 10, то я буду въ шесть разъ богаче тебя! Спрашивается сколько имѣетъ каждый?“ Баскара полагаетъ, что первый имѣетъ $2x-100$, а второй $x+100$; такое положеніе удовлетворяетъ первой части вопроса; затѣмъ онъ полагаетъ $2x-110=6(x+110)$, откуда $x=70$, а потому $2x-100=40$ и $x+100=170$.

Въ одномъ изъ неопредѣленныхъ вопросовъ этой главы различные предметы обозначены начальными буквами своихъ названій, что подало

мысль нѣкоторымъ ученымъ видѣть въ этомъ первое начало употребленія буквъ, вмѣсто чиселъ, при производствѣ ариѳметическихъ операцій. Но едва-ли такое мнѣніе заслуживаетъ вниманія. Кромѣ того многіе изъ вопросовъ этой главы напоминаютъ задачи, рѣшенныя Діофантомъ въ VI-й книгѣ „Ариѳметики“, такъ напримѣръ: „найти прямоугольный треугольникъ, въ которомъ величина гипотенузы выражалась тѣмъ же числомъ, что и площадь“; полагая гипотенузу, высоту и основаніе соотвѣтственно равными: $(m^2+n^2)x$, $2mnx$ и $(m^2-n^2)x$; требуется чтобы $(m^2+n^2)x=mn(m^2-n^2)x^2$, т. е. находимъ:

$$x=\frac{m^2+n^2}{mn(m^2-n^2)}.$$

Другая задача: „найти прямоугольный треугольникъ, коего площадь выражалась тѣмъ же числомъ, что и произведеніе сторонъ“. Или же, „найти два числа, такихъ свойствъ, чтобы ихъ сумма, а также ихъ разность были квадраты, произведеніе же было кубъ“. Полагая одно число $(m^2+n^2)x^2$, другое $2mnx^2$, удовлетворимъ двумъ первымъ требованіямъ вопроса; третье условіе требуетъ, чтобы $2mn(m^2+n^2)x^4$ было кубъ. „Найти два числа, коихъ сумма кубовъ была бы квадратъ, а сумма квадратовъ—кубъ“. Многіе вопросы этой главы рѣшены въ умѣ, безъ всякихъ вычисленій, съ большимъ умѣніемъ. Извѣстно, что индусскіе ученые еще до настоящаго времени поражаютъ европейцевъ умѣніемъ быстро производить въ умѣ самыя сложныя вычисленія *)

Изъ числа уравненій первой степени, рѣшенныхъ Баскарой, укажемъ на слѣдующія, находящіяся въ третьей главѣ „Лилавати“. Уравненія эти мы приводимъ, чтобы читатель могъ себѣ составить понятіе о формѣ, въ которой индусскіе математики предлагали вопросы для рѣшеній. Задачи эти слѣдующія: „пятая часть числа пчелъ роя сѣла на цвѣтокъ кадамба, третія—на цвѣтокъ силиндра. Утроенная разность послѣднихъ двухъ чиселъ полетѣла на цвѣты кутая; кромѣ того осталась еще одна пчела, которая летаетъ то взадъ, то впередъ, будучи привлечена прекраснымъ запахомъ жасмина и пандамуса. Скажи мнѣ восхитительная женщина число пчелъ?“ Другая задача: „во время свиданія между двумя влюбленными порвалась у влюбленной нитка жемчуга; $\frac{1}{6}$ жемчужинъ упала на полъ, $\frac{1}{5}$ осталась на нѣ-

*) Различные путешественники разсказываютъ, что индусскіе ученые производили весьма сложныя вычисленія при помощи однѣхъ только раковинъ, которыя замѣняли имъ жетоны. Результаты, достигнутые браминами въ предвычисленіи солнечныхъ и лунныхъ затмѣній весьма близки къ дѣйствительности. Европейцевъ поражаетъ то необыкновенное хладнокровіе и та сосредоточенность съ которыми брамины производятъ свои вычисленія. Не смотря на все несовершенство подобнаго способа, индусы рѣдко ошибаются въ своихъ выкладкахъ.

стѣ, гдѣ они сидѣли, $\frac{1}{6}$ спасла влюбленная, $\frac{1}{10}$ взялъ себѣ влюбленный и кромѣ того осталось еще 6 жемчужинъ; скажи сколько было всего жемчужинъ на ниткѣ". Задачи эти Баскара приписываетъ Кридгарѣ.

Глава V занимается рѣшеніемъ уравненій второй степени; рѣшеніе ихъ Баскара приписываетъ Аріабгаттѣ. Въ очень простой формѣ предлагаетъ Баскара правило для рѣшеній, которое можетъ быть приложено и къ нѣкоторымъ отдѣльнымъ случаямъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Для уравненій къ которымъ нельзя примѣнить указанныя правила, Баскара пользуется различными искусственными пріемами. Такъ напр. при рѣшеніи уравненія $mx^2+ax=b$ онъ сперва умножаетъ это уравненіе на $4m$ и получаетъ $4m^2x^2+4amx=4bm$; затѣмъ онъ прибавляетъ къ обѣимъ частямъ по a^2 и получаетъ $4m^2x^2+4amx+a^2=a^2+4bm$, извлекая изъ полученнаго уравненія корень, получаемъ:

$$2mx+a=\sqrt{a^2+4bm}\ , \text{ или } 2mx=-a+\sqrt{a^2+4bm}$$

а слѣдовательно:

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4bm}}{2m}$$

Послѣдняя формула есть общій видъ рѣшенія уравненій второй степени Кромѣ того Баскара разсматриваетъ еще частные случаи, именно:

$$mx^2+ax=b,\quad mx^2-ax=b,\quad mx^2+ax=-b,\quad mx^2-ax=-b.$$

Когда a отрицательно, какъ во второмъ и четвертомъ случаяхъ, и $\sqrt{a^2-4bm}$ меньше отъ a, то x имѣетъ два значенія, въ противномъ случаѣ одно. Отрицательныя значенія Баскара причисляютъ къ числу невозможныхъ, такъ какъ по его словамъ „абсолютно отрицательныя числа люди не принимаютъ во вниманіе". По мнѣнію Баскары двойственное значеніе корня квадратнаго уравненія возможно только въ случаѣ, когда оба корня положительны. Онъ поясняетъ это на примѣрѣ: „Стая обезьянъ забавлялась: одна осьмая часть ихъ въ квадратѣ бѣгала въ лѣсу, остальныя двѣнадцать кричали на верхушки холмика. Скажи мнѣ сколько было всего обезьянъ?" Отвѣтъ даетъ два рѣшенія 48 и 16. Уравненіе это Баскара рѣшаетъ слѣдующимъ образомъ:

„Полагая здѣсь стаю обезьянъ $=x$; квадратъ осьмой части, увеличенный на двѣнадцать, равенъ всей стаѣ по условію вопроса, а потому обѣ части уравненія будутъ:

$$\frac{x^2}{64}+0x+12=0x^2+a+0$$

Приводя къ одному знаменателю и дѣлая приведеніе, найдемъ:

$$x^2-64x=-768$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ квадратъ 32 и извлекая квадратный корень, получимъ:

$$x-32=16$$

Въ данномъ случаѣ отрицательныя единицы первой части таковы, что единицы второй части меньше ихъ, а потому послѣднія можно принимать положительными и отрицательными и получаемъ двойное значеніе x, 48 и 16". Таково разсужденіе Баскары, на основаніи котораго онъ въ приведенномъ уравненіи допускаетъ два рѣшенія. Въ другомъ примѣрѣ Баскара разсуждаетъ иначе; примѣръ этотъ слѣдующій: „найти число обезьянъ стаи, одна пятая которой безъ трехъ въ квадратѣ спряталась въ пещерѣ, кромѣ того одна рѣзвится въ лѣсу". Вопросъ этотъ приводитъ къ рѣшенію уравненія:

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$$

или:

$$x^2-55x=-250$$

корни его будутъ:

$$x_1=50 \quad \text{и} \quad x_2=5$$

Второе рѣшеніе Баскара отбрасываетъ, такъ какъ $\frac{1}{5}5-3$ есть число отрицательное, но одинъ изъ комментаторовъ сочиненій Баскары *Кришна-Батта (Krichna-Bhatta)* даетъ слѣдующее интересное толкованіе второму значенію корня, онъ говоритъ: „если-бы по условію вопроса было сказано: *одна пятая часть стаи вычтенная изъ трехъ*, то второе изъ рѣшеній $x_2=5$ было-бы удовлетворяющее условію вопроса, а не первое $x_1=50$, потому что пятая часть этого числа не можетъ быть вычтена изъ 3".

Приведемъ еще одно изъ уравненій второй степени, рѣшенныхъ Баскарой: „Корень квадратный изъ половины числа пчелъ роя полетѣлъ на кустъ жасмина; $\frac{8}{9}$ цѣлаго роя осталось дома; одна самочка полетѣла за самцемъ, который жужжитъ въ цвѣткѣ лотоса, куда онъ попалъ ночью, привлеченный пріятнымъ запахомъ, и изъ котораго онъ не можетъ выйти, такъ какъ цвѣтокъ закрылся. Скажи мнѣ число пчелъ роя?" Чтобы рѣшить это уравненіе Баскара полагаетъ число пчелъ роя равнымъ $2x^2$, тогда квадратъ половины числа пчелъ роя будетъ x, а $\frac{8}{9}$ всего роя будетъ $\frac{16}{9}$ и онъ составляетъ уравненіе:

$$2x^2+0x+0=\frac{16}{9}x^2+x+2$$

или:

$$18x^2+0x+0=16x^2+9x+18$$

или:

$$2x^2-9x+0=0x^2+0x+18$$

откуда:

$$2x^2-9x=18$$

слѣдовательно:

$$x=6 \quad , \text{ а } \quad 2x^2=72$$

т. е. число пчелъ роя равно 72.

Мы остановились болѣе подробно на уравненіяхъ второй степени, рѣшенныхъ въ сочиненіи Баскары, во первыхъ потому, чтобы уяснить методы, примѣняемыя Баскарой при рѣшеніи этихъ уравненій, а во вторыхъ чтобы показать форму, въ которой индусскіе математики предлагали задачи для рѣшеній.

Изъ сказаннаго мы видимъ, на сколько опередили индусскіе математики, въ своихъ познаніяхъ въ Алгебрѣ, Діофанта. Двойственность рѣшеній квадратныхъ уравненій, неизвѣстная послѣднему, извѣстна индусскимъ математикамъ и сдѣланы были даже довольно удачныя попытки объяснить ее и дать ей геометрическое толкованіе, въ смыслѣ отсчитываній въ двухъ прямо противоположныхъ направленіяхъ.

Кромѣ рѣшенія уравненій второй степени въ сочиненіи Баскары встрѣчаются отдѣльные случаи рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Изъ числа такихъ уравненій укажемъ на слѣдующее уравненіе третьей степени: $x^3-6x^2+12x=35$. Уравненіе это является у Баскары при рѣшеніи вопроса: „найти число такихъ свойствъ, чтобы умноженное на 12 и прибавленное къ своему кубу оно равнялось суммѣ изъ шести разъ взятаго его квадрата, увеличеннаго на 35. Рѣшая этотъ вопросъ Баскара составляетъ уравненіе:

$$x^3+12x=6x^2+35$$

которое онъ приводитъ къ формѣ:

$$x^3+12x-6x^2=35$$

вычитая изъ обѣихъ частей по 8 онъ находитъ:

$$(x-2)^3=27$$

или извлекая кубическій корень:

$$x-2=3$$

т. е.:

$$x=5$$

О другихъ корняхъ нѣтъ и помину.

Кромѣ того Баскара рѣшаетъ еще слѣдующее уравненіе четвертой степени:

$$x^4-2x^2-400x=9999$$

и находитъ корень $x=11$. При рѣшеніи этого уравненія онъ также поль-

зуется искусственнымъ пріемомъ и дѣйствуетъ такъ сказать ощупью, безъ всякихъ опредѣленныхъ правилъ *).

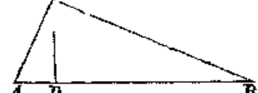
Напомнимъ здѣсь, что Діофантъ умѣлъ также рѣшать только уравненія второй степени и что въ „Ариѳметикахъ“ встрѣчается только одинъ примѣръ рѣшенія уравненія третьей степени. У индусскихъ математиковъ впервые встрѣчаются уравненія, въ которыхъ одна изъ частей состоитъ исключительно изъ однѣхъ отрицательныхъ величинъ.

Въ концѣ пятой главы помѣщены нѣкоторыя приложенія къ Геометріи. Въ числѣ ихъ находится и ариѳметическое доказательство Пиѳагоровой теоремы, если только можно назвать доказательствомъ пріемъ, употребленный въ формѣ изложенной въ сочиненіи Баскары. Методъ индусскаго математика представляетъ поразительную противоположность съ пріемами древнихъ греческихъ геометровъ, у которыхъ доказательства теоремъ являлись какъ строго-логическія слѣдствія ряда заключеній, слѣдующихъ изъ цѣлаго ряда предложеній, основанныхъ и вытекающихъ изъ возможно наименьшаго числа аксіомъ. Въ „Віаганитѣ“ находиться два доказательства пиѳагоровой теоремы. Вмѣсто всякихъ формулъ и вычисленій даны только чертежи, при чемъ отдѣльныя части этихъ фигуръ обозначены числами, такъ какъ теорема дана для частнаго случая. Слово „смотри“, стоящее рядомъ съ фигурой, замѣняетъ собой всѣ толкованія и объясненія. Приведемъ оба доказательства.

Первое. Взятъ прямоугольный треугольникъ ABC, коего гипотенуза AB принята за основаніе и на нее опущенъ изъ вершины прямаго угла перпендикуляръ CD (фиг. 21). Составныя части этого треугольника: AB,

Фиг. 21.





BC, AC, CD, AD и DB приняты соотвѣтственно равными 25, 20, 15, 12,

*) Весьма любопытенъ пріемъ при помощи котораго Баскара рѣшаетъ поименованное уравненіе четвертой степени, онъ говоритъ. „вполнѣ ясно, что если прибавить къ первой части уравненія членъ $400x+1$, то первая часть будетъ имѣть корнемъ x^2-1, но вторая часть уравненія увеличенная на туже величину будетъ $400x+10000$ и не будетъ имѣть корня таквмъ пріемомъ нельзя получить рѣшенія уравненія, а потому необходимо прибѣгнуть къ искусственному пріему. Примѣняя его, прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $4x^2+400x+1$, тогда обѣ части уравненія будутъ имѣть каждая корень, прибавляя эту величину къ первой части она обращается въ x^4+2x^2+1; прибавляя ко второй получимъ $4x^2+400x+10000$, а потому корни будутъ x^2+1 и $2x+100$, дѣлая приведенія, обѣ части обращаются въ x^2-2x и 99; сравнивая ихъ и прибавляя по 1 къ каждой части, корни будутъ $x-1$ и 10; сравнивая снова, наконецъ получимъ $x=11$“.

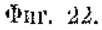
9 и 16; числа эти написаны около этихъ частей. Пиѳагорова теорема является какъ слѣдствіе пропорціональности нѣкоторыхъ изъ этихъ частей между собой. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ треугольникѣ необходимо должны имѣть мѣсто пропорціи:

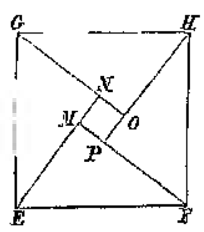
$$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC} \quad \text{и} \quad \frac{CB}{AB}=\frac{DB}{CB}$$

откуда:

$$AB(AD+DB)=AB^2=AC^2+CB^2$$

Второе. Квадратъ $EFHG$, построенный на гипотенузѣ EF прямоугольнаго треугольника EMF, разбить на четыре треугольника EMF, FPH, HOG, GNE и маленькій квадратикъ $MNOP$ (фиг. 22). На частяхъ


Фиг. 22.



EF, MN, EM, MF соотвѣтственно поставлены числа: 25, 5, 15, 20, изъ чего можно заключить, что Баскара справедливость этого предложенія поясняетъ на частномъ случаѣ. Никакихъ поясненій, кромѣ приведенныхъ чиселъ, Баскара недаетъ; онъ довольствуется словомъ „смотри", хотя, съ вѣроятностью можно предположить, что ему была извѣстна формула:

$$EF^2=4.\frac{EM.MF}{2}+(MF-EM)^2=MF^2+EM^2$$

Изъ другихъ предложеній, справедливость которыхъ обнаружена вышеприведеннымъ методомъ на фигурахъ, укажемъ еще на соотношенія:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \quad \text{и} \quad (a+b)^2-4ab=(a-b)^2$$

Въ пятой главѣ „Віаганиты" находиться еще слѣдующее интересное предложеніе, которое напоминаетъ и представляетъ большое сходство съ однимъ изъ вопросовъ, рѣшенныхъ Діофантомъ въ „Поризмахъ". Задача Баскары состоитъ въ слѣдующемъ: „найти четыре числа, которыя будучи увеличины на 2, дали-бы квадраты; взявъ произведенія перваго на второе, перваго на третее и т. д. придавая каждому произведенію по 18, требуется чтобы снова эти числа были квадраты; наконецъ требуется, чтобы сумма корней всѣхъ квадратовъ, увеличенная на 11, равнялась-бы квадрату 13". Полагая четыре числа равными: x^2-2, $(x+a)^2-2$, $(x+b)^2-2$ и $(x+c)^2-2$. Оты-

скивая теперь такія числа a, b и c, чтобы произведенія изъ нихъ по два, сложенныя соотвѣтственно съ 18 составляли бы квадратъ, найдемъ, что

$$a=\sqrt{\frac{18}{2}},\ b=2\sqrt{\frac{18}{2}}\ \text{и}\ c=3\sqrt{\frac{18}{2}}\ \text{или}\ a=3,\ b=6\ \text{и}\ c=9.$$

Изъ полученнаго видно, что искомыя числа должны составлять ариѳметическую прогрессію съ разностью 3.

Глава VI содержитъ уравненія со многими неизвѣстными. Она представляетъ собраніе примѣровъ уравненій опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ первой степени. Рѣшеніе ихъ состоитъ въ томъ, что значенія неизвѣстнаго, опредѣленныя изъ однѣхъ уравненій подставляютъ въ другія. Если число неизвѣстныхъ больше на единицу числа уравненій, то въ концѣ остается одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, которое рѣшается пріемомъ, изложеннымъ во второй главѣ. Если число неизвѣстныхъ еще больше то нѣкоторыя изъ нихъ выбираются произвольными. Изъ числа задачъ этой главы укажемъ на слѣдующія: „Найти два числа такихъ свойствъ, чтобы одно дѣленное на 5, дало въ остаткѣ 1, другое, дѣленное на 6, дало въ остаткѣ 2; разность же обѣихъ чиселъ, дѣленная на 3, должна дать 2, а сумма, дѣленная на 9, должна дать 5 въ остаткѣ; наконецъ произведеніе этихъ чиселъ, дѣленное на 7, должно дать въ остаткѣ 6“. Другой примѣръ: „Найти число, которое будучи раздѣлено на 2, 3 и 5 дало соотвѣтственно въ остаткѣ 1, 2, 3, частныя же должны имѣть тоже свойство“. Большая часть вопросовъ этой главы подобраны весьма удачно и рѣшены съ большимъ умѣніемъ и искусствомъ.

Глава VII занимается рѣшеніемъ неопредѣленныхъ уравненій второй степени. Большая часть вопросовъ этой главы относится къ различнымъ частнымъ случаямъ, а потому глава эта не представляетъ ничего цѣлаго, а просто собраніе отдѣльныхъ правилъ. Первыя правила этой главы показываютъ, какъ выраженія формы ax^2+bx могутъ быть приведены къ раціональной формѣ, или иными словами, какъ можетъ быть найдено рѣшеніе уравненія $ax^2+bx=y^2$ въ цѣлыхъ числахъ. По правилу слѣдуетъ данное уравненіе умножить на $4a$, тогда получимъ $4a^2x^2+4abx=4ay^2$ или $(2ax)^2+2(2abx)=4ay^2$; затѣмъ, прибавляя къ обѣимъ частямъ по b^2, найдемъ: $(2ax+b)^2=4ay^2+b^2$. Если теперь $4ay^2+b^2$ можетъ быть выражено числомъ квадратнымъ z^2, то $2ax+b=z$, а слѣдовательно $x=\frac{z-b}{2a}$. Такъ какъ z могутъ удовлетворять многія значенія, то между ними могутъ быть и такія, которыя выразятъ x числомъ цѣлымъ. Вышеприведеннымъ образомъ можетъ быть рѣшено уравненіе $6x^2+2x=y^2$, которое приводится къ виду $(6x+1)^2=6y^2+1$; одно рѣшеніе дастъ $y=2$, $z=5$, $x=\frac{2}{3}$, другое $y=20$,

$z=49$ и $x=8$ и т. д. Къ подобному уравненію сводится также вопросъ: „найти два числа m и n такія, чтобы $(m+n)^2+(m+n)^3=2(m^3+n^3)$“, который рѣшается положеніями: $m=x+y$ и $n=x-y$, изъ которыхъ вытекаетъ уравненіе $4x^3+4x^2=12xy^2$ или $(2x+1)^2=12y^2+1$. Уравненіе это удовлетворяется рѣшеніями: $y=2$, $x=3$, $m=5$ и $n=1$, или же $y=28$ $x=48$, $m=76$ и $n=28$ и т. д.

Другое правило этой главы относится къ уравненіямъ вида $ax^4-bx^2=y^2$, которыя преобразуются къ формѣ $x^2(ax^2-b)=y^2$. Если теперь ax^2-b можетъ быть выражено числомъ квадратнымъ, то вопросъ рѣшенъ. Къ числу подобныхъ уравненій принадлежитъ уравненіе $5x^4-100x^2=y^2$, а также слѣдующіе вопросы: „найти два числа, которыхъ разность квадратъ, а сумма квадратовъ была-бы кубъ“. Требуемыя числа $m-n=x^2$ и $m^2+n^2=y^3$. Вопросъ рѣшается положеніемъ $y=x^2$ и уравненіе обращается въ $x^4(2x^2-1)=(2m-x^2)^2$, которому удовлетворяетъ $x=5$, откуда слѣдуетъ, что $m=100$, а $n=75$.

Другія правила относятся къ рѣшенію вопросовъ, примѣромъ которыхъ можетъ служить уравненіе $3x^2+6x=y^2+2y$. Другой вопросъ „найти значенія удовлетворяющія одновременно уравненіямъ: $ax^2+by^2=z^2$ и $ax^2-by^2+1=w^2$“. Какъ частный случай подобныхъ классовъ уравненій укажемъ на уравненія: $7x^2+8y^2=z^2$ и $7x^2-8y^2+1=w^2$, одно изъ рѣшеній которыхъ $x=4$ и $y=2$. Укажемъ еще на слѣдующія задачи: „найти условія, чтобы $3x+1$ и $5x+1$ были заразъ квадратами“; „найти условія, чтобы $2(m^2-n^2)+3$ и $3(m^2-n^2)+3$ были заразъ квадратами“.

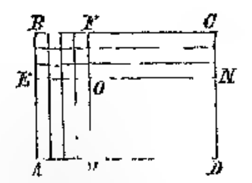
Далѣе слѣдуетъ теорія рѣшенія уравненій вида $ax+b=y^2$, при чемъ задачи являются въ формѣ $\frac{y^2-b}{a}=x$. Также рѣшены уравненія вида $ax+b=y^3$ и $cy^2=ax+b$ или же $\frac{cy^2-b}{a}=x$.

Глава VIII посвящена главнымъ образомъ рѣшенію уравненій вида $ax+by+c=xy$, а также $xyzu=a(x+y+z+u)$, и другихъ подобныхъ имъ. Рѣшеніе подобныхъ уравненій не представляетъ затрудненій и было извѣстно уже Брамагуптѣ, который примѣнялъ ихъ при астрономическихъ вопросахъ. Рѣшенія, данныя Баскарой весьма просты и изящны. Рѣшенія даны въ цѣлыхъ числахъ. Пріемъ, предложенный Баскарой, какъ мы замѣтили выше, былъ снова найденъ Эйлеромъ; онъ состоитъ въ слѣдующемъ: для частнаго случая $ax+by+c=xy$, изъ чиселъ a, b и c нужно составить новое число $ab+c$ и разложить его на два множителя. Если эти множители m и n, то $m+b$ или $n+b$ будутъ значенія x, а $n+a$ и $m+a$ соотвѣтствующія значенія y. Сколько будетъ существовать разложеній для $ab+c$, столько двойныхъ рѣшеній будетъ имѣть уравненіе. Справедливость указаннаго правила была извѣстна уже Брамагуптѣ и другимъ индусскимъ

математикамъ, жившимъ до Баскары. Весьма любопытно наглядное геометрическое объясненіе, данное Баскарой для приведеннаго правила, причемъ онъ замѣчаетъ: „математики назвали Алгеброй вычисленіе при помощи доказательствъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ она не отличалась-бы отъ Ариѳметики". Къ сожалѣнію почти все сочиненіе Баскары противорѣчитъ его же словамъ, такъ какъ за весьма рѣдкими исключеніями можно указать на что нибудь, напоминающее доказательство.

Геометрическое толкованіе Баскары, о которомъ мы говорили, состоитъ въ слѣдующемъ: онъ прилагаетъ его къ частному случаю, именно къ уравненію $4x+3y+2=xy$. Представимъ себѣ прямоугольникъ $ABCD$ (фиг. 23), въ которомъ $AB=x$ и $AD=y$; площадь его выражается произведеніемъ xy, а также состоитъ изъ суммы трехъ частей: $4x$, $3y$ и 2. Отдѣлимъ отъ даннаго прямоугольника част $4x=BM$, какъ указано на фигурѣ, то останется еще часть $3y+2=DF$. Отдѣливъ отъ верхней части фигуры

Фиг. 23.



часть $3y=BN$, то видимъ, что каждому изъ только что отдѣленныхъ уменьшенныхъ прямоугольниковъ недостаетъ по 4 маленькихъ квадратика, а слѣдовательно у всего отдѣленнаго прямоугольника BN ихъ недостаетъ $3.4=12$; такимъ образомъ мы выдѣлили еще часть $3y-12$. Въ остаткѣ получимъ прямоугольникъ $MOND$, состоящій очевидно изъ $12+2=14$. Принимая теперь $MD=1$, то $ND=14$, откуда $x=ND+NC=14+3=17$ и $y=MD+AM=1+4=5$. Или полагая: $MD=14$ и $ND=1$, то $x=1+3=4$ и $y=14+4=18$. Разлагая 14 на 2.7 и принимая $MD=2$ и $ND=7$, то найдемъ $x=7+3=10$ и $y=2+4=6$; или принимая $MD=7$ и $ND=2$, найдемъ $x=2+3=5$ и $y=7+4=11$. Точно такимъ же образомъ разсуждаетъ Баскара если a, b и c имѣютъ разные знаки.

Замѣтимъ здѣсь еще, что для подобныхъ уравненій, какъ вышеприведенное, даетъ рѣшенія уже Брамагупта. Пусть данное уравненіе будетъ $ax+by+c=dxy$. Нужно составить по правилу сумму произведеній $ab+cd$ и раздѣлить ее на произвольно выбранное число; пусть принятый дѣлитель и полученное частное будутъ m и n, тогда по правилу, если m больше n

и a больше b, то $\frac{m+b}{d}$ будетъ значеніе x, а $\frac{n+a}{d}$ значеніе y; если же b больше a, то $x=\frac{n+b}{d}$ и $y=\frac{m+a}{d}$. Точно такое же соотношеніе будетъ если n больше m, только необходимо чтобы всегда большее изъ чиселъ m и n сочеталось съ меньшимъ изъ чиселъ a и b и обратно, тогда значеніе x получается изъ суммы содержащей b, а значеніе y изъ суммы содержащей a. Лучше всего пояснить сказанное на частномъ примѣрѣ: $3x+4y+90=5xy$, тогда $5.90+3.4=462$, число это состоитъ изъ множителей $2.3.7.11$; принимая 11 за дѣлитель, получимъ $\frac{462}{11}=42$, слѣдовательно $m=11$ и $n=42$. Такъ какъ $a=3$ и $b=4$, то $x=\frac{m+b}{d}=\frac{11+4}{5}=3$ и $y=\frac{42+3}{5}=9$; если принять дѣлителемъ 21, то $x=5$, и $y=5$. Не всегда можно получить указаннымъ путемъ цѣлыя значенія для x и y но если подобныя значенія существуютъ, то ихъ всегда возможно отыскать вышеуказаннымъ методомъ. Баскара порицаетъ въ своемъ сочиненіи приведенный пріемъ Брамагупты и считаетъ его излишнимъ; вмѣсто него онъ совѣтуетъ прямо принять одно изъ неизвѣстныхъ произвольнымъ и по нему вычислить другое. Изъ сказаннаго ясно видно, что Баскара не понялъ методъ Брамагупты и не составилъ себѣ о немъ яснаго представленія, а пытался рѣшить вопросъ приближеніями.

Глава IX — послѣдняя, содержитъ краткое заключеніе.

Изъ этого краткаго очерка Алгебры индусовъ видно какого высокаго развитія достигли они въ этой наукѣ, въ этомъ отношеніи они стоятъ несравненно выше Діофанта единственнаго изъ извѣстныхъ намъ греческихъ математиковъ, посвятившихъ себя Алгебрѣ. Символическій пріемъ развитый индусскими математиками, хотя во многихъ отношеніяхъ весьма несовершененъ, но тѣмъ не менѣе превосходитъ пріемъ Діофанта. Самыхъ блестящихъ результатовъ достигли индусскіе математики въ такъ называемомъ неопредѣленномъ анализѣ, который они довели до высокой степени совершенства. Вопросы неопредѣленнаго анализа обязаны своимъ происхожденіемъ у индусовъ ихъ астрономическимъ *) и религіознымъ воззрѣніямъ. Къ подоб-

*) Много интересныхъ данныхъ объ индусской Астрономіи находится въ сочиненіи: *Bailly*, Traité de l'astronomie indienne et orientale. Paris, 1787. in-4. Бальи раздѣляетъ мнѣніе о глубокой древности индусскихъ наукъ. Сочиненіе это есть одно изъ первыхъ, написанныхъ по астрономіи индусовъ. Къ сожалѣнію въ своихъ выводахъ Бальи слишкомъ смѣлъ; объясненія данныя имъ различнымъ цикламъ индусской хронологіи ни на чемъ положительномъ не основаны. Астрономіею и математикою индусовъ также занимался извѣстный

нымъ вопросамъ они пришли вѣроятно при опредѣленіи времени начала эпохи когда земля и нѣкоторыя изъ свѣтилъ находились въ соединеніи. Извѣстно, что вопросъ объ опредѣленіи времени подобнаго соединенія по долготѣ приводится къ рѣшенію системы совмѣстныхъ неопредѣленныхъ уравненій*). Къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій также приводятъ нѣкоторые изъ вопросовъ календаря**). Задачи эти приводятся къ нахожденію неизвѣстнаго цѣлаго числа, по даннымъ остаткамъ, полученнымъ отъ дѣленія этого числа на извѣстныя числа***).

Мы уже выше сказали, что въ большей части случаевъ индусскіе математики съумѣли сдѣлаться чуждыми геометрическихъ представленій, при изслѣдованіи свойствъ чиселъ. Подобныя воззрѣнія на числа имѣлъ также Діофантъ и весьма вѣроятно, что благодаря этому, онъ достигъ такихъ результатовъ въ неопредѣленномъ анализѣ. Но Діофантъ стоитъ несравненно

Деламбръ въ своемъ сочиненіи „*Delambre*, Histoire de l'astronomie ancienne. T. I—II. Paris. 1817. in-4. (см. во II-мъ томѣ отдѣлъ „Astronomie orientale“, Chapitres II, III, V и VI; pag. 400—518, 538—556).

*) На подобное значеніе неопредѣленнаго анализа у индусовъ обращаетъ вниманіе Вепке въ интересномъ мемуарѣ *Woepcke*, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. Paris. 1863 in-8. (pag. 68—70).

**) При каждой изъ священныхъ книгъ индусовъ—Ведъ, приложенъ особенный календарь *Iyotisha*, т. е. Астрономія, въ которомъ указаны правила какъ опредѣлять время различныхъ ведическихъ церемоній, при чемъ приняты во вниманіе солнечные и лунные годы. Календари эти представляютъ особенный интересъ, на нихъ обратилъ еще вниманіе Кольбрукъ, описавшій календарь, приложенный къ *Rig-Veda*, самой древней изъ четырехъ Ведъ. Описаніе одного изъ подобныхъ календарей находится въ статьѣ „*A. Weber*, Ueber den Veda-Kalender, genannt Iyotischam“, помѣщенной въ Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin за 1862 г. Объ этомъ календарѣ мы уже упоминали на стр. 325. Изъ содержанія этихъ календарей можно заключить, что въ древности у индусовъ въ употребленіи былъ лунный годъ, находящійся въ связи съ солнечнымъ годомъ, продолжительность котораго не опредѣлена. Луна во время своего обращенія проходила черезъ 28 *nakshatras*, т. е. тѣ 28 частей неба, на которыя оно было раздѣлено индусами. Каждая изъ этихъ частей опредѣлялась извѣстной звѣздой—*yôgatâras*, положеніе которой было опредѣлено и извѣстно. Вопросъ о *nakshatras*-хъ занималъ многихъ ученыхъ, а въ томъ числѣ Вебера и Біо, послѣдній полагаетъ, что система эта была заимствована индусами у китайцевъ. Долгое время полагали что 28 nakshatras составляли *лунный зодіакъ* индусовъ и были ничто иное какъ особое дѣленіе эклиптики. Кольбрукъ также вначалѣ раздѣлялъ подобный ложный взглядъ на эту систему.

***) Одинъ изъ подобныхъ вопросовъ приведенъ въ сочиненіи *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8. (pag. 196—199). Задача эта имѣетъ предметомъ опредѣленіе положенія, числа обращеній и т. п. свѣтила, на основаніи нѣкоторыхъ данныхъ, часть которыхъ утеряна. Вопросъ этотъ заимствованъ Ганкелемъ изъ XII-й главы Лилавати (§ 2..). При рѣшеніи этого вопроса примѣняется методъ разсѣванія.

ниже индусовъ, такъ какъ онъ ограничился раціональными числами, чего не сдѣлали индусскіе математики. Благодаря такому широкому обобщенію многія изъ предложеній X-й книги „Началъ“ Евклида, которыя представлялись древнимъ греческимъ геометрамъ въ довольно темной формѣ, являются у индусовъ какъ чисто алгебраическія выраженія. Изъ такихъ выраженій укажемъ на слѣдующія находящіяся въ первой главѣ „Виджаганиты“ Васкары:

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}$$

или

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Выраженія эти даны у индусовъ въ числахъ.

Исходя изъ подобныхъ воззрѣній индусскимъ математикамъ было легко приложить Алгебру къ геометрическимъ изслѣдованіямъ, что они и сдѣлали на самомъ дѣлѣ, при чемъ пріемы употребленные ими совершенно схожи съ употребляемыми въ настоящее время. Греческіе математики рѣшали также большую часть вопросовъ, рѣшенныхъ индусскими учеными алгебраически, но методъ ихъ былъ совершенно иной—геометрическій. Многіе изъ такихъ вопросовъ находятся въ „Началахъ“ и „Данныхъ“ Евклида. За то съ другой стороны, гдѣ только дѣло касалось чисто геометрическихъ изслѣдованій, тамъ греческимъ математикамъ безспорно принадлежитъ первое мѣсто, въ подтвержденіе чего достаточно указать на то, что о коническихъ сѣченіяхъ и о ихъ свойствахъ у индусскихъ математиковъ не существуетъ никакого понятія.

Различіе установленное греческими математиками, между числами и количествами, неимѣющее значенія съ научной точки зрѣнія, никогда не было извѣстно индусамъ. Хотя они не обошли трудностей, сопровождающихъ понятія о прерывномъ и непрерывномъ, но они съумѣли перейти отъ разсматриванія первыхъ къ разсматриванію послѣднихъ. Благодаря этому они сдѣлали въ математикѣ значительный шагъ впередъ, результаты котораго очевидны. Если понимать подъ Алгеброй примѣненіе ариѳметическихъ дѣйствій къ составнымъ величинамъ различнаго рода, будутъ-ли онѣ раціональныя или ирраціональныя числа, или же просто величины, то въ такомъ случаѣ можно считать индусскихъ ученыхъ творцами Алгебры*).

*) Въ Средніе Вѣка было распространено мнѣніе, что Алгебру европейскіе математики заимствовали у индусовъ. Такой взглядъ высказанъ также въ математической поэмѣ „De Vetula“, написанной, какъ полагаютъ, въ началѣ XIII в. Объ этомъ сочиненіи мы упоминали въ примѣчаніи на стр. 175—176.

Въ заключеніе этой главы скажемъ еще нѣсколько словъ объ Ариѳметикѣ и Тригонометріи индусовъ. Коснемся сначала Тригонометріи *).

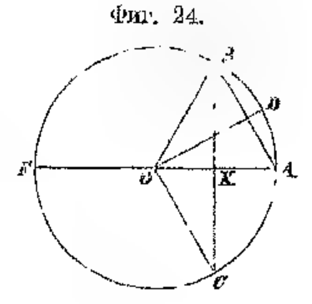
Индусскіе математики, подобно греческимъ, пользовались кругомъ для измѣренія угловъ. Окружность они дѣлили на 360°, а каждый градусъ на 60 минутъ. Подобное дѣленіе было ими заимствовано вѣроятно у халдеевъ, или же у грековъ. При такомъ дѣленіи окружность заключала 21600 минутъ. Извѣстно, что греческіе математики дѣлили также радіусъ на 60 равныхъ частей, изъ которыхъ каждая снова дѣлилась на 60 частей. Длину окружности они стремились выразить въ частяхъ радіуса, т. е. они *выпрямляли* окружность. Индусскіе же математики рѣшали тотъ же вопросъ въ обратномъ смыслѣ, т. е. они занимались *скривленіемъ* прямой линіи и опредѣляли число минутъ заключающихся въ скривленномъ радіусѣ **), иными словами они пытались выразить длину радіуса въ единицахъ длины окружности. Длину радіуса индусскіе математики полагали равной 3438 минутамъ. Выраженіе это было вѣроятно найдено вставляя въ формулу $2\pi r = 21600$ минутамъ вмѣсто π его значеніе $\pi = 3{,}1416$, которое, какъ мы замѣтили выше, было извѣстно еще Аріабгаттѣ. Дѣлая подстановку, находимъ:

$$r = \frac{21600}{6.2832} = 3437.7$$

которое весьма мало разнится отъ $r = 3438$. Кромѣ того кругъ дѣлился двумя взаимно-перпендикулярными діаметрами на четыре квадранта, по 90° въ каждомъ. Независимо отъ этого квадрантъ былъ раздѣленъ на 24 части, по $3°45' = 225'$ въ каждомъ. Индусскіе математики при вычисленіи угловъ пользовались не цѣлыми хордами, подобно греческимъ геометрамъ, а только полухордами.

Изъ тригонометрическихъ функцій были извѣстны индусскимъ математикамъ синусъ, синусъ версусъ и косинусъ. Хорду стягивающую дугу на-

Фиг. 24.



зывали *jyâ* или *jîva*, т. е. тетива лука. Половина хорды носила названіе

*) Тригонометріей индусовъ занимался также Вепке въ своей статьѣ: „*Woepcke*, Sur le mot *kardaga* et sur une méthode indienne pour calculer les sinus", которая помѣщена въ „Nouvelles Annales de Mathématiques". T. XIII, 1854.

**) Канторъ выражаетъ это терминомъ: *Arcufication* der graden Linie.

jyârdha или *ardhajyâ*. Принимая BC за хорду, а BK за полухорду (фиг. 24) мы видимъ, что линія BK есть ничто иное какъ Sinus. Изъ другихъ тригонометрическихъ функцій были извѣстны еще Sin. vers, т. е. линія KA, которую они называли *стрѣла (utkramajyâ)* и Cosinus (*kotijyâ*) — OK.

Изъ соотношеній, существующихъ между тригонометрическими величинами, были извѣстны слѣдующія: называя черезъ x уголъ BOA и примѣняя пиѳагорову теорему къ прямоугольному треугольнику BOA легко было найти выраженіе:

$$(\mathrm{Sin}\, x)^2 + (\mathrm{Cos}\, x)^2 = r^2 = (3438)^2$$

Такъ какъ хорда дуги въ 60° равна радіусу круга или 3438 минутамъ, то ея половина очевидно была равна 1719 минутамъ, т. е. $\mathrm{Sin}\, 30^0 = \frac{r}{2} = 1719$. Зная это легко можно было найти выраженіе для синуса половины угла, именно, примѣняя пиѳагорову теорему къ прямоугольному треугольнику KBA находимъ:

$$\left(2\, \mathrm{Sin}\, \frac{x}{2}\right)^2 = (\mathrm{Sin}\, x)^2 + (\mathrm{Sin.\, vers.}\, x)^2$$

но, замѣчая, что:

$$\mathrm{Sin.\, vers.}\, x = r - \mathrm{Cos}\, x$$

и

$$\mathrm{Sin}\, x^2 + \mathrm{Cos}\, x^2 = r^2$$

найдемъ:

$$\left(2\, \mathrm{Sin}\, \frac{x}{2}\right)^2 = 2r^2 - 2r\, \mathrm{Cos}\, x$$

откуда:

$$\mathrm{Sin}\, \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{r}{2}(r - \mathrm{Cos}\, x)} = \sqrt{1719\,(3438 - \mathrm{Cos}\, x)}$$

Весьма вѣроятно, что на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, была составлена таблица синусовъ, находящаяся въ „Сурья Сиддхантѣ“, о которой мы имѣли уже случай говорить (см. стр. 394). Изъ приведенной формулы легко можно найти:

$$\mathrm{Sin}\, 15^0 = 890'$$

$$\mathrm{Sin}\, 7^0 30' = 449'$$

$$\mathrm{Sin}\, 3^0 45' = 225'$$

замѣтимъ, что при послѣдовательномъ раздѣленіи дуги пополамъ синусы все болѣе и болѣе приближаются къ дугѣ, и наконецъ при 3°45′ синусъ совпадаетъ съ самой дугой и равенъ самъ 225′. Такимъ образомъ мы видимъ, что ограничиваясь приближеніемъ точно до 1′ можно принимать, что при углѣ $x \leqq 225'$ существуетъ всегда равенство $\mathrm{Sin}\, x = x$. Изъ вышесказаннаго

ясно, почему дуга въ 3°45′ легла въ основаніи таблицы синусовъ „Суріи Сидганты“. Дуга эта составляетъ 96-ю часть окружности и носила особое названіе *kramajya*, т. е. *прямой синусъ* *); этимъ же терминомъ называли и самый синусъ дуги въ 225′ Дуга въ 3°45′ была принята за *единицу мѣры* окружности, какъ это видно изъ приведенной выше таблицы „Суріи-Сидганты“, которая составлена для угловъ отъ 3°45′ до 90° и заключаетъ 24 послѣдовательныхъ значенія угловъ возрастающихъ отъ 3°45′ до 3°45′ **).

Справедливо-ли такое воззрѣніе на происхожденіе таблицъ синусовъ индусовъ нельзя сказать утвердительно, за недостаткомъ указаній по этому предмету. Весьма можетъ быть, что имѣло мѣсто и противное, т. е. что первоначально было принято, что $\sin\frac{360^0}{96}=\frac{360^0}{96}$, а затѣмъ уже были отысканы и другіе синусы. При этомъ считаемъ нелишнимъ замѣтить, что исходя изъ подобныхъ же соображеній, Архимедомъ было найдено соотношеніе между окружностью и діаметромъ, въ видѣ $\pi=\frac{22}{7}$, принявъ, что площадь 96-ти-угольника совпадаетъ съ площадью описаннаго около него круга.

По мнѣнію Арнета, много занимавшагося вопросомъ о математикѣ

*) Термины *cardadja*, *cardagia*, *cardaga* встрѣчаются весьма часто въ различныхъ сочиненіяхъ, написанныхъ по латыни въ Средніе Вѣка; термины эти употребляются въ смыслѣ *синуса* и суть ничто иное какъ видоизмѣненное санскритское *kramajya*.

**) Таблица синусовъ и ихъ первыхъ разностей, находящаяся въ „Суріѣ-Сидгантѣ“, заимствованная потомъ Аріабгаттой изъ этого сочиненія и включенныя имъ въ X-е правило первой главы „Аріабгаттіама“ имѣетъ слѣдующій составъ:

Дуги	Синусы	Разности	Дуги	Синусы	Разности	Дуги	Синусы	Разности
0	0	225′	8	1719′	191′	16	2978′	106′
1	225′	224′	9	1910′	183′	17	3084′	93′
2	449′	222′	10	2093′	174′	18	3177′	79′
3	671′	219′	11	2267′	164′	19	3256′	65′
4	890′	215′	12	2431	154′	20	3321′	51′
5	1105′	210′	13	2585′	143′	21	3372′	37′
6	1315′	205′	14	2728′	131′	22	3409′	22′
7	1520′	199′	15	2859′	119′	23	3431′	7′
8	1719′		16	2978′		24	3438′	

индусовъ, таблицы синусовъ возникли слѣдующимъ образомъ. Зная соотношенія между частями треугольника, выражаемыя формулами:

$$\mathrm{Sin}^2 x + \mathrm{Cos}^2 x = 1 \qquad 1 - \mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Sin\ vers}\, x$$

$$\mathrm{Sin}\,(90^0 - x) = \mathrm{Cos}\, x \qquad \mathrm{Sin\ vers}\, 2x = 2\mathrm{Sin}^2 x$$

первоначально были найдены $\mathrm{Sin}\, 30^0 = \frac{1}{2}$ и $\mathrm{Sin}\, 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а затѣмъ синусы 15^0, $7^0 30'$, $3^0 45'$, $22^0 30'$, $11^0 15'$. Найдя эти величины вычислялись синусы дополнительныхъ угловъ 60^0, 75^0, $82^0 30'$, $86^0 15'$, $67^0 30'$, $78^0 45'$. Имѣя эти величины послѣдовательнымъ дѣленіемъ пополамъ находили синусы 3[illegible]0', $41^0 15'$, $33^0 45'$, коихъ дополненіями будутъ $52^0 30'$, $48^0 45'$, $56^0 15'$. Дѣля синусъ $52^0 30'$ пополамъ находили синусъ $26^0 15'$, а затѣмъ синусъ $63^0 45'$; дѣля пополамъ синусъ $37^0 30'$ находили синусъ $18^0 45'$ и синусъ дополнительнаго угла $71^0 15'$. Такимъ образомъ возникла таблица синусовъ, въ которой углы возрастаютъ отъ $3^0 45'$ до $3^0 45'$. Предѣльными значеніями синусовъ въ этой таблицѣ были $\mathrm{Sin}\, 3^0 45' = 225'$ и $\mathrm{Sin}\, 90^0 = 3438'$.

Въ указанной нами таблицѣ „Сурія-Сидганты" синусы выражены въ видѣ трехзначныхъ или четырехзначныхъ цѣлыхъ чиселъ. Имѣя подобную таблицу индусскими математиками, по мнѣнію Ганкеля, была найдена эмпирически формула

$$\mathrm{Sin}\, c - \mathrm{Sin}\, b = (\mathrm{Sin}\, b - \mathrm{Sin}\, a) - \frac{\mathrm{Sin}\, b}{225}$$

въ которой a, b и c представляютъ три послѣдовательно возрастающихъ величины, разность d между которыми равна $225'$. Выраженіе это въ примѣненіи къ настоящему случаю будетъ:

$$\mathrm{Sin}\,[(n+1).225'] - \mathrm{Sin}\,(n.225') = \mathrm{Sin}\,(n.225') - \mathrm{Sin}\,[(n-1).225'] - \frac{\mathrm{Sin}\,(n.225')}{225}$$

Зная подобную интерполяціонную формулу индусы могли всегда составить выше приведенную таблицу синусовъ, въ случаѣ если-бы она затерялась. Въ дѣйствительности такая интерполяціонная формула существуетъ, съ тою только разницею, что при $\mathrm{Sin}\, b$ множитель $\frac{1}{225}$ замѣненъ множителемъ $2\,\mathrm{Sin\ vers}\, d = \frac{1}{233.5}$, который впрочемъ оказываетъ весьма незначительное вліяніе на составъ таблицы, въ указанныхъ выше предѣлахъ.

Были также попытки составить болѣе точныя таблицы. Васкара выражаетъ синусы и косинусы въ частяхъ радіуса круга, именно онъ находитъ:

$$\mathrm{Sin}\, 3^0 45' = \frac{100}{1529} \quad , \quad \mathrm{Cos}\, 3^0 45' = \frac{466}{467}$$

$$\mathrm{Sin}\, 1^0 = \frac{10}{573} \quad , \quad \mathrm{Cos}\, 1^0 = \frac{6568}{6569}$$

Числа полученныя въ верхней строкѣ рознятся немного болѣе одной десятимилліонной части радіуса отъ истинныхъ значеній. Числа второй строки рознятся на нѣсколько десятимилліонныхъ отъ настоящихъ величинъ. Результаты, полученные Баскарой, въ значительной степени превосходятъ значенія, вычисленныя Птоломеемъ въ „Альмагестѣ". На это слѣдуетъ обратить особенное вниманіе*). Таблица синусовъ составленная Баскарой дана для угловъ возрастающихъ отъ 1^0 до 1^0. Таблицу эту Баскара строитъ при помощи формулы:

$$\operatorname{Sin}(x \pm y) = \operatorname{Sin} x . \operatorname{Cos} y \pm \operatorname{Cos} x . \operatorname{Sin} y$$

По предположеніямъ Кантора выраженіе, представляющее зависимость между: хордою, окружностью, дугою и діаметромъ, о которомъ мы упоминали выше (см. стр. 419) находиться въ зависимости отъ таблицы синусовъ, данной Баскарой.

При астрономическихъ вычисленіяхъ индусы пользовались также иногда сферическими треугольниками, но только прямоугольными. Изъ формулъ Сферической Тригонометріи имъ было извѣстно соотношеніе:

$$\operatorname{Sin} h \operatorname{Sin} d = \operatorname{Sin} a$$

Въ большей части случаевъ сферическіе треугольники индусы старались замѣнить плоскими, которые они всегда разбивали на прямоугольные. Другихъ выраженій, представляющихъ зависимость между частями сферическаго треугольника, на сколько извѣстно въ настоящее время, индусы не знали.

---

*) Отъ индусовъ таблицы синусовъ перешли къ арабамъ, которые многія изъ своихъ познаній въ математическихъ наукахъ заимствовали изъ индусскихъ сочиненій. Одинъ изъ арабскихъ писателей Ибнъ-Аладами (Ibn-Aladami, около 900 г.) въ своемъ сочиненіи „Ожерелье изъ жемчуга" говоритъ, что къ халифу Альмансору (около 773 г.) пришелъ изъ Индостана ученый, весьма свѣдущій въ вычисленіяхъ, извѣстныхъ подъ именемъ *Сидгинтъ*, относящихся къ движенію свѣтилъ. Лицо это было знакомо съ методами вычисленія уравненій, основанными на *cardadja*, т. е. синусахъ, вычисленныхъ отъ полу-градуса до полу-градуса. Также были ему извѣстны пріемы для вычисленія солнечныхъ и лунныхъ затмѣній и многое другое. Все вышеупомянутое было изложено въ сочиненіи, которое по словамъ индусскаго ученаго, онъ заимствовалъ изъ сочиненія о синусахъ, носящаго названіе одного изъ царей. Есть основаніе предполагать, что сочиненіе о которомъ упоминаетъ арабскій ученый есть ничто иное какъ сочиненіе Брамагупты „Брама-Спута-Сидганта". Кольбрукъ первый высказалъ предположеніе, что астрономическая система, извѣстная у арабовъ подъ именемъ „Сидгинты", есть система, изложенная въ сочинени Брамагупты. Такое мнѣніе вполнѣ вѣроятно, такъ какъ Альбируни въ XIV-й главѣ своего сочиненія объ Индостанѣ даетъ подробное содержаніе всѣхъ главъ „Брама-Спуты-Сидганты".

Отдѣльныхъ сочиненій и главъ тригонометрическаго содержанія въ индусскихъ сочиненіяхъ нѣтъ, все извѣстное до настоящаго времени по этому вопросу заимствовано изъ извѣстныхъ намъ сочиненій астрономическаго и математическаго содержанія.

Перейдемъ теперь къ Ариѳметикѣ индусовъ *). У индусскихъ математиковъ существовало нѣсколько способовъ изображать числа **). Изъ всѣхъ си-

---

*) Изобрѣтеніе, такъ называемыхъ, арабскихъ цифръ многіе писатели приписываютъ индусамъ. Мы уже выше (см. стр. 199) привели мнѣніе Фибоначчи по этому вопросу. Одно изъ самыхъ раннихъ указаній на цифры находится въ одной еврейской рукописи, написанной около 960 г. въ сѣверной Африкѣ. Рукопись эта есть комментарій Абу-Сала-бенъ-Тамима (Abou-Sahl-ben-Tamim) на извѣстное сочиненіе кабалистическаго содержанія, написанное Sepher Jecira. Рукопись эта хранится въ настоящее время въ одной изъ парижскихъ библіотекъ. Въ этой рукописи говорится, что „индусы нашли девять знаковъ для изображенія единицъ".

Болѣе подробныя указанія находятся въ сочиненіи византійскаго монаха *Максима Плануда*, о которомъ мы уже говорили (см. стр. 165). Въ своемъ сочиненіи „Счетъ марками по методу индусовъ (ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς)" Планудъ говоритъ: „Такъ какъ число заключаетъ безконечное, познаніе же безконечнаго невозможно, то первоклассные мыслители между астрономами нашли методъ, при помощи котораго можно числа при вычисленіяхъ представить болѣе наглядно и точно. Такихъ знаковъ существуетъ только девять и они слѣдующіе: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Къ нимъ прибавляютъ еще одинъ знакъ, который называютъ *tziphra* и который у индусовъ представляетъ отсутствіе чего либо. Поименованные девять знаковъ получили начало у индусовъ. Знакъ tziphra изображаютъ слѣдующимъ образомъ ○" Знаки цифръ, приведенные въ сочиненіи Плануда весьма мало напоминаютъ наши цифры; сходство представляютъ только знаки 1, 9 и 0.

Изъ приведенныхъ словъ Максима Плануда можно заключить, что онъ первый познакомилъ византійцевъ съ такъ называемыми арабскими цифрами. Въ Западной Европѣ онѣ были извѣстны почти 200 лѣтъ ранѣе и были окончательно введены такъ называемыми альгоритмистами (см. стр. 198) въ Испаніи, Франціи, Англіи и Германіи, которые уже въ началѣ XIII в. вытѣснили сторонниковъ абакуса — абацистовъ.

Сочиненіе Максима Плануда было издано въ греческомъ текстѣ подъ заглавіемъ „*Planudes*, Rechenbuch, Griech. n. d. HS. hrsg. v C. J. Gerhardt. Halle 1865. in-4". Нѣмецкій переводъ былъ изданъ недавно подъ заглавіемъ: „*Planudes*, Rechenbuch. Uebers. v. H. Waeschke. Halle, 1878. in-8".

**) Отличительная особенность различныхъ индусскихъ сочиненій, не только космогоническаго, но также философскаго и религіознаго содержанія, та, что гдѣ только возможно авторы ихъ вводятъ громадныя числа, которыя на европейскаго читателя производятъ подавляющее впечатлѣніе по своей необъятности. Существуютъ цѣлыя системы счисленій, гдѣ числа дѣлятся на классы, которыми выражаются единицы высшаго наименованія. Изъ такихъ системъ укажемъ на систему, находящуюся въ Магабгаратѣ, гдѣ она примѣняется при перечисленіи богатствъ Joudhichthira. Также интересна система, примѣненная въ Рамаянѣ, при перечисленіи числа обезьянъ, составляющихъ армію Сугрива. Изъ подобныхъ системъ, находящихся въ сочиненіяхъ религіознаго содержанія особенное вниманіе обращаютъ на

стемъ, особеннаго вниманія заслуживаетъ *символическая* система, въ которой числа обязаны своимъ наименованіемъ названію того предмета, котораго количество онѣ выражаютъ. Всего лучше пояснить это на примѣрахъ. Такъ напр. число 1 обозначали названіями предметовъ встрѣчающихся только въ единственномъ числѣ, какъ напр.: *солнце*, *луна*, *начало*, *Брама*, *форма*. Число 2 выражали названіями: *глаза*, *руки*, *уши*, *ноги*. Число 4 — словами *Веды* (такъ какъ существуетъ четыре священныя книги Ведъ), *океаны*, *страны свѣта* и т. д. Число 32—названіемъ *зубы* и т. д. Такъ какъ при такомъ способѣ выражать числа существовало множество синонимовъ, то для выраженія различныхъ чиселъ существовало множество комбинацій. При такомъ способѣ выражать числа, можно бы сравнительно легко обле-

себя числа, встрѣчающіяся въ одной изъ священныхъ книгъ буддистовъ „*Lalitavistara*", въ которой приведена біографія одного святаго. Въ этомъ сочиненіи говориться о сотняхъ тысячъ милліоновъ святыхъ; украшенія трона Буды составляютъ сотни тысячъ предметовъ; сотни тысячъ божествъ и сто тысячъ милліоновъ Бодисатвасовъ восхваляютъ тронъ Буды, который есть произведеніе заслугъ, скопившихся въ теченіи ста тысячъ милліоновъ *kalpas* (kalpa — 4 320 000 000 лѣтъ), большой лотосъ, который расцвѣтаетъ въ ночь зачатія Буды, покрываетъ собою пространство въ 68 милліоновъ yôdjanas). Въ этомъ же сочиненіи говориться о числахъ, выраженныхъ единицей сопровождаемой 421 нулемъ. Основной единицей высшаго наименованія этой системы есть *tallakchana*, т. е. единица, сопровождаемая 53 нулями.

Въ „Лалитавистарѣ" изложена слѣдующая система мѣръ протяженій, которая положительно напоминаетъ пріемъ, употребленный Архимедомъ, въ сочиненіи „О числѣ песчинокъ", для выраженія большихъ чиселъ. Эта интересная система состоитъ въ слѣдующемъ:

1 весьма малая пылинка	= 7 пылинкамъ первоначальныхъ атомовъ.
1 малая пылинка	= 7 весьма малымъ пылинкамъ.
1 пылинка поднятая вѣтромъ	= 7 пылинкамъ.
1 пылинка зайца (поднятая)	= 7 пылинкамъ, поднятымъ вѣтромъ.
1 пылинка барана	= 7 пылинкамъ зайца
1 пылинка быка	= 7 пылинкамъ барана.
1 зерно мака	= 7 пылинкамъ быка.
1 зерно горчицы	= 7 зернамъ мака.
1 зерно ячменя	= 7 зернамъ горчицы.
1 суставъ пальца	= 7 зернамъ ячменя.
1 пядень	= 12 суставамъ.
1 локоть	= 4 пядямъ.
1 дуга	= 4 локтямъ.
1 krôça страны Магада	= 1000 дугамъ.
1 yôdjana	= 4 krôças.

По мнѣнію Вепке, Архимедъ заимствовалъ свою систему изъ вышеупомянутаго сочиненія. Справедливо-ли такое мнѣніе это вопросъ спорный, но во всякомъ случаѣ нельзя не обратить вниманія на то обстоятельство что „Лалитавистара" была написана въ III в. до Р. Х., т. е. именно въ то время когда жилъ Архимедъ (287—212 до Р. Х.).

вать числа и дѣйствія надъ ними въ форму самыхъ замысловатыхъ стиховъ со всевозможными остроумными изрѣченіями. Еще въ настоящее время составленіе подобныхъ изрѣченій, по словамъ Гумбольда, весьма распространено на островѣ Явѣ. Какое множество синонимовъ существовало для выраженія одного и того же числа, можно видѣть изъ словъ Брокгауза, который говоритъ, что для выраженія чиселъ 1 и 2, существовало болѣе 300 именъ, для каждаго *).

Подобная система выраженія чиселъ находиться въ древнѣйшемъ астрономическомъ сочиненіи индусовъ „Сурiѣ-Сидгантѣ", изъ чего можно заключить, что она весьма древняя. Система эта имѣла важное значеніе для индусскихъ ученыхъ, которые всѣ свои сочиненія излагали въ стихотворной формѣ. Въ такой формѣ написаны сочиненія Аріабгатты, Брамагупты и др. математиковъ. Баскара-же ограничивается тѣмъ, что въ стихотворной формѣ излагаетъ только вопросы и правила; поясненія онъ дѣлаетъ въ прозѣ, при чемъ все таки облекаетъ свои мысли въ поэтическія представленія. Излагая содержаніе сочиненій Брамагупты и Баскары мы привели нѣкоторые изъ примѣровъ, рѣшенныхъ въ этихъ сочиненіяхъ и обратили вниманіе на поэтическую ихъ форму. Подобный способъ изложенія и представленія былъ вполнѣ въ духѣ индусовъ, у которыхъ поэзія достигла высокой степени своего развитія **). Предлагать задачи въ стихотворной формѣ отъ индусовъ вѣроятно перешло на Западъ. Съ вѣроятностью можно предположить, что греческія эпиграммы, встрѣчающіяся въ „Ариѳметикахъ" Діофанта, были заимствованы греками у индусовъ. Впослѣдствіи времени, форма эта стала весьма распространенною на всемъ Западѣ, въ особенности она встрѣчается въ старыхъ германскихъ задачникахъ XVI, XVII и XVIII столѣтій; но только нѣмцы поэтическихъ лотосовъ индусовъ вездѣ замѣнили трактирны-

---

*) См. Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philolog. Histor'ch. Klasse IV. 1852.

**) Много интересныхъ данныхъ, относящихся къ индусской наукѣ вообще можно найти въ интересномъ мемуарѣ *Рено*: Mémoire geographique, historique et scientifique sur l'Inde, antérieurement au milieu du XI-e siècle de l'ère chrétienne, d'après les écrivains arabes, persans et chinois; par *M. Reinaud*. Сочиненіе это помѣщено: въ Mémoires de l'Institut National de France. Académie des Inscriptions et Belles-lettres, T. XVIII, Paris, 1849 in-4.

Въ послѣднее время стали много заниматься санскритской литературой, появились даже цѣлые многотомные сборники, какъ напр. „Indische Studien", издаваемыя *Weber*'омъ. Въ особенности много обязана своимъ развитіемъ санскритская литература Азіатскому Обществу въ Калькуттѣ, основанному въ 1784 г. Однимъ изъ первыхъ членовъ этого общества былъ извѣстный *Джонсъ* (Sir William Jones), посвятившій себя изученію санскритской литературы. Занимаясь въ школѣ браминовъ въ Бенаресѣ, онъ познакомился съ извѣстной поэмой Калидасы „Сакунтала", которую онъ перевелъ сначала на латинскій языкъ, а потомъ и на англійскій.

ми счетами, за выпитое вино и пиво. Изъ Германіи стихотворная форма при изложеніи математическихъ сочиненій перешла также въ Россію. Извѣстно нѣсколько математическихъ сочиненій, составленныхъ въ прошломъ столѣтіи, которыя написаны стихами, въ томъ числѣ упомянемъ извѣстную „Ариѳметику“ Магницкаго, въ которой всѣ правила изложены стихами.

Изъ другихъ системъ изображенія чиселъ укажемъ еще систему, примѣняемую Аріабгаттой, который всѣ числа отъ 1 до 25 выражаетъ первыми 25-ю согласными санскритскаго альфавита; остальныя 8 согласныхъ служатъ для выраженія 30, 40, ... 90, 100. Для выраженія чиселъ большихъ 100 служили гласныя, которыя приставлялись къ соотвѣтствующей согласной, смотря по ея значенію. Гласныя эти выражали первыя девять степеней числа 10. Изслѣдованія Роде относительно системы, принятой Аріабгаттой, показали, что Аріабгаттѣ была извѣстна *ариѳметика положенія*, т. е. что наименованіе числа зависѣло отъ мѣста, которое оно занимаетъ въ ряду другихъ чиселъ. Самъ Аріабгатта часто говоритъ о *мѣстѣ* *(sthâna)* числа. Также извѣстенъ былъ ему *нуль (kha)* *). Подобная система обозначенія чиселъ, какъ у Аріабгатты, встрѣчается еще въ настоящее время въ Деканѣ.

Также занимались много индусскіе математики магическими квадратами, къ сожалѣнію нѣтъ положительныхъ указаній на изслѣдованія ихъ въ этой области **). Какъ на одно изъ приложеній магическихъ квадратовъ нѣкоторые писатели указываютъ на игру въ шахматы ***).

---

*) Также существовало другое названіе для нуля, именно *пустота—сûnya*. Въ „Сурія-Сидгантѣ“ нуль выражаютъ терминами: *атмосфера*, *воздухъ*, *пространство—vyoma*, *vyat* и *ambara*.

**) Относительно происхожденія магическихъ квадратовъ нѣтъ положительныхъ указаній, хотя нѣкоторые ученые говорятъ, что свое начало они получили въ Индостанѣ. Справедливо-ли это нельзя сказать утвердительно, но во всякомъ случаѣ извѣстно, что индусы много и съ успѣхомъ занимались магическими квадратами, на что обратилъ вниманіе еще извѣстный путешественникъ Лалуберъ въ своемъ сочиненіи *La Loubère*, Du Royaume de Siam. T. II. Amsterdam. 1691. Вопросъ о магическихъ квадратахъ исторически разобранъ въ сочиненіи: *S. Günther*, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1876. in-8, въ статьѣ „Historische Studien über die magischen Quadrate“.

Въ концѣ XVII в. Лагиромъ была отыскана въ одной изъ парижскихъ библіотекъ греческая рукопись, въ которой трактуется объ магическихъ квадратахъ. Авторъ этой рукописи византійскій грекъ *Москопулосъ* (Moschopulus). Время когда онъ жилъ неизвѣстно, полагаютъ что въ XV в. Содержаніемъ этой рукописи занимался также Гюнтеръ, издавшій ея текстъ въ своей статьѣ

***) Относительно игры въ шахматы извѣстно, что она была изобрѣтена еще въ глубокой древности, такъ какъ о ней говорится въ Рамаянѣ. Индусы игру эту называли tchatur-

Не входя въ дальнѣйшее разсмотрѣніе ариѳметическихъ методовъ индусовъ упомянемъ только, что имъ были извѣстны четыре основныя дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, а также извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней, которые они производили съ большимъ искусствомъ и умѣніемъ. Методы ихъ мало чѣмъ разнятся отъ употребляемыхъ нынѣ. Мы на это уже указали говоря о сочиненіяхъ Баскары. Также основательно были знакомы индусскіе математики съ цѣлымъ рядомъ вопросовъ практической ариѳметики, каковы: правило смѣшенія, правило пробы, правила товарищества, правила процентовъ и правила трехъ, пяти и т. д. членовъ, или тройныя правила.

---

anga, т. е. четыре арміи. Названіе это вѣроятно дано было потому что индусскія арміи состояли изъ четырехъ главныхъ родовъ войскъ, именно: колесницъ, слоновъ, пѣхоты и кавалеріи. Впослѣдствіи съ игрой этой познакомились арабы, у которыхъ она называлась schatrandj. Отъ арабовъ она перешла къ европейцамъ.

Относительно изобрѣтенія игры въ шахматы у индусовъ существуетъ слѣдующее преданіе: за 400 л. до Р. Х. жилъ царь Scheehram, для котораго браминъ Sissa изобрѣлъ игру въ шахматы. Игра эта очень понравилась царю, который спросилъ изобрѣтателя, что онъ желаетъ получить въ награду за свою выдумку. Браминъ отвѣтилъ: я хочу столько зеренъ пшеницы, сколько получиться если положивъ на первую клѣтку шахматной доски два зерна, постоянно будемъ удваивать это число, иными словами онъ пожелалъ получить $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{64}$ зеренъ. Царь сначала согласился, но вскорѣ увидѣлъ, что требованіе брамина неисполнимо. Число зеренъ полученное такимъ образомъ равняется 18000000000000000000 или же это составляетъ 15 милліоновъ кубич. футовъ пшеницы.

У Римлянъ также существовала игра, напоминающая шахматы это — ludus latrunculorum. Игру эту они заимствовали въ Азіи во время своихъ походовъ. Съ игрой этой были знакомы китайцы. Извѣстно, что въ эту игру играли Киръ, Тамерланъ и др.

Арабы.

Исторія развитія математическихъ наукъ у арабовъ есть одинъ изъ самыхъ занимательныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ темныхъ вопросовъ въ исторіи развитія точныхъ наукъ вообще. Не смотря на то, что до насъ дошло множество сочиненій, написанныхъ арабами по различнымъ частямъ математики, но изъ числа этихъ сочиненій разобраны только весьма немногія *). Причина этого безъ сомнѣнія та, что весьма мало есть ученыхъ занимающихся изученіемъ сочиненій, написанныхъ арабами, и вмѣстѣ съ тѣмъ основательно знакомыхъ съ математикой. Изученіе арабскихъ математическихъ сочиненій представляетъ особенный интересъ, такъ какъ многое было у нихъ заимствовано европейцами.

---

*) Много указаній, относительно математическихъ сочиненій, написанныхъ арабскими учеными, можно найти въ слѣдующихъ сочиненіяхъ.

Abul-Pharajio; Historia compendiosa dynastiarum aut. Gregorio Ab.-Ph., arab. ed. et lat. versa ab Eduardo Pocockio. Oxoniae. 1663. in-4.

Mich. Casiri, Bibliotheca arabico-hispana escurialensis sive librorum omnium mss. quos arabice compositos biblio. escurialensis complectitur, recensio et explanatio. Matriti. 1760—70. T. I—II. in-fol.

Flügel, Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum a Mustafa ben Abdallah, Katib Jelebi dicto et nomine Haji Khalfa celebrato compositum. T. I—VII. 1835—58. Leipzig. in-4. Сочиненіе это содержитъ заглавія множества сочиненій, написанныхъ арабами; въ VII-мъ томѣ перечислено до 10000 именъ авторовъ.

Также множество указаній на литературу арабовъ можно найти въ изданной Флюгелемъ энциклопедіи „Kitab Fihrist al ulum". Leipzig 1871—72; къ сожалѣнію сочиненіе это издано только въ арабскомъ текстѣ.

Множество указаній на сочиненія, написанныя арабскими учеными, можно найти въ обширномъ сочиненіи *Hammer-Purgstall*, Literaturgeschichte der Araber. Von ihrem Beginne bis zu Ende des zwölften Jahrhunderts der Hidschret. Bd. I—VII. Wien. 1850—56. in-4. Въ сочиненіи этомъ перечислены заглавія и имена авторовъ многихъ сочиненій, написанныхъ арабами, по различнымъ отраслямъ человѣческихъ знаній. Указанія на сочиненія астрономическаго и вообще математическаго содержанія находятся въ Т. III pag. 252—269, T. IV pag. 306—321, T. V pag. 303—326, T. VI pag. 421—437, T. VII pag. 461—472.

Познанія свои въ наукахъ арабы заимствовали съ одной стороны у грековъ, съ другой у индусовъ, а затѣмъ въ свою очередь передали многое Западу, такъ какъ извѣстно, что арабы изученію математическихъ наукъ придавали особенное значеніе. Только основательное и всестороннее изученіе оставшихся письменныхъ памятниковъ можетъ указать намъ, что было заимствовано арабами у индусовъ и грековъ, что было сдѣлано ими самостоятельно и тѣ методы и пріемы, которые они примѣняли при изслѣдованіи различныхъ вопросовъ. Весьма важно было-бы знать то состояніе математическихъ наукъ у *арабовъ*, въ какомъ съ ними познакомились математики Запада. Къ сожалѣнію относительно этого вопроса до настоящаго времени несуществуетъ положительныхъ указаній, въ виду малаго знакомства съ сохранившимися сочиненіями, математическаго содержанія, написанными арабами.

Первое знакомство арабовъ съ математическими и естественными науками *) начинается съ VIII в., благодаря христіанскимъ ученымъ изъ Сиріи, занимавшимъ мѣста врачей при калифахъ и пользовавшихся большимъ почетомъ **). Ученые эти были несторіане, получившіе образованіе въ тогдашнихъ центрахъ учености Емесѣ и Едессѣ ***). Они впервые знакомятъ арабовъ съ сочиненіями, написанными древними греческими философами ****), съ которыми они были основательно знакомы, такъ какъ преподаваніе въ школахъ Емессы и Едессы было основано на изученіи сочиненій древнихъ греческихъ мыслителей *****). Особенное значеніе было обращено на изученіе

---

*) Воззрѣнія арабовъ на міръ и на устройство вселенной заслуживаютъ вниманія. Особенное вниманіе ими было обращено на объясненіе понятій о времени, пространствѣ, движеніи, матеріи и формы. Интересныя указанія по этому предмету можно найти въ сочиненія: *Dieterci*, Die Naturanschaung und Naturphilosophie der Araber im X Jahrhundert. Leipzig, 1876, in-8. Въ этомъ сочиненіи находиться много данныхъ о познаніяхъ арабовъ въ ботаникѣ, минералогіи и зоологіи.

**) Объ арабскихъ врачахъ много свѣдѣній находиться въ сочиненіи: *Wustenfeld*, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher Göttingen. 1840.

***) Мѣста врачей занимали также индусы, персы и евреи, но наибольшою извѣстностью пользовались несторіане.

****) Перечисленіе различныхъ греческихъ сочиненій, переведенныхъ на арабскій языкъ можно найти въ сочиненіи: *Wenrich*, De auctorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armeniacis Persicisque. Leipzig 1842.

*****) Изъ числа христіанскихъ ученыхъ приглашенныхъ калифами упомянемъ извѣстнаго *Іоанна Дамаскина*, который, подобно своему отцу *Сергію*, занималъ мѣсто хранителя сокровищъ при дворѣ калифа *Абдалмелика*. Іоаннъ умеръ между 860 и 880 г. Онъ принадлежалъ къ числу образованнѣйшихъ людей своего времени. Одинъ изъ его біографовъ говоритъ о немъ, что „въ Геометріи онъ былъ такъ же свѣдущъ какъ Евклидъ, въ Ариѳметикѣ какъ Пиѳагоръ и Діофантъ“

сочиненій Гиппократа и Аристотеля. Въ это же время *знакомятся* арабы съ лучшими произведеніями сирійской, персидской и санскритской литературы. Переводной литературѣ особенно покровительствуютъ просвѣщенные калифы Альмансоръ, Гарунъ-аль-Рашидъ и Альмамунъ. Первые математическія сочиненія грековъ, съ которыми познакомились арабы, были „Начала" Евклида и „Альмагестъ" Птоломея. Изученію этихъ двухъ сочиненій арабскіе математики придавали особенное значеніе, о чемъ свидѣтельствуютъ многочисленные переводы и комментаріи, написанные на эти сочиненія.

Наиболѣе извѣстными переводчиками были *Гонейнъ-бенъ-Исгакъ* и сынъ его *Исгакъ-бенъ-Гонейнъ* *), жившіе въ IX в. Ими были переведены сочиненія Архимеда, Автолика, а также почти всѣ сочиненія Евклида. Въ это же время жилъ знаменитый *Табитъ-бенъ-Корра*, познакомившій арабовъ съ сочиненіями, Аполлонія, и трудившійся также надъ переводами сочиненій Архимеда, Евклида, Птоломея и Теодосія. Есть указанія, что Табитъ-бенъ-Корра былъ знакомъ также съ сочиненіями Паппуса. Кромѣ того онъ извѣстенъ какъ самостоятельный писатель; изъ числа такихъ сочиненій извѣстно сочиненіе по теоретической ариѳметикѣ **). Также были знакомы арабскіе ученые съ сочиненіями Ямвлиха, Порфирія и Никомаха. Сочиненія Діофанта и Герона Старшаго также были извѣстны арабамъ. Переходомъ отъ „Началъ" Евклида къ „Альмагесту" Птоломея служили цѣлый рядъ сочиненій, извѣстныхъ подъ именемъ „среднихъ книгъ", которыя состояли изъ сочиненій, составлявшихъ такъ называемый „Малый астрономъ" въ александрійской школѣ. Арабскимъ математикамъ были извѣстны не только самыя выдающіяся сочиненія греческой математической литературы, но имъ были также знакомы мало распространенныя сочиненія, какъ напримѣръ изслѣдованія Зенодора надъ изопериметрическими фигурами ***). Многія сочиненія дошли до насъ только благодаря переводамъ на арабскій языкъ.

Знакомство съ математическими сочиненіями грековъ и индусовъ и основательное ихъ изученіе способствуетъ возникновенію самостоятельной литературы; появляется множество сочиненій по различнымъ отраслямъ математическихъ наукъ. Особенное вниманіе арабскіе математики обращаютъ

---

*) Приставка *ибнъ* или *бенъ* означаетъ слово *сынъ*.

**) Указанія на труды Табита-бенъ-Корра можно найти въ статьѣ: *Steinschneider*, Thabit ben Korra, помѣщенной въ Zeitschrift für Mathematik und Physik, XVIII Jahrg. 1873.

***) Канторъ указываетъ на латинскій трактатъ объ изопериметрическихъ фигурахъ, хранящійся въ Базельской библіотекѣ. Въ рукописи этой упоминается имя *Архименида*, подъ которымъ разумѣли арабы Архимеда. См. *Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. T. I, pag. 605.

на первоначальныя понятія и опредѣленія, которыя они изслѣдуютъ съ философской точки зрѣнія. Арабскимъ геометрамъ принадлежитъ первымъ мысль и попытки приложить Алгебру къ Геометріи, а обратно; въ этомъ направленіи они достигли блестящихъ результатовъ. Вслѣдствіи этой связи численныхъ соотношеній съ Геометріей математическія науки обязаны быстрымъ своимъ развитіемъ. Къ числу математиковъ, занимавшихся геометрическими построеніями, особеннаго вниманія заслуживаютъ труды *Абулъ-Вефа*, *Алкгаіями* и *Гассанъ-бенъ-Гайтема*, изъ нихъ первый жилъ въ X в., а послѣдніе два въ XI в. О работахъ Гассанъ-бенъ-Гайтема мы имѣли уже случай говорить (см. стр. 238—240), недосказанное мы дополнимъ.

Мы уже выше (см. стр. 231—252) имѣли случай говорить о развитіи Геометріи у арабовъ. Въ настоящее время мы изложимъ все извѣстное о состояніи Алгебры у арабовъ, покажемъ различныя геометрическія построенія, которыми они пользовались при рѣшеніи алгебраическихъ вопросовъ и вкратцѣ, вообще, укажемъ на содержаніе главнѣйшихъ извѣстныхъ и изслѣдованныхъ въ настоящее время сочиненій математическаго содержанія. Мы начнемъ съ древнѣйшаго изъ извѣстныхъ въ настоящее время писателей, именно *Магомета-бенъ-Музы*, жившаго въ IX в. Затѣмъ мы познакомимся съ сочиненіями *Алкарги* и *Алкгаіями*, написанными въ XI в. и наконецъ съ сочиненіемъ *Бега-Еддина*, жившаго въ XVI в. Познакомившись съ содержаніемъ сочиненій, написанными вышеупомянутыми авторами, можно будетъ составить себѣ, до нѣкоторой степени, понятіе о познаніяхъ арабскихъ ученыхъ въ математическихъ наукахъ. Кромѣ того мы укажемъ еще на нѣкоторыя другія сочиненія, написанныя арабскими математиками.

Первоначальныя свои познанія въ Алгебрѣ математики Запада заимствовали изъ арабскихъ сочиненій *). Самыя древнія изъ извѣстныхъ въ на

---

*) Къ числу наиболѣе извѣстныхъ писателей XII в., переводившихъ математическія и астрономическія сочиненія арабовъ на латинскій языкъ, принадлежатъ Герардъ Кремонскій и Платонъ Тивольскій (см. стр. 193—194). Мы уже выше упоминали, что Платонъ Тивольскій перевелъ съ еврейскаго языка на латинскій „Геометрію“ Савосарда. Почти всѣ извѣстные списки этого сочиненія дошли до насъ въ неполномъ видѣ. Въ одной изъ рукописей этого сочиненія сказано: „Настоящее сочиненіе слѣдуетъ раздѣлить на четыре главы, изъ которыхъ первая содержитъ основныя предложенія Геометріи и Ариѳметики, которыя дѣлаютъ читателю понятными первоначальныя основы всѣхъ предметовъ. Вторая заключаетъ способъ измѣрять поля треугольныя, четыреугольныя, круглыя и вообще какихъ угодно видовъ. Третья учитъ дѣлить фигуры, измѣреніе которыхъ показано въ предъидущей главѣ. Четвертая глава показываетъ, какъ измѣрять рвы, колодцы и подобныя имъ предметы, башни и зданія, а также шаровидныя тѣла и сосуды. Наконецъ, чтобы ничего не пропустить, относящагося къ этой науки, мы покажемъ, какъ производятся дѣйствія механически и тѣмъ благополучно закончимъ настоящее сочиненіе“. Въ IV-й главѣ авторъ ссылается на Евклида и кромѣ того дана таблица хордъ.

стоящее время латинскихъ рукописей алгебраическаго содержанія заимствованы изъ арабскихъ источниковъ. Къ числу первыхъ ученыхъ познакомившихъ европейцевъ съ познаніями арабовъ въ Алгебрѣ принадлежитъ Фибоначчи, авторъ извѣстнаго „Liber abaci", оказавшаго такое громадное вліяніе на все послѣдующее развитіе математическихъ наукъ въ теченіи всего XIII и XIV вѣковъ. Къ этому же времени относятся различные, сохранившіеся до настоящаго времени, списки сочиненій алгебраическаго содержанія. Въ числѣ этихъ сочиненій находится извѣстная „Алгебра" Магомета-бенъ-Музы, но когда съ ней познакомились на Западѣ точно неизвѣстно, есть основанія предполагать, что латинскіе переводы этого сочиненія существовали на Западѣ уже въ XI в. *).

Магометъ-бенъ-Муза по прозванію *Альговарезми* жилъ въ началѣ IX в. при дворѣ калифа Аль-Мамуна. Названіе Альговарезми, или просто Говарезми, онъ получилъ отъ мѣста откуда былъ родомъ—провинціи Каризмъ. По повелѣнію Аль-Мамуна имъ были сдѣланы извлеченія изъ астрономическихъ таблицъ индусовъ—Сидгинтъ **), которыя получили названіе „Малой Сидгинты", также были имъ исправлены таблицы хордъ Птоломея, для чего

Сочиненіе Савосардо разобрано въ статьѣ: *Steinschneider*, Abraham Judäus—Savasorda und Ibn Esra, помѣщенной въ Zeitschrift für Mathematik und Physik, XII Jahrg. 1867.

Указанія на переводы, сдѣланные Платономъ Тивольскимъ, можно найти въ статьѣ: *L. Boriat*, Notice sur Platon de Tivoli, traducteur du XII siècle. Помѣщено въ Nouvelles Annales de Mathématiques. II Série, T. IX. 1870. in-8; а также въ сочиненіи: *B. Boncompagni*, Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duodecimo. Roma. 1851 in-4.

*) „Алгебра" Магомеда-бенъ-Музы была извѣстна въ Европѣ въ Средніе Вѣка, существуетъ нѣсколько старинныхъ переводовъ этого сочиненія на латинскій языкъ. Одинъ изъ такихъ переводовъ изданъ Либри, въ прибавленіяхъ (Note XII) къ I-му тому „Исторіи математическихъ наукъ въ Италіи" Заглавіе этой рукописи: Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit. На „Алгебру" Магомеда-бенъ-Музы ссылается Кардано въ своемъ сочиненіи „De subtilitate" Шаль говоритъ, что „Алгебра" Магомета-бенъ-Музы была переведена на латинскій языкъ въ 1183 г. *Робертомъ Cestrensis*'омъ. Весьма вѣроятно, что существовали и болѣе ранніе переводы.

**) Составленіемъ астрономическихъ таблицъ занимались многіе ученые. Особенное значеніе придавали арабы различнымъ Сидгинтамъ. Одна изъ подобныхъ таблицъ была составлена въ 777 г. *Якубомъ-бенъ-Тарикомъ* Таблицу свою онъ заимствовалъ изъ индусскихъ источниковъ, Подобныя же таблицы были составлены *Гасфомъ-бенъ-Абдала* изъ Багдада, а также *Ахметомъ-бенъ-Абдала-Габашемъ*, болѣе извѣстнаго подъ именемъ *Аль-Гасиба*, т. е. *вычислителя*, родомъ изъ Мерва. Послѣдній составилъ около 880 г три астрономическія таблицы одну на основаніи арабскихъ наблюденій, одну на основаніи персидскихъ и третью на основаніи индусскихъ. Изъ другихъ астрономическихъ таблицъ извѣстны еще таблицы, составленныя около 900 г персомъ *Абулъ-Абасомъ-Фадлъ-бенъ-Гатимомъ* и „Ожерелье изъ жемчуга" *Ибнъ-Аладами*, также составленное въ IX в.

онъ производилъ наблюденія въ Багдадѣ и Дамаскѣ. Кромѣ того Магометъ-бенъ-Муза принималъ участіе при измѣреніи длины градуса земнаго меридіана. Астрономическія таблицы, составленныя Магометомъ-бенъ-Муза, были впослѣдствіи переведены на латинскій языкъ Аделардомъ Батскимъ. Несравненно важнѣе для насъ два другія сочиненія, написанныя Магометомъ-бенъ-Муза, это его „Алгебра" и „Ариѳметика". Мы предварительно познакомимся съ первымъ изъ нихъ, а затѣмъ перейдемъ ко второму.

„Алгебру" Магометъ-бенъ-Муза написалъ по повелѣнію калифа (около 830 г.), который приказалъ ему составить общедоступное сочиненіе по этому предмету *). Въ введеніи къ своему сочиненію авторъ говоритъ: „Любовь къ наукамъ, которую вселилъ Богъ имаму Аль-Мамуну, повелителю правовѣрныхъ, вниманіе и предупредительность его къ ученымъ, доброта съ какою онъ ихъ поддерживаетъ и помощь, которую онъ имъ оказываетъ при случаѣ, когда они стремятся разъяснить темныя мѣста въ наукахъ и сдѣлать понятными трудные вопросы, все это заставило меня, написать краткое сочиненіе объ вычисленіяхъ, при посредствѣ *дополненій* и *сокращенія* (algebr wa'lmukabalah). При этомъ я ограничиваюсь наиболѣе легкимъ и всѣмъ тѣмъ, что наиболѣе полезно въ Ариѳметикѣ, тѣмъ что наиболѣе употребительно людьми, въ случаяхъ: наслѣдства, сдѣлокъ, различныхъ дѣленій, вопросовъ права получить и торговли, а равно при многихъ другихъ вопросахъ. А также гдѣ дѣло идетъ объ измѣреніи земель, а главнымъ образомъ при геометрическихъ вычисленіяхъ и различныхъ другихъ предметахъ". Изъ этихъ словъ можно заключить, что сочиненіе было предназначено для практическихъ цѣлей, а потому необходимо имѣло элементарный характеръ. Такой характеръ сочиненія необходимо заставляетъ предполагать, что во время Магомета-бенъ-Музы существовали уже сочиненія алгебраическаго содержанія, хотя всѣ арабскіе писатели положительно утверждаютъ, что Магометъ-бенъ-Муза былъ первый изъ арабскихъ ученыхъ, написавшій сочиненіе по Алгебрѣ. Объясненія терминамъ algebra и almukabalah онъ не даетъ, что указываетъ, что они были въ то время уже извѣстны и вѣроятно часто употреблялись учеными.

„Алгебра" Магомета-бенъ-Музы состоитъ изъ двухъ существенно отличныхъ частей, первой теоретической и второй практической. Познакомимся съ содержаніемъ каждой изъ этихъ частей отдѣльно.

Часть I. Первая часть начинается изложеніемъ правилъ, какъ производятся четыре основныя дѣйствія, которыя расположены въ слѣдующемъ порядкѣ: умноженіе, сложеніе и вычитаніе, дѣленіе. Дѣйствія производятся

*) „Алгебра" Магомеда-бенъ-Музы была издана подъ заглавіемъ: The Algebra of Mohammed Ben Musa; arabic and englisch. Edid. and transl. by Fr. Rosen. London. 1831. in-8.

на выраженіяхъ, содержащихъ неизвѣстныя или же ихъ корни. Затѣмъ авторъ переходитъ къ опредѣленію „шести задачъ" или „шести случаевъ". Онъ говоритъ, что „при вычисленіяхъ въ Алгебрѣ могутъ существовать слѣдующія зависимости между корнемъ, квадратомъ и числомъ:

1. Одинъ квадратъ равенъ корнямъ.
2. Одинъ квадратъ равенъ числу.
3. Корни равны числу.

Кромѣ того существуетъ еще три составныхъ случая, именно:

4. Одинъ квадратъ и корни равны числу.
5. Одинъ квадратъ и одно число равны корнямъ.
6. Корни и одно число равны одному квадрату".

Поименованныя зависимости заключаютъ въ себѣ рѣшеніе уравненій вида:

$$x^2 = ax \qquad x^2 + ax = b$$

$$x^2 = a \qquad x^2 + a = bx$$

$$ax = b \qquad ax + b = x^2$$

Кромѣ алгебраическаго рѣшенія этихъ уравненій дано *геометрическое* рѣшеніе для каждаго случая отдѣльно, какъ можетъ быть опредѣлена величина неизвѣстнаго. Первые три случая Магометъ-бенъ-Муза поясняетъ на слѣдующихъ трехъ примѣрахъ:

$$5x^2 = 40x \qquad \frac{25}{9}x^2 = 100 \qquad 5x = 10.$$

Остальные три случая поясненены на слѣдующихъ численныхъ примѣрахъ:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x = 19 \qquad 10x = x^2 + 21 \qquad x^2 = 12x + 288$$

Возникновеніе послѣднихъ трехъ отдѣльныхъ случаевъ при рѣшеніи уравненій второй степени обязано своимъ происхожденіемъ тому, что арабскіе математики необходимымъ условіемъ полагаютъ въ окончательномъ уравненіи, чтобы всѣ члены были положительны. Такимъ образомъ въ общемъ уравненіи:

$$x^2 \pm ax \pm b = 0$$

они замѣняютъ каждый членъ, имѣющій знакъ , вслѣдствіи чего и приходятъ къ разсмотрѣнію трехъ отдѣльныхъ случаевъ, какъ это дѣлаетъ Магометъ-бенъ-Муза. Замѣтимъ при этомъ, что Магометъ-бенъ-Муза всегда разсматриваетъ такія квадратныя уравненія у которыхъ коэфиціентъ при квадратѣ неизвѣстной величинѣ равенъ единицѣ. Къ послѣдней формѣ онъ всегда приводитъ уравненія. Всѣ три вида квадратнаго уравненія, разсмот-

рѣнные Магометомъ-бенъ-Муза, какъ мы видѣли выше выражаются формулами слѣдующаго вида:

$$x^2+px=q$$
$$x^2+q=px$$
$$px+q=x^2$$

а ихъ рѣшенія приводятся къ виду:

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$x=\ \ \frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x=\ \ \frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

Формулъ Магометъ-бенъ-Муза никакихъ не употребляетъ, а всѣ дѣйствія и вычисленія производитъ на числахъ словесно, а затѣмъ уже даетъ геометрическое построеніе.

Для уясненія, какъ Магометъ-бенъ-Муза рѣшаетъ квадратныя уравненія, приведемъ одинъ изъ его случаевъ, именно $x^2+b=ax$, въ примѣненіи къ частному случаю $x^2+21=10x$. Онъ разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ: „Квадраты и числа равны корнямъ, напримѣръ одинъ квадратъ и число 21 равны 10 корнямъ того же квадрата *), т. е. спрашивается во что обращается квадратъ, который послѣ прибавленія къ нему 21 диргама дѣлается равнозначущимъ съ 10 корнями того же квадрата: Рѣшеніе: Раздѣли пополамъ число корней; половина ихъ есть 5. Умножь это число само на себя; произведеніе будетъ 25. Вычти изъ него число 21, остатокъ будетъ 4. Извлеки корень; онъ есть 2. Этотъ корень вычти изъ половины числа корней, которая есть 5; остатокъ будетъ 3. Это и будетъ корень искомаго квадрата, который есть 9. Или же ты можешь прибавить этотъ корень къ половинѣ числа корней; сумма будетъ 7. Это и будетъ корень искомаго квадрата, а самъ квадратъ будетъ 49. Когда ты натолкнешься на примѣръ, подходящій къ этому случаю, то испробуй сначала рѣшеніе чрезъ сложеніе, а если оно не приведетъ къ цѣли, то безъ сомнѣнія вычитаніе приведетъ къ ней. Ибо въ этомъ случаѣ могутъ быть примѣнены и сложеніе и вычитаніе, чего нельзя сдѣлать ни въ одномъ изъ остальныхъ трехъ случаевъ, въ которыхъ число корней должно быть раздѣ-

*) Вопросъ этотъ въ латинскихъ переводахъ „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы выраженъ въ слѣдующей формѣ. Census et viginti una dragma equantur decem radicibus.

лено пополамъ. Знай также, что если въ задачѣ, сводимой къ этому случаю, произведеніе половины числа корней само на себя, будетъ меньше числа диргамовъ, которые связаны съ квадратомъ, то задача невозможна; если же это произведеніе равно диргамамъ, то корень квадрата равенъ половинѣ числа корней, безъ вышеупомянутаго сложенія или вычитанія". Приведенное правило можно алгебраически, въ настоящее время, выразить символами въ такомъ видѣ; если данное уравненіе будетъ $x^2+b=ax$, то его рѣшеніе будетъ:

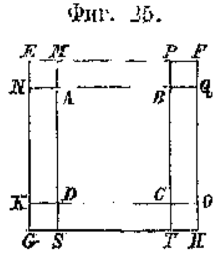
$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

Рѣшеніе это имѣетъ *два* значенія, при предположеніи $\left(\frac{a}{2}\right)^2>b$; если же $\left(\frac{a}{2}\right)^2<b$, то задача *невозможна;* если же $\left(\frac{a}{2}\right)^2=b$, то существуетъ только *одно* рѣшеніе: $x=\frac{a}{2}$.

Подобныя же разсужденія дѣлаетъ Магометъ-бенъ-Муза при рѣшеніи другихъ случаевъ, но на нихъ мы не остановимся, а покажемъ, какъ имъ примѣняются геометрическія построенія, при поясненіи выше приведенныхъ случаевъ, которые онъ рѣшилъ предварительно алгебраически. Приведемъ геометрическія построенія, данныя Магометомъ-бенъ-Муза при рѣшеніи уравненій второй степени, при чемъ разсмотримъ всѣ три случая геометрическаго рѣшенія такихъ уравненій. Пріемъ Магомета-бенъ-Муза, какъ мы сейчасъ увидимъ, вполнѣ въ духѣ греческихъ геометровъ и носитъ на себѣ несомнѣнно слѣды вліянія „Началъ" Евклида. Подобный методъ рѣшеній вполнѣ въ духѣ Евклида и показываетъ, что Магометъ-бенъ-Муза былъ основательно знакомъ съ содержаніемъ „Началъ", которыя въ это время существовали уже въ арабскихъ переводахъ, благодаря трудамъ Гадшадша-Ибнъ-Юзуфа и Гонеинъ-бенъ-Исгака (см. стр. 234—236).

Начнемъ съ разсмотрѣнія геометрическаго построенія, даннаго Магометомъ-бенъ-Муза при рѣшеніи уравненія $x^2+ax=b$, для частнаго случая

Фиг. 25.



$x^2+10x=39$. Пріемъ его состоитъ въ слѣдующемъ: взять квадратъ $ABCD$, къ

каждой изъ сторонъ, котораго приставленъ прямоугольникъ $ABPM$; дополнивъ полученную фигуру четырьмя маленькими квадратами $AMEN$ получимъ большой квадратъ $GHFE$ (фиг. 25). Полагая, что квадратъ $ABCD$ представляетъ квадратъ x^2, а четыре прямоугольника $ABPM$ составляютъ $10x$, видимъ, что высоты этихъ прямоугольниковъ выразятся чрезъ $\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$, а сумма четырехъ маленькихъ квадратовъ $AMEN$ будетъ равна $4.\left(\frac{5}{2}\right)^2=25$. Слѣдовательно большій квадратъ $GHFE$ выразится чрезъ $x^2+10x+25$, или помня, что $x^2+10x=39$, находимъ что онъ равенъ 64. Итакъ сторона большаго квадрата будетъ $\sqrt{64}=8$; но съ другой стороны эта же сторона выражается чрезъ $x+\frac{10}{2}$, а потому $x=8-5=3$. Примѣняя эти разсужденія къ общему виду уравненія $x^2+px=q$, видимъ что пріемъ Магомета-бенъ-Музы заключается въ слѣдующихъ дѣйствіяхъ:

$$x+2\left(\frac{p}{4}\right)=x+\frac{p}{2}=y$$

откуда:

$$x^2+4\left(\frac{p}{4}x\right)+4\left(\frac{p}{4}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}=y^2$$

но:

$$x^2+px=q$$

слѣдовательно:

$$\frac{p^2}{4}+q=y^2$$

откуда слѣдуетъ, что:

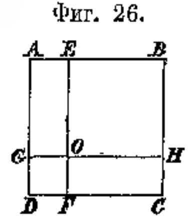
$$\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=y=x+\frac{p}{2}$$

или

$$x=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\frac{p}{2}$$

Для приведеннаго случая Магометъ-бенъ-Музы даетъ еще другое геометрическое построеніе, основанное на употребленіи гномона. Оно состоитъ

Фиг. 26.



въ слѣдующемъ: квадратъ $OHBE$ (фиг. 26) принимаютъ за квадратъ x^2,

къ которому прикладываютъ два прямоугольника *GOEA* и *FOHC*, сумма которыхъ выражаетъ $10x$; квадратъ *OHBE* и приложенные къ нему прямоугольники *GOEA* и *FOHC* составляютъ гномонъ *GOFCBAG*, который легко дополнить до полнаго квадрата *ABCD*, прибавивъ къ нему маленькій квадратъ *DFOG*, сторона котораго равна $\frac{10}{2}=5$. Величина маленькаго квадрата очевидно есть 25. Легко видѣть теперь, что больпій квадратъ *ABCD* равенъ $x^2+10x+25=39+25=64$, а его сторона есть $\sqrt{64}=8$. Но съ другой стороны эта же сторона есть $x+5$, слѣдовательно $x=8-5=3$. При рѣшеніи квадратнаго уравненія вида $x^2+b=ax$, Магометъ-бенъ-Муза въ концѣ правила, даннаго имъ, замѣчаетъ: „и все, что ты получишь изъ двухъ, или болѣе, или менѣе, квадратовъ неизвѣстнаго, своди къ простому квадрату". Изъ послѣднихъ словъ видно, что если данное уравненіе имѣетъ форму:

$$ax^2+b=cx$$

то необходимо нужно его спачала привесть къ виду:

$$x^2+\frac{b}{a}=\frac{c}{a}x$$

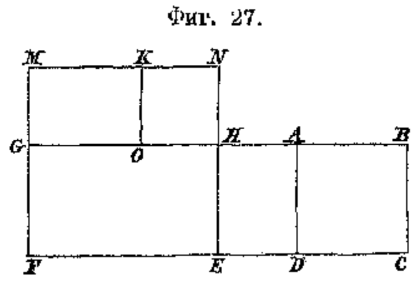
Къ такой формѣ всегда сводятся уравненія второй степени не только Магометомъ-бенъ-Музой, но также другими арабскими математиками. Изъ численныхъ примѣровъ, сводимыхъ на уравненія, въ которыхъ коэфиціенты числа дробныя, укажемъ на слѣдующій:

$$x^2+20\frac{1}{4}=11\frac{1}{4}x$$

рѣшенія этого уравненія Магометъ-бенъ-Муза не приводитъ *).

Геометрическое построеніе втораго случая Магометъ-бенъ-Муза даетъ въ примѣненіи къ частному случаю, именно въ примѣненіи къ уравненію

Фиг. 27.



$x^2+21=10x$. Мы выше привели алгебраическое рѣшеніе этого урав-

*) Магометъ-бенъ-Муза говоритъ: Fac ergo per ea sicut est illud quod retuli tibi de mediatione radicum, si Deus voluerit (см. Libri, T. I, Note XII, pag 285).

нения, данное Магометомъ-бенъ-Музой. Построеніе заключается въ слѣдующемъ: Пусть квадратъ неизвѣстной величины выражается площадью квадрата $ABCD$ (фиг. 27); прибавимъ къ этому квадрату прямоугольникъ $FDAG$, одинаковой высоты съ квадратомъ; прямоугольникъ такъ взятъ, что площадь его, съ площадью квадрата равнялась бы q, или для даннаго частнаго случая 21. Очевидно длина FC равна 10, или p. Раздѣлимъ GB въ точкѣ H пополамъ, опустимъ перпендикуляръ HE на прямую FC и продолжимъ его до точки N, такъ, чтобы EN равнялось GH, т. е. чтобы фигура $MNEF$ была квадратъ. Площадь его равна 5×5 $\left(\text{т. е. } \frac{p^2}{4}\right)$. Построимъ квадратъ $OKNH$; но $EN=HB$, а потому $NH=HA$ и $KM=HE$. Изъ этого слѣдуетъ, что прямоугольникъ $MKOG$ равенъ прямоугольнику $HADE$, откуда ясно, что квадратъ $MNEF$ $\left(\text{т. е. } 25=\frac{p^2}{4}\right)$, уменьшенный на прямоугольникъ $GADF$ (т. е. $21=q$), равенъ маленькому квадрату $KNHO$, т. е. равенъ 4 $\left(\text{или } \frac{p^2}{4}-q\right)$; сторона его NH или HA равна 2 $\left(\text{или } \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$. Вычитая послѣднее число изъ половины числа корней, то получимъ 3; это и будетъ корень.

Разсужденія Магомета-бенъ-Музы заключаются въ производствѣ слѣдующаго ряда дѣйствій:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}-x\right)^2=x(p-x)=px-x^2=q$$

или

$$\left(\frac{p}{2}-x\right)=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

откуда:

$$x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}$$

Геометрическое рѣшеніе этого случая Магометъ-бенъ-Муза заканчиваетъ слѣдующими словами: „Если мы вычтемъ линію AH изъ линіи HB, представляющей половину числа корней, то останется линія AB, равная 3, которая есть корень x^2. Если же мы прибавимъ эту линію OH къ HB, которая есть половина числа корней, то сумма есть 7 и будетъ выражена линіей OB, которая есть корень квадрата большаго x^2; впрочемъ, если ты прибавишь къ этому квадрату 21, то сумма будетъ равна 10 его корнямъ“. Формулой это можно выразить слѣдующимъ образомъ, если $x>\frac{p}{2}$, то:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=x(p-x)=q$$

или:

$$x-\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

т. е.:

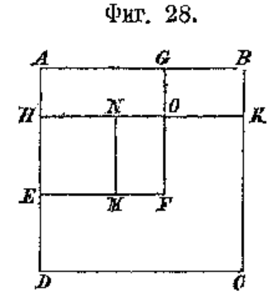
$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Изъ разсужденій Магомета-бенъ-Музы видно, что онъ пользуется при рѣшеніи этого случая только тѣмъ выраженіемъ неизвѣстнаго вопроса, куда входитъ отрицательный корень и которое выражается корнемъ перваго члена уравненія x^2, выраженнаго квадратомъ $ABCD$. Но при этомъ Магомету-бенъ-Музѣ извѣстно, что выраженіе съ положительнымъ корнемъ также даетъ рѣшеніе, удовлетворяющее вопросу. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что послѣднее выраженіе Магомету бенъ-Музѣ не вполнѣ ясно, такъ какъ линія OB, выражающее это рѣшеніе, больше линіи AB, которая первоначально была выбрана для выраженія x; кромѣ того линія OB не выражаетъ собою стороны квадрата, видимаго на данной фигурѣ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что Магомету-бенъ-Музѣ было извѣстно, что уравненіе вида $x^2+q=px$ имѣетъ два рѣшенія, но на практикѣ онъ довольствуется только однимъ, хотя бы другое также удовлетворяло вопросу. При этомъ достойно вниманія, что Магометъ-бенъ-Муза пользуется только тѣмъ рѣшеніемъ, которое, соотвѣтствуетъ отрицательному радикалу. Припомнимъ здѣсь, что Діофантъ всегда пользуется рѣшеніемъ, въ которое входитъ положительный радикалъ.

Третій случай при рѣшеніи уравненій второй степени, заключается въ рѣшеніи уравненій формы $px+q=x^2$. Приведемъ только геометрическое рѣшеніе, данное Магометомъ-бенъ-Музой, для частнаго случая $3x+4=x^2$. Доказательство состоитъ въ слѣдующемъ построеніи: Пусть квадратъ неизвѣстной величины x^2 равенъ площади квадрата $ABCD$ (фиг. 28). Отъ этого

Фиг. 28.



квадрата отдѣленъ прямоугольникъ $HKCD$, такой величины, чтобы прямая HD равнялась числу корней, т. е. чтобы она была равна 3 (т. е. p). Осталь-

ная часть квадрата, т. е. прямоугольникъ $ABKH$ очевидно равенъ 4 (т. е. q). Раздѣлимъ линію HD въ точкѣ E пополамъ и на части HE построимъ квадратъ $HNME$, коего площадь равна $2\frac{1}{4}$ $\left(\text{т. е. } \frac{p^2}{4}\right)$. На AE построимъ квадратъ $AGFE$. Очевидно, что прямоугольники $GBKO$ и $MNOF$ равновелики, а потому сумма прямоугольниковъ $AGOH+MNOF$ равна прямоугольнику $ABKH$ (т. е. 4). Изъ этого слѣдуетъ, что площадь квадрата $AGFE$ равна $2\frac{1}{4}$, увеличенному на 4 $\left(\text{т. е. } \frac{p^2}{4}+q\right)$; сумма эта составитъ $6\frac{1}{4}$, а корень будетъ $2\frac{1}{2}$ и по величинѣ равенъ сторонѣ AE. Остальная часть стороны AD, равная ED, есть половина числа корней, т. е. $1\frac{1}{2}$. Слѣдовательно AD будетъ равно:

$$4=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

это и будетъ искомый корень.

Только что приведенное геометрическое построеніе можетъ быть выражено слѣдующими дѣйствіями:

$$x(x-p)+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

но

$$x(x-p)=q$$

слѣдовательно:

$$x-\frac{p}{2}=\frac{p^2}{4}+q$$

или

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

Изложивъ теорію квадратныхъ уравненій Магометъ-бенъ-Муза показываетъ, какъ производятся основныя четыре алгебраическія дѣйствія надъ неизвѣстными и числами, а также дѣйствія надъ корнями и дѣйствія при посредствѣ $+$ и $-$; въ концѣ приведены нѣкоторыя дѣйствія надъ величинами трехъ измѣреній. Изъ примѣровъ этого отдѣла можно указать на слѣдующіе: показать, что $20-\sqrt{200}+(\sqrt{200}-10)=10$; показать, что $20-\sqrt{200}-(\sqrt{200}-10)=30-\sqrt{800}$; показать, что $50+10x-2x^2+$ $+(100+x^2-20x)=150-10x-x^2$. Въ послѣднемъ случаѣ авторъ дѣлаетъ слѣдующее замѣчаніе: „этотъ случай не допускаетъ никакой фигуры, такъ какъ здѣсь является три рода величинъ, квадраты, корни и числа, и нѣтъ ничего соотвѣтствующаго, чѣмъ онѣ могли бы быть представлены. Но тѣмъ

не менѣе я пробовалъ найти и для этого случая фигуру, но она оказалась неудовлетворяющей вопросу". Послѣднее замѣчаніе Магомета-бенъ-Музы особенно интересно, оно показываетъ, какъ онъ стремился вообще ко всѣмъ алгебраическимъ выраженіямъ приложить геометрическій методъ построеній. Это прямо указываетъ на знакомство его съ сочиненіями греческихъ геометровъ. Приведенные нами случаи, при рѣшеніи квадратныхъ уравненій, рѣшенные геометрически, несомнѣнно греческаго происхожденія *). Методы эти вполнѣ напоминаютъ пріемъ Евклида, примѣненные имъ въ своихъ „Началахъ". Изъ такихъ задачъ, въ которыхъ Магометъ-бенъ-Муза стремился приложить геометрическій методъ укажемъ на слѣдующія: „число 10 разложить на такія двѣ части, чтобы квадратъ одной изъ нихъ равнялся учетверенному произведенію обѣихъ частей"; или же „третья и четвертая части какого нибудь числа, увеличенная каждая на 1, даютъ произведеніе равное 20, найти число" и др. При производствѣ алгебраическихъ дѣйствій указаны нѣкоторыя правила, какъ напримѣръ произведеніе двухъ отрицательныхъ величинъ равно числу положительному" и т. п. Послѣ этого Магометъ-бенъ-Муза переходитъ къ тройному правилу и его различнымъ приложеніямъ **).

*) По мнѣнію Роде Магометъ-бенъ-Муза написалъ свою „Алгебру" подъ вліяніемъ сочиненій древнихъ греческихъ писателей. Онъ полагаетъ, что Магомету-бенъ-Музѣ могли быть извѣстны сочиненія Діофанта, съ которыми онъ могъ познакомиться въ переводахъ на сирійскій языкъ, или даже въ подлинникѣ. Роде обращаетъ особенное вниманіе на методы и пріемы, употребленные Магометомъ-бенъ-Муза, которые вполнѣ въ духѣ греческихъ математиковъ и не схожи съ методами индусовъ. Соображенія свои Роде высказалъ въ статьѣ: *L. Rodet*, l'Algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indiennes et grecques, помѣщенной въ Journal Asiatique, VII Serie, T. XI, № 1, за 1878 г.

**) Мы уже выше (см. стр. 193—194) упоминали, что „Алгебра" Магомета-бенъ-Музы была также переведена на латинскій языкъ извѣстнымъ Герардомъ Кремонскимъ (1114—1187 гг.). До насъ дошли нѣкоторые отрывки этого перевода, составляющіе части сочиненія геометрическаго содержанія. На основаніи этого весьма многіе считали, что Герарду Кремонскому первому принадлежитъ честь ознакомленія европейцевъ съ сочиненіемъ Магомета-бенъ-Музы, но такое мнѣніе несправедливо, такъ какъ еще раньше Герарда Кремонскаго, сочиненіе арабскаго математика было переведено Цестренсисомъ.

Кромѣ указанныхъ отрывковъ „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы, Герардъ Кремонскій написалъ сочиненіе алгебраическаго содержанія, которое есть полный трактатъ по Алгебрѣ, въ томъ состояніи въ какомъ эта наука находилась во время автора. Сочиненіе это составлено по „Алгебрѣ" Магомета-бенъ-Музы, изъ чего можно заключить, что Герардъ Кремонскій основательно былъ знакомъ съ сочиненіемъ арабскаго писателя. „Алгебра" Герарда Кремонскаго была издана Бонкомпани въ его сочиненіи: *B. Boncompagni*, Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetto astronomo del secolo decimoterzo. Roma, 1851. in-4. Бонкомпани издалъ латинскій текстъ этого сочиненія, но оно было также переведено на италіанскій языкъ; италіанскій переводъ находиться въ одной рукописи, принадлежащей Ватиканской библіотекѣ.

Въ слѣдующемъ отдѣлѣ „Алгебры" Магометъ-бенъ-Муза занимается вопросами, относящимися къ Геометріи*). Отдѣлъ этотъ озаглавленъ „Измѣренія", или по арабскиі „Bab al Messâhat" **). Прежде всего авторъ начинаетъ съ опредѣленія выраженія „одинъ на одинъ", что означаетъ „локоть на локоть". Онъ говоритъ, что площадь всякаго квадрата, котораго стороны *одинъ*, равна *одному*. Затѣмъ онъ переходитъ къ нахожденію площадей квадратовъ, которыхъ стороны равны нѣсколькимъ единицамъ. Послѣ этого онъ даетъ правила для измѣренія площадей треугольниковъ и четыреугольниковъ, а затѣмъ переходитъ къ измѣренію площади круга. Площадь равно-

---

Герардъ Кремонскій въ своемъ сочиненіи даетъ правила для рѣшенія уравненій второй степени. Правила эти изложены въ стихотворной формѣ. Мы считаемъ не безынтереснымъ привести три четырехстишія, въ которыхъ даны правила для рѣшенія трехъ видовъ квадратнаго уравненія, именно:

$$x^2+px=q$$

$$x^2+q=px$$

$$x^2=px+q$$

каждому изъ этихъ уравненій соотвѣтствуетъ слѣдующее четырехстишіе:

Cum rebus census si quis dragmis dabis equm,
Res quadra medias quadratum adice dragmas
Radici quorum medias res excipe demum
Et residuum quesiti census radicem ostendet.

Cum censu dragmas si quis rebus dabit equas,
Res quadra medias, quadratis abice dragmas,
Dimidiis rebus reliqui latus adde vel aufer,
Et exiens quesiti census radicem ostendet.

Si census rebus dragmisque requiritur equis,
Res quadra medias, quadratis adice dragmas,
Quorum radicem mediis radicibus adde,
Et collectum quesiti census radicem ostendet.

*) Отдѣлъ „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы, относящійся къ измѣренію фигуръ былъ переведенъ на французскій языкъ, съ англійскаго изданія Розена, подъ заглавіемъ *Ar. Marre*, Partie géométrique de l'algèbre de Abou-Abdallah Mohammed ben Moussa (Al Khowaresmi), статья эта помѣщена въ Nouvelles Annales de Mathématiques. T. V. 1846. Paris. Впослѣдствіи переводъ этотъ исправленъ и снова напечатанъ подъ заглавіемъ: *Ar. Marre*, Le Messâhat de Mohammed ben Moussa al Khârezmi, extrait de son Algèbre traduit et annoté par Ar. M.; помѣщено въ Annali di matematica pura ed applicata. T. VII. 1865. Roma. in-4

**) Собственно слово *messâhat* означаетъ *искусство мѣрить*. Самъ Магометъ-бенъ-Муза не даетъ объясненія этому термину, изъ чего можно заключить, что онъ былъ хорошо извѣстенъ. Ибнъ-Халдунъ въ своихъ „Предувѣдомленіяхъ" говоритъ, что объ этомъ искусствѣ было написано много хорошихъ сочиненій. Терминъ messâhat многіе переводили словомъ *геодезія*, такъ какъ главная цѣль его заключалась въ измѣреніи земель.

сторонняго треугольника онъ находитъ умножая высоту на половину основанія, а площадь ромба умножая одну изъ діагоналей на половину другой.

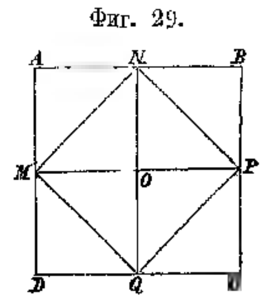
Окружность круга онъ находитъ тремя способами, именно: умножая діаметръ на $3^1/_2$, или умножая діаметръ самъ на себя, а потомъ на 10, и извлекая изъ произведенія корень квадратный; и наконецъ, способъ астрономовъ, умножая діаметръ на 62832 и произведеніе раздѣливъ на 20000. Раздѣливъ окружность на $3^1/_2$ онъ находитъ діаметръ. Площадь круга онъ находитъ умножая половину окружности на половину діаметра. При этомъ онъ замѣчаетъ, что это слѣдуетъ изъ того, что площади всѣхъ правильныхъ многоугольниковъ равны половинѣ произведенія периметра на половину діаметра вписаннаго въ нихъ круга. Кромѣ того для площади круга Магометъ-бенъ-Муза даетъ еще другое правило, именно: умножить діаметръ самъ на себя и изъ произведенія вычесть $^1/_7$, а потомъ $^1/_{14}$ этого произведенія. Правило это можно выразить въ видѣ:

$$S = \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right)d^2$$

Самъ Магометъ-бенъ-Муза говоритъ, что это выраженіе одинаково съ первымъ. Далѣе онъ даетъ правила для нахожденія площади сегмента круга. Затѣмъ онъ переходитъ къ нахожденію объемовъ параллелепипедовъ и пирамидъ. Къ числу пирамидъ онъ относитъ и конусъ, такъ какъ онъ говоритъ: „объемъ пирамидъ треугольной, четыреугольной, круглой, и вообще всякой, находятъ умножая треть площади основанія на высоту". Къ числу параллелепипедовъ онъ относитъ также цилиндры.

Послѣ этого Магометъ-бенъ-Муза переходитъ къ теоремѣ Пиѳагора, которая доказывается сначала ариѳметически, а затѣмъ дано также геометрическое доказательство, которое напоминаетъ собою методъ Васкары для доказательства того же предложенія. Геометрическое доказательство предложенія Пиѳагора дано Магометомъ-бенъ-Муза только для частнаго случая, когда треугольникъ рав-

Фиг. 29.

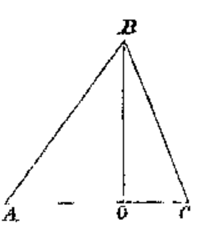


нобедренный. Доказательство состоитъ въ слѣдующемъ построеніи: квадратъ *ABCD* раздѣленъ прямыми *MP* и *NQ* на четыре маленькіе квадрата *ANOM*,

NBPO, *OPCQ* и *MOQD*, которые въ свою очередь діагоналями раздѣлены пополамъ каждый. Справедливость пиѳагоровой теоремы прямо вытекаетъ изъ чертежа (фиг. 29).

Треугольники Магометъ-бенъ-Муза, дѣлитъ на роды подобно индусамъ, смотря по виду угловъ, а не на равнобедренные, равносторонніе и разностороннне. Впрочемъ при производствѣ вычисленій онъ принимаетъ во вниманіе и послѣднее дѣленіе. Четыреугольники Магометъ-бенъ-Муза, подобно Евклиду, дѣлитъ на пять классовъ именно: квадратъ, прямоугольникъ, ромбъ, ромбоидъ и неправильные четыреугольники *). Кромѣ того онъ различаетъ въ фигурахъ длину и ширину, при чемъ подъ послѣднею подразумѣваетъ меньшее измѣреніе. Послѣднее различіе указываетъ на греческое происхожденіе, такъ какъ подобное различіе въ двухъ измѣреніяхъ фигуры существовало въ александрійской школѣ, а еще раньше у египетскихъ геометровъ. Изъ другихъ численныхъ предложеній, рѣшенныхъ Магометомъ-бенъ-Муза, укажемъ еще на слѣдующее, которое онъ находитъ послѣдовательными вычисленіями: требуется опредѣлить отрѣзки, которые дѣлаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ противолежащей основанію вершины треугольника, на это основаніе. Треугольникъ взятъ такой, коего стороны 13, 14 и 15. Магометъ-бенъ-Муза поступаетъ слѣдующимъ образомъ: пусть данный треугольникъ *ABC* (фиг. 30), въ которомъ $OC = x$, тогда

Фиг. 30.



$OB^2 = 13^2 - x^2$; кромѣ того $AO = 14 - x$ и $AO^2 = (14 - x)^2 = 196 - 28x + x^2$, но $OB^2 = 15^2 - AO^2 = 225 - (196 - 28x + x^2) = 29 + 28x - x^2$, а потому: $29 + 28x - x^2 = 169 - x^2$ или $29 + 28x = 169$, или $28x = 140$, а потому $x = 5$. Слѣдовательно $OC = 5$, а $AO = 9$. Опредѣливъ отрѣзки онъ находитъ высоту. Укажемъ еще на слѣдующую задачу: въ равнобедренный треугольникъ, коего стороны 10, а основаніе 12, вписать квадратъ. Магометъ-бенъ-Муза находитъ для высоты 8, а сторона квадрата равна $4\frac{4}{5}$. Подобнаго же

*) Неправильные четыреугольники Евклидъ въ своихъ „Началахъ" называетъ *трапеціями* (см. Кн. I, Опред. 34). Подобное опредѣленіе трапеціи сохранилось до настоящаго времени у англичанъ, и существовало до конца прошлаго столѣтія у французовъ.

рода задача была рѣшена также Герономъ Старшимъ. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что выраженіе площади треугольника въ функціи сторонъ, данное Герономъ, а также методъ нахожденія площадей четыреугольныхъ фигуръ въ видѣ полусуммы произведенія двухъ противолежащихъ сторонъ, неизвѣстны Магомету-бенъ-Музѣ. Выраженіе для π также находится въ „Алгебрѣ" Магомета-бенъ-Музы. Оно извѣстно ему въ трехъ видахъ, при чемъ онъ замѣчаетъ, „первое есть $\frac{22}{7}$, которое прилагается въ практической жизни, хотя оно не вполнѣ точно; геометрамъ извѣстны еще два другихъ выраженія". Послѣднія выраженія, о которыхъ онъ упоминаетъ, суть выраженія извѣстныя уже индусамъ, именно $\pi = \sqrt{10}$ и $\pi = \frac{62832}{20000} = \frac{3927}{1250}$ *).

Изъ стереометрическихъ задачъ, разсмотрѣнныхъ въ „Алгебрѣ" Магометъ-бенъ-Музы, укажемъ еще на слѣдующую: найти объемъ усѣченной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, коей сторона нижняго основанія равна 4, а верхняго—2, при высотѣ равной 10. Методъ доказательства вполнѣ напоминаетъ пріемы греческихъ геометровъ. Объ измѣреніи шара нѣтъ и помину. Въ заключеніе замѣтимъ, что геометрическая часть сочиненія Магомета-бенъ-Музы заключаетъ всего двѣнадцать фигуръ.

Часть II. Вторая часть „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы заключаетъ приложенія вопросовъ, рѣшенныхъ въ первой части этого сочиненія, къ различнымъ вопросамъ, относящимся къ дѣленію наслѣдства, имущества и различнымъ другимъ вопросамъ практической жизни. Вторая часть болѣе интересна для юристовъ, въ ней заключается разрѣшеніе вопросовъ, которые не могли подойти подъ статьи Корана. Нѣкоторые ученые полагаютъ, что главная цѣль сочиненія Магомета-бенъ-Музы была именно вторая часть „Алгебры", первая же только служила поясненіемъ для рѣшенія вопросовъ,

*) Приведенныя выраженія для π въ десятичныхъ дробяхъ представятся въ видѣ:

$$\pi = \frac{22}{7} = 3.1424\ldots, \quad \pi = \sqrt{10} = 3.16227\ldots, \quad \pi = \frac{62832}{20000} = 3.14160\ldots$$

На подлинникѣ арабской рукописи „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы, хранящейся въ Оксфордской библіотекѣ, съ которой Розенъ дѣлалъ свой переводъ, находиться слѣдующая замѣтка, относящаяся къ вычисленію частей круга: „Это есть приближеніе, а не истинная правда; никто не можетъ опредѣлить точное значеніе этого отношенія, и найти действительную длину окружности, кромѣ того, кому все извѣстно: ибо линія эта не есть прямая, которой длина можетъ быть точно опредѣлена. Это называется приближеніемъ, подобно тому какъ говорятъ о корняхъ квадратныхъ изъ ирраціональныхъ чиселъ, что они суть приближенія, а не точная истина. Одинъ Богъ знаетъ какой есть точный корень. Лучшій способъ здѣсь указанный, это умножить діаметръ на 3 и $\frac{1}{7}$. Это самый скорый и самый легкій способъ. Богу извѣстно лучшее!".

рѣшенныхъ во второй *). Такое мнѣніе весьма вѣроятно, такъ какъ извѣстно, что вопросъ о наслѣдствахъ имѣлъ особенное значеніе у арабовъ и существовало множество сочиненій написанныхъ по этому предмету, въ которыхъ были указаны правила, какъ дѣлить наслѣдства и какими правилами и вычисленіями слѣдуетъ при этомъ руководиться **).

Познакомившись съ содержаніемъ „Алгебры", написанной Магометомъ-бенъ-Музой, разсмотримъ другое сочиненіе, написанное имъ, именно „Ариѳметику". Сочиненіе это дошло до насъ только въ переводѣ на латинскій языкъ; подлинника на арабскомъ языкѣ до сихъ поръ неизвѣстно ни одного экземпляра ***). Латинскій переводъ былъ отысканъ въ 1857 г. въ библіотекѣ Кембриджскаго университета въ числѣ другихъ рукописей, переводъ этотъ изданъ Бонкомпани. По мнѣнію нѣкоторыхъ переводъ этотъ былъ сдѣланъ извѣстнымъ Аделардомъ Батскимъ ****).

---

*) Первый, обратившій должное вниманіе на рукопись „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы, былъ знаменитый Кольбрукъ, въ своемъ сочиненіи Algebra, with Arithmetic and Mensuration, напечатанномъ въ 1817 г.

**) Различныя указанія, касательно наслѣдствъ, у арабовъ носятъ слѣды римскаго вліянія, такъ какъ римскіе законы долгое время примѣнялись въ Сиріи и Палестинѣ. Многіе вопросы, встрѣчаемые въ сочиненіяхъ объ наслѣдствахъ, написанными арабами, прямо заимствованы изъ латинскихъ сочиненій. Но необходимо замѣтить, что извѣстный вопросъ о дѣленіи наслѣдства между двумя близнецами, занимавшій столькихъ римскихъ юристовъ, не встрѣчался до сихъ поръ въ арабскихъ сочиненіяхъ.

Вопросъ о близнецахъ состоитъ въ слѣдующемъ: отецъ, умирая сдѣлалъ распоряженія о распредѣленіи имущества между женою и сыномъ, или дочерью, который долженъ родиться вскорѣ; но онъ не предвидѣлъ случая, когда родятся близнецы, изъ коихъ одинъ мальчикъ, а другой дѣвочка. Вопросъ этотъ занималъ извѣстнаго юриста *Юліана* (Salvianus Julianus), жившаго въ царствованіе Антонина II-го, *Цецилія* (Cacilius Africanus) и *Юлія Павла* (Julius Paulus), жившаго въ III в. Рѣшеніе предложенное Юліаномъ заключается въ слѣдующемъ: „если завѣщатель распорядился, что въ случаѣ рожденія сына, послѣдній долженъ получить $\frac{2}{3}$ всего имущества, а жена остальное, если же дочь, то она должна получить $\frac{1}{3}$, а жена остальную часть имущества; то въ случаѣ рожденія сына и дочери, слѣдуетъ все имущество раздѣлить на 7 частей, изъ которыхъ отдать 4 сыну, 2 женѣ и 1 дочери. Ибо такимъ образомъ по волѣ завѣщателя сынъ получаетъ въ два раза больше матери, а мать въ два раза больше дочери. Хотя по законамъ права такое завѣщаніе должно быть признано недѣйствительнымъ, но на основаніи здраваго смысла оно должно быть признано, такъ какъ по волѣ завѣщателя жена имѣетъ право на часть имущества, въ случаѣ рожденія и сына и дочери". Подобное же рѣшеніе было предложено, по словамъ Юліана, *Ювенціемъ* (Juventius Celsus), жившимъ во время Траяна.

***) Trattati d'Aritmetica pubblicati da *Bald. Boncompagni.* I. Algoritmi de numero Indorum. II. Joannis Hispalensis liber Algorismi de pratica Arismetrice. Roma. 1857. in 8.

****) Шаль раздѣляетъ предположеніе Бонкомпани о томъ, что сочиненіе по ариѳметикѣ, написанное Магометомъ, было переведено на латинскій языкъ Аделардомъ Батскимъ. Переводъ этотъ заключается по ихъ предположенію въ рукописи, найденной въ Кембриджской

Рукопись начинается слѣдующими словами: „Говоритъ Алгоритми (*Algoritmi*). Да будетъ намъ позволено хвалить Господа, нашего защитника и наставника" *). Послѣ этого вступленія авторъ касается вопроса о различныхъ способахъ изображать числа, которые примѣняются людьми **). Систему счисленія, основанную на употребленіи девяти знаковъ онъ приписываетъ индусамъ. Затѣмъ онъ говоритъ: „я уже упоминалъ въ сочиненіи объ ***Aldschebr*** и ***Almukâbala***, т. е. объ *возстановленіи* и *противоставленіи*, что всякое число составлено изъ единицы. Слѣдовательно единица заключается во всякомъ числѣ; объ этомъ я уже упоминалъ въ другомъ сочиненіи по Ариѳметикѣ ***). Единица есть корень всякаго числа и сама стоитъ внѣ чиселъ" ****). За этими опредѣленіями слѣдуютъ правила, какъ производятся основныя ариѳметическія дѣйствія. При сложеніи особенное вниманіе обращено на случай, когда сумма слагаемыхъ превосходитъ 9; по данному правилу слѣдуетъ десятки придать къ слѣдующему наименованію, а подъ разсматриваемыми слагаемыми

библіотекѣ. Мнѣніе свое Шаль основываетъ на томъ, что Аделардъ Батскій перевелъ, около 1120 г., астрономическія таблицы Магомета-бенъ-Музы. Въ различныхъ дошедшихъ до насъ рукописныхъ спискахъ латинскихъ переводовъ „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы находятся ссылки на астрономическія таблицы того же автора. Притомъ само имя Магомета-бенъ-Музы встрѣчается въ самыхъ разнообразныхъ видахъ, какъ напр.: Incipit Liber *Ezith Japharis Elkauresmi* per Adelardum Bathoniensem ex arabico in latinam sumptus. Posita est in hoc volumine ab *Elkauresmo* examinatio planetarum.—*Ezich Elkauresmi*, id est tabulae chawaresmicae per Ethelardum Bathoniensem ex arabico traductae. Соображенія Шаля помѣщены въ статьѣ, напечатанной въ Comptes Rendus. T. XLVIII. 1859. pag. 1054—1061

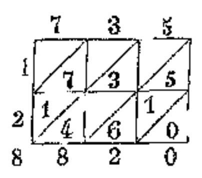
*) Мы уже выше (стр. 196) указали, что происхожденіе слова *алгоризмъ* многіе ученые объясняли различно. Вполнѣ объяснено оно было Рено. Въ теченіи нѣсколькихъ столѣтій происхожденіе этого слова объясняли самыми искусственными гипотезами, такъ напримѣръ нѣкоторые производили это слово отъ словъ *alleos*—чужой и *geros* разсмотрѣніе; другіе отъ греческихъ словъ *argis*—греческій и *mos*—обычай; или *ares*—сила и *ritmos*—число, или отъ греческаго слова *algos*, что значитъ бѣлый песокъ, и *ritmos*—число, или *algos* искусство и *rodos* число. Нѣкоторые высказывали мнѣніе, что слово *алгоризмъ* получило свое начало отъ имени человѣка, по мнѣнію однихъ это былъ философъ *Algus*, по мнѣнію другихъ *Algorus* изъ Индіи, или король Кастильскій *Algor* и т. п.

**) Est quoque diversitas inter homines in figuris earum (см. Trattati d'arithmetica pubb. da B. Boncompagni, Par. I, pag. 1.

***) По мнѣнію Кантора содержаніе сочиненія по Ариѳметикѣ, о которомъ упоминаетъ Магометъ-бенъ-Муза, относится къ теоретической Ариѳметикѣ, гдѣ были разобраны различныя свойства чиселъ, составляющія въ настоящее время предметъ теоріи чиселъ.

****) Различныя опредѣленія въ „Ариѳметикѣ" Магомета-бенъ-Музы указываютъ, что ему была извѣстна „Ариѳметика" Никомаха, а также сочиненія Теона Смирнскаго. Послѣдній тоже говорилъ, что единица не есть число.

пишутъ только то, что остается отъ десятковъ. При этомъ Магометъ-бенъ-Муза говоритъ: „Если же ничего не остается, то поставь кружокъ, для того, чтобы мѣсто не оставалось пустымъ, кружокъ долженъ занимать мѣсто, ибо въ противномъ случаѣ мѣста убавятся и можно будетъ принять второе за первое“ *). Изъ этихъ словъ Магомета-бенъ-Музы видно, что ему былъ извѣстенъ нуль **). При сложеніи, а также при вычитаніи, дѣйствія надо начинать съ высшаго наименованія, т. е. слѣва, а затѣмъ уже переходить къ болѣе низкимъ наименованіямъ. Необходимость производить дѣйствія въ такомъ порядкѣ Магометъ-бенъ-Муза объясняетъ тѣмъ, что дѣлая такъ „работа, по волѣ божіей, дѣлается легче и полезнѣе“. Наиболѣе сложный случай при вычитаніи, когда числа въ вычитаемомъ больше соотвѣтствующихъ чиселъ уменьшаемаго, авторъ совсѣмъ не касается. Третее дѣйствіе, которое разсматриваетъ Магометъ-бенъ-Муза, есть дѣленіе на два, при чемъ дѣйствіе начинается съ наименьшаго наименованія, т. е. въ порядкѣ обратномъ, чѣмъ нынѣ. Четвертое дѣйствіе есть удвоеніе, которое производится снова начиная съ единицъ высшаго наименованія. Умноженіе производится совершенно тѣмъ же пріемомъ, какъ у индусовъ, которые дѣйствіе это производили вписавъ числа въ клѣточки. Лучше всего это видно на примѣрѣ. Пусть требуется $12 \times 735 = 8820$. Индусы дѣйствіе располагали слѣдующимъ образомъ:



Повѣрку вышеупомянутыхъ дѣйствій арабы, подобно индусамъ, производили при посредствѣ 9. Дѣйствіе дѣленія производится совершенно по тому же пріему, какъ и умноженіе, только все дѣйствіе ведется въ обратномъ порядкѣ. Производство дѣйствія дѣленія легко понять изъ слѣдующаго при-

*) Въ „Ариеметикѣ“, изданной Бонкомпани, говорится: „Si nihil remanserit pones circulum, ut non sit differentia vacua: sed sit in ea circulus qui occupet ea, ne forte cum vacua fuerit, minuantur differentiae, et putetur secunda esse prima. См. Trattati d'aritmetica I, 8.

**) Нуль заимствовали арабы въ VIII в. у индусовъ. Арабы называли нуль *as-sifr*, т. е. *пустота*; это есть переводъ санскритскаго слова *сунья*, имѣющаго то же значеніе. Впослѣдствіе названіе нуля перешло на всю систему чиселъ, въ которой онъ употреблялся. Впрочемъ до настоящаго времени на нѣкоторыхъ языкахъ сохранилось первоначальное значеніе нуля (см. стр. 199).

мѣра. Пусть дано 46468 : 324, частное будетъ 143, а остатокъ 136. Дѣйствие это арабы располагали слѣдующимъ образомъ:

136
24
110
22
110
143
46468
324
324
324

Послѣ дѣления авторъ переходитъ къ шестидесятичнымъ дробямъ и объясняетъ дѣйствія надъ ними, при чемъ замѣчаетъ, что дроби эти употребляются индусами.

По мнѣнію Вепке „Ариѳметика“ Магомета-бенъ-Музы была однимъ изъ первыхъ сочиненій, написанныхъ арабами, въ которомъ изложена индусская ариѳметика. Начиная съ этого времени „счетъ индусовъ“ дѣлается предметомъ многихъ спеціольныхъ сочиненій, написанныхъ арабскими математиками *). Впослѣдствіи ариѳметическіе методы, извѣстные въ „Ариѳметикѣ“ Магомета-бенъ-Музы, подъ именемъ „индусскихъ“, перешли на Западъ подъ названіемъ *Алгоризма.* Къ числу первыхъ сочиненій, написанныхъ объ Алгоризмѣ, принадлежитъ вѣроятно сочиненіе Іоанна Севильскаго, жившаго въ первой половинѣ XII в. Содержаніе этого сочиненія есть дальнѣйшее развитіе методовъ, изложенныхъ въ „Ариѳметикѣ“ Магомета-бенъ-Музы **).

Кромѣ „Ариѳметики“ и „Алгебры“, Магометъ-бенъ-Муза написалъ еще одно сочиненіе подъ заглавіемъ „Объ увеличеніяхъ и уменьшеніяхъ“ (Fil

*) Много данныхъ относительно этого вопроса находиться въ интересныхъ сочиненіяхъ. *F. Woepcke,* Memoire sur la propagation des chiffres indiens. Paris. 1863. in-8. См pag 155, 186.—*F. Woepcke,* Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident et sur deux documents importants publiés par le Prince don Balth. Boncompagni. Rome. 1859. in-4.

**) На сочиненіе Іоанна Севильскаго мы уже указывали (см. стр. 195). Рукопись этого сочиненія издана Бонкомпани во второй части „Trattati d'aritmetica“. Изъ словъ самаго автора можно заключить, что сочиненіе его есть только новое изданіе сочиненія арабскаго математика, приспособленное для современниковъ. Онъ говоритъ въ началѣ сочиненія: „Incipit prologus in libro alghoarismi de pratica arismetrice. Qui editus est a magistro Johanne yspalensi“ См. Trattati d'aritmetica. T. II, pag. 25.

dscham wattafrik). Къ сожалѣнію сочиненіе это до насъ не дошло. Весьма вѣроятно, что въ этомъ сочиненіи авторъ касался тѣхъ же самыхъ вопросовъ, которые разсмотрѣны въ „Алгебрѣ“ и „Ариѳметикѣ“, но съ менѣе научной точки зрѣнія. Кромѣ Магомета-бенъ-Музы подъ такимъ же заглавіемъ были написаны сочиненія Синдъ-бенъ-Али и Синаномъ-бенъ-Алфатомъ. Сочиненія эти также утеряны. По предположенію Кантора, о содержаніи утеряннаго сочиненія Магомета-бенъ-Музы можно составить себѣ понятіе на основаніи дошедшаго до насъ сочиненія подъ тѣмъ же заглавіемъ. Сочиненіе это есть переводъ на латинскій языкъ сочиненія, написаннаго какимъ то Аврамомъ. Былъ-ли это извѣстный ученый еврей Ибнъ-Езра, жившій между 1093—1168 гг., или арабскій ученый Ибрагимъ, неизвѣстно. Сочиненіе это озаглавлено: Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit *). Большая часть вопросовъ, разсмотрѣнныхъ въ этомъ сочиненіи, сводятся на рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій вида $ax^2 = b$. Вопросы эти рѣшаются при помощи пріема чашекъ вѣсовъ, о которомъ мы будемъ говорить подробно впослѣдствіи. Другія задачи рѣшены при посредствѣ пріема, названнаго авторомъ *regula sermonis*, который есть ничто иное какъ часто встрѣчаемый методъ индусовъ производить дѣйствія въ обратномъ порядкѣ **).

Изложивъ содержаніе сочиненій Магомета-бенъ-Музы мы считаемъ необходимымъ сказать нѣсколько словъ объ томъ, въ чемъ состоялъ символическій пріемъ арабскихъ математиковъ при производствѣ алгебраическихъ дѣйствій. Неизвѣстную величину въ уравненіи, то что мы обыкновенно обозначаемъ черезъ x, арабскіе математики называли черезъ chaï —*вещь* ***) и обозначали символомъ ش, или также называли gidr или dschidr, т. е. *корень (radix)*, отъ арабскаго слова gadr—*корень растенія* ****). Вторую степень не-

---

*) Рукопись этого сочиненія издана Либри въ первомъ томѣ его „Histoire des sciences mathématiques en Italie“. См. Note XIV, pag. 304—376.

**) Указанія на труды Ибнъ-Езры находятся въ интересномъ изслѣдованіи. *M. Steinschneider*, Abraham Ibn Esra (Abraham Judaeus, Avenare). Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften im XII Jahrhundert. Помѣщено въ „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“, III Heft. Leipzig 1880 in-8, pag. 57—128.

По мнѣнію Штейншнейдера Ибнъ-Езра родился между 1093—1096 гг. въ Толедо; онъ былъ еврей. Кто былъ авторъ рукописи „Liber augmenti et diminutionis ect.“ Штейншнейдеръ не указываетъ, за недостаткомъ данныхъ.

***) Канторъ обращаетъ вниманіе, что названіе первой степени неизвѣстной у арабовъ терминомъ *schai*, напоминаетъ терминъ употребляемый въ папирусѣ Ринда для выраженія неизвѣстной *hau* (см. стр. 333).

****) Терминъ *gidr*, по мнѣнію Ганкеля, есть переводъ санскритскаго слова *mula*, т. е.

извѣстной величины x^2 арабы называли mâl — *имущество, собственность* *), для выраженія ея служилъ символъ ﻣ. Третею степень неизвѣстной величины, т. е. x^3, арабскіе математики называли kab—*кубъ* и выражали символомъ ﻛ. Извѣстную величину въ уравненіяхъ арабы называли прямо *числомъ* —derhem **). При производствѣ вычисленій и дѣйствій формулъ никакихъ не существовало, такъ какъ все производилось словесно; существовали только нѣкоторыя сокращенія. Какимъ образомъ писали арабскіе математики уравненія лучше всего можно видѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ, которые выражены латинскими словами, вмѣсто арабскихъ. Первый примѣръ заимствованъ изъ „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы:

Census et quinque radices equantur viginti quatuor

т. е.:

$$x^2+5x=24$$

Другой примѣръ изъ сочиненія Омара Алкгаиями:

Cubus, latera et numerus aequales sunt quadratis

т. е.:

$$x^3+bx+c=ax^2$$

Наконецъ приведемъ еще одинъ примѣръ уравненія, написаннаго арабскими знаками.

م   ش
١   ١٩ ل ٣٨

Уравненіе это, написанное нынѣ употребляемыми символами, выразится:

$$38=19x+x^2$$

Послѣдній примѣръ заимствованъ изъ сочиненія Магомета Алкалсади. Вотъ и все, что можно сказать объ символахъ, употребляемыхъ арабскими математиками.

Алкарги. Изъ числа арабскихъ писателей, жившихъ въ XI столѣтіи, особеннаго вниманія заслуживаетъ Алкарги. Онъ авторъ нѣсколькихъ математическихъ сочиненій, изъ которыхъ въ настоящее время извѣстны только два. Сочиненія эти составляютъ одно продолженіе другаго. Первое

корень растенія. Послѣднимъ выраженіемъ брамины иногда обозначали квадратный корень. Предположеніе Ганкеля заслуживаетъ вниманія, такъ какъ трудно предположить, чтобы терминъ *корень* возникъ въ двухъ совершенно различныхъ мѣстахъ независимо. У греческихъ математиковъ, какъ извѣстно, подобнаго термина несуществовало, они выражали его словомъ *сторона* πλευρά.

*) Названіе термина для квадрата неизвѣстной величины по мнѣнію Кантора напоминаетъ греческое слово δύναμις.

**) *Диргемъ* серебряная монета бывшая въ обращеніи у арабовъ.

60

изъ нихъ носитъ заглавіе „*Кафи филь-Гисабъ*“, т. е. „Все извѣстное въ Ариѳметикѣ“, а второе озаглавлено авторомъ „*Аль-Факри*“, вѣроятно по имени тогдашняго великаго визира, съ которымъ Алкарги находился въ близкихъ отношеніяхъ *). Первое изъ выше поименованныхъ сочиненій было издано весьма недавно Гохгеймомъ **), а второе въ 1853 г. извѣстнымъ Вепке ***). Сочиненія свои Алкарги писалъ около 1010 г.

Труды Алкарги заслуживаютъ особеннаго вниманія, такъ какъ при составленіи своихъ сочиненій, онъ пользовался почти исключительно трудами древнихъ греческихъ математиковъ. Это указываетъ на новое направленіе, которому стали слѣдовать арабскіе математики, пользовавшіеся до того времени почти исключительно индусскими источниками. Впрочемъ необходимо замѣтить, что еще ранѣе Алкарги, Магометъ-бенъ-Муза, а также Абулъ-Вефа, были знакомы съ нѣкоторыми сочиненіями древнихъ греческихъ геометровъ.

Первое изъ упомянутыхъ сочиненій Алкарги есть „Кафи-филъ-Гисабъ“; содержаніе его относиться къ различнымъ вычисленіямъ. Это есть сочиненіе ариѳметическаго характера, хотя многое въ немъ относится къ Геометріи, а также Алгебрѣ. Второе сочиненіе, продолженіе перваго, „Аль-Факри“, есть сочиненіе по Алгебрѣ. Познакомимся съ содержаніемъ обѣихъ сочиненій. Начнемъ съ перваго.

„Кафи-филъ-Гисабъ“ заключаетъ 70 главъ и подобно почти всѣмъ математическимъ сочиненіямъ, написаннымъ арабами, начинается вступленіемъ, въ которомъ авторъ обращается къ читателямъ и взываетъ къ милосердію Бога. Въ вступленіи Алкарги говоритъ о системѣ чиселъ, при чемъ упоминаетъ, что всѣ числа, не принимая во вниманіе ихъ количества, а только имъ присущія свойства, можно разсматривать по отношенію къ ихъ *порядку*, *порядку единицъ* и *названію*. Подъ именемъ *порядка* авторъ разумѣетъ единицы, десятки и сотни. Эти три наименованія, по понятіямъ Алкарги, служатъ основаніемъ для каждаго числа. Подъ именемъ *порядка единицъ* Алкарги понимаетъ слѣдующее, онъ говоритъ: „порядковъ еди

---

*) Имя великаго визира было Abu-Gâlib, а прозваніе Fakhr-ul-Mulk, т. е. *слава государства*.

**) Сочиненіе это издалъ Гохгеймъ подъ заглавіемъ: Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî nach der auf der Herzoglich-Gothaischen Schlossbibliothek befindlichen Handschrift bearbeitet von Dr. *Ad. Hochheim*. I—II—III Heft. Halle. 1878—79. in-4.

***) Изъ этого сочиненія были сдѣланы извлеченія Вепке, которыя изданы подъ заглавіемъ: *Woepcke*, Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî; précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les arabes. Paris, 1853, in-8.

ницъ есть девять, ясно, что наивысшее число между единицами есть девять, между десятками девяносто, между сотнями—девятсотъ, и такъ высшее число, которое ты находишь въ каждомъ порядкѣ, имѣетъ девять порядковъ единицъ". *Названій*, т. е. наименованій для обозначенія различныхъ предметовъ, по опредѣленію Алкарги, существуетъ двѣнадцать, именно: одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сто и тысяча. Послѣ вступленія авторъ начинаетъ излагать Ариѳметику, которой посвящены главы I—XLIII. Алкарги показываетъ основныя ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, приведеніе дробей къ одному знаменателю; повѣрку умноженія при посредствѣ числа 9 и 11; пропорціи, шестидесятичныя дроби, значеніе числа 60 при дѣленіи на градусы, различныя задачи на отношенія различныхъ видовъ, извлеченіе квадратныхъ корней изъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ; правило товарищества. Относительно дробей Алкарги замѣчаетъ (гл. X), что ихъ очень много, но что въ арабскомъ языкѣ существуютъ отдѣльныя выраженія только для девяти, именно: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$ и $^1/_{10}$. Дроби эти Алкарги называетъ *простыми* *). Остальныхъ дробей, по его мнѣнію, безконечно много; всѣ онѣ составлены изъ простыхъ **). Единицу, говоритъ Алкарги, можно дѣлить до безконечности, но люди обыкновенно, дѣлятъ ее на опредѣленное число частей. Дѣленіе это въ различныхъ мѣстахъ различно. Относительно дѣленія на 60, Алкарги говоритъ, что дѣленіе это заимствовано арабами у „древнихъ"; подъ именемъ древнихъ они понимали индусовъ и грековъ. Шестидесятую часть единицы онъ называетъ *aschîr*. Кромѣ того онъ замѣчаетъ, что единицу также иногда дѣлятъ на 48 частей, изъ которыхъ каждая носитъ названіе *hâbba*. Далѣе показаны правила обращенія частей одного изъ этихъ наименованій въ другія. Градусъ, Алкарги, дѣлитъ на 60 минутъ, минуту на 60 секундъ, секунду на 60 терцій, терцію на 60 квартъ, и т. д. на квинты, сексты, септимы, октавы, ноны, децимы и ундецимы, и до безконечности. При такомъ дѣленіи, авторъ замѣчаетъ, „минута есть одна шестая часть десятой части градуса". Подобное выраженіе дробей встрѣчается во всемъ сочиненіи. Венке и Гохгеймъ выразили его

---

*) Другія дроби, какъ напримѣръ $^1/_{18}$, арабскіе математики выражали въ видѣ произведенія простыхъ дробей, т. е. вмѣсто *одной восемнадцатой* говорили *половина одной девятой*. Всѣ дроби неподходящія подъ это правило они называли *глухими*, какъ напр. $^1/_{17}$. Канторъ обращаетъ вниманіе на значеніе дробей съ числителемъ равнымъ единицѣ у арабовъ, и на извѣстный пріемъ египетскихъ математиковъ выражать всякую дробь въ видѣ суммы дробей съ числителями равными единицѣ (см. стр. 332).

**) Позднѣйшіе арабскіе писатели различали пять видовъ дробей; объ этомъ мы будемъ говорить впослѣдствіи.

символомъ $\frac{1}{10|}\frac{1}{6}$. Особенное вниманіе обращено Алкарги на различныя дѣйствія надъ частями градуса, минутъ, секундъ и т. д. Корень Алкарги опредѣляетъ слѣдующимъ образомъ: „корень есть названіе всякой величины, которая сама на себя умножена. Различаютъ два рода корней: *выразимые* (выговариваемые) и *невыразимые* (невыговариваемые). Примѣръ первыхъ: $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{110\frac{1}{4}}$, примѣръ вторыхъ: $\sqrt{130}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{20}$. Извлечь корень, значитъ найти число, къ которому-бы такъ относилась единица, какъ это число относиться къ подкоренной величинѣ. Знай, что между единицами есть нѣкоторыя числа изъ которыхъ возможно извлечь корень, между десятками нѣтъ, между сотнями нѣкоторые, между тысячами нѣтъ и такъ далѣе въ томъ же порядкѣ *)". Затѣмъ слѣдуетъ объясненіе этого. При извлеченіи корней изъ чиселъ Алкарги пользуется выраженіемъ:

$$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

такъ какъ онъ говоритъ: „если раздѣлишь число на двѣ части и умножешь каждую саму на себя, и кромѣ того умножешь одну на удвоенную вторую, то сумма эта будетъ равна квадрату даннаго числа. На этомъ основано извлеченіе корней". При извлеченіи корней квадратныхъ изъ чиселъ, по приближенію, Алкарги даетъ правило, которое выражается слѣдующей формулой, если $m=a^2+r$:

$$\sqrt{m}=a+\frac{r}{2a+1}$$

Кромѣ того Алкарги даетъ еще правила для болѣе точнаго приближенія.

Съ XLIV главы начинается Геометрія или какъ Алкарги выражается „измѣреніе". Авторъ начинаетъ съ опредѣленія: точки, линіи, поверхности и тѣла. Между этими представленіями самое совершенное, по понятіямъ Алкарги, есть тѣло. Опредѣленія напоминаютъ опредѣленія, находящіяся въ „Началахъ" Евклида. Линіи онъ различаетъ двухъ видовъ: прямыя и кривыя. Прямая линія есть кратчайшая, изъ линій, проведенныхъ между двумя точками. Прямая линія имѣетъ семь названій именно: сторона, наискось идущая (kutr), горизонтальная, перпендикуляръ, ребро, стрѣла и хорда. Названія эти Алкарги поясняетъ слѣдующимъ образомъ: „если нѣсколько прямыхъ линій ограничиваютъ фигуру, то онѣ называются *сторонами*. Если прямая линія дѣлитъ кругъ или четыреугольникъ на двѣ равныя части, и если при этомъ она есть наибольшая между прямыми, проведенными внутри этихъ фигуръ, то ее называютъ *кутръ*. Если заставить

---

*) Арабы называли *нѣмыми* всѣ числа, которыя не дѣлятся на числа отъ 2 до 9, и которыя кромѣ того не суть полные квадраты.

прямую линію скользить по другой прямой линіи такъ, чтобы оба угла, лежащіе по обѣ стороны скользящей были равны, то первая изъ прямыхъ называется *горизонтальной*, а вторая *перпендикулярной*. Прямая линія, соединяющая концы горизонтальной и перпендикулярной линій извѣстна подъ именемъ *ребра*. Во всякомъ треугольникѣ есть два ребра. Прямая, соединяющая оконечности дуги называется *хордой*. Если провесть внутри круга, перпендикулярно къ дугѣ прямую, въ томъ мѣстѣ, гдѣ дуга наиболѣе широка, то отрѣзокъ этотъ называется *стрѣлой* *). Кривыя линіи суть тѣ, которыя не прямыя. Ихъ дѣлятъ на два рода: линіи круговыя и некруговыя. Линіи круговыя суть тѣ, которыя построены на основаніи опредѣленныхъ, общихъ правилъ. Число линій некруговыхъ безконечно велико. Углы бываютъ трехъ родовъ: прямые, острые и тупые. Прямые суть тѣ, которыхъ стороны перпендикуляры. Фигуръ существуетъ пять видовъ: четыреугольникъ, треугольникъ, кругъ, дуга и многоугольникъ. Четыреугольниковъ различаютъ три вида: параллелограммы, трапеціи и четыреугольники съ непараллельными сторонами. Четыреугольники съ параллельными сторонами дѣлятся на два класса: на прямоугольные и косоугольные. Каждый изъ этихъ классовъ, въ свою очередь, заключаетъ два рода: равносторонніе и разносторонніе".

Площадь прямоугольныхъ четыреугольниковъ Алкарги находитъ умножая основаніе на высоту, которая есть одно изъ измѣреній этихъ фигуръ. Для нахожденія діагонали такихъ фигуръ авторъ даетъ слѣдующее правило: „если ты желаешь найти діагональ такой фигуры, то найди корень изъ суммы квадратовъ длины и ширины, такъ какъ въ каждомъ прямомъ углѣ, сумма квадратовъ сторонъ его заключающихъ, равна квадрату прямой, соединяющей концы этихъ прямыхъ". Это есть ничто иное какъ предложеніе Пиѳагора.

При измѣреніи площадей косоугольныхъ равностороннихъ четыреугольниковъ дано слѣдующее правило: „надо умножить половину одной изъ діагоналей на другую діагональ. Подобныя фигуры дѣлятся діагоналями на четыре прямые угла, и каждая изъ сторонъ фигуры стягиваетъ стороны прямаго угла". При измѣреніи разностороннихъ косоугольныхъ четыреугольниковъ правило указываетъ умножить основаніе на высоту. При измѣреніи площадей трапецій въ правилѣ указано: умножать полусумму параллельныхъ сторонъ на высоту. Если-же требуется отыскать площадь четыреугольника съ непараллельными сторонами, то по словамъ Алкарги, „наилучше по-

---

*) Названіе это было также извѣстно индусамъ (см. стр. 440), отъ которыхъ оно вѣроятно перешло къ арабамъ.

ступить слѣдующимъ образомъ: разложить данный четыреугольникъ на два треугольника и приложить къ ихъ измѣренію то, что будетъ сказано объ этомъ въ послѣдствіи". При измѣреніи площадей четыреугольниковъ Алкарги дѣлаетъ слѣдующее замѣчаніе: „Знай слѣдующее: измѣреніе фигуръ, совершенно схоже съ взвѣшиваніемъ тяжестей, съ измѣреніемъ вмѣстимостей, или съ измѣреніемъ длины локтемъ, или съ измѣреніемъ квадратной фигуры неизвѣстной величины, квадратными мѣрами. При этомъ исходятъ отъ мѣръ извѣстныхъ и примѣняютъ ихъ къ измѣренію площадей, совершенно подобно тому, какъ вѣсъ диргема при измѣреніи вѣсомыхъ предметовъ. Если тебя просятъ опредѣлить мѣру площади, то спроси предварительно какая квадратная мѣра примѣняется, при чемъ ты единицу длины, напр. локоть, умножаешь самъ на себя".

Показавъ измѣреніе площадей четыреугольныхъ фигуръ, Алкарги переходитъ къ треугольникамъ (гл. XLV). Опредѣливъ треугольникъ Алкарги замѣчаетъ, что въ немъ всегда сумма двухъ сторонъ болѣе третьей, что въ треугольникѣ всегда двое изъ угловъ острые, третій же можетъ быть прямой, острый или тупой. Въ зависимости отъ этихъ угловъ треугольникъ называютъ: прямоугольнымъ, остроугольнымъ или тупоугольнымъ. Для того, чтобы узнать къ какому изъ этихъ трехъ видовъ принадлежитъ треугольникъ, коего части извѣстны, Алкарги даетъ слѣдующее правило: „если квадратъ самой длинной изъ сторонъ равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ двухъ сторонъ, то треугольникъ прямоугольный; если этотъ квадратъ больше суммы, то треугольникъ тупоугольный, если же меньше, то треугольникъ будетъ остроугольный".

Прямоугольные треугольники Алкарги дѣлитъ на два класса, на равнобедренные и разносторонніе. Площадь такихъ треугольниковъ онъ находитъ взявъ произведеніе половины основанія на высоту. Остроугольные треугольники онъ дѣлитъ на три вида: равносторонніе, равнобедренные и разносторонніе. Алкарги извѣстно, что въ равнобедренномъ треугольникѣ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, дѣлитъ его пополамъ. Высоту такого треугольника онъ находитъ по формулѣ:

$$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Далѣе дано правило, какъ найти вообще отрѣзки основанія, на которые оно дѣлится перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ противолежащей высоты. Правило дано для частнаго случая, именно когда стороны треугольника выражены числами 13, 14 и 15 *). Также даетъ правило Алкарги для

*) Мы уже выше замѣтили, что такой треугольникъ встрѣчается въ сочиненіяхъ Бра-

нахожденія квадрата стороны противолежащей острому углу въ косоугольномъ треугольникѣ. Правило дано для частнаго случая, именно для треугольника, коего стороны 13, 14 и 15. Назвавъ стороны треугольника чрезъ a, b и c, а отрѣзокъ основанія, между вершиной остраго угла и основаніемъ высоты чрезъ m, правило, данное Алкарги выразится такой формулой:

$$a^2+2cm=c^2+b^2$$

или:

$$m=\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$$

Алкарги извѣстно, что высоты, проведенныя изъ трехъ вершинъ остроугольнаго треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ внутри треугольника; при этомъ принятъ во вниманіе тотъ же треугольникъ съ сторонами 13, 14 и 15. Относительно прямоугольнаго треугольника Алкарги замѣчаетъ, что въ немъ можно провесть только одну высоту, а оба ребра суть остальныя двѣ высоты. Тупоугольные треугольники Алкарги дѣлитъ также на два вида: равнобедренные и разносторонние. При этомъ онъ замѣчаетъ, что сторона, противолежащая тупому углу будетъ наибольшая въ такомъ треугольникѣ, и что вообще во всѣхъ треугольникахъ, противъ большаго угла лежитъ и большая сторона.

Площади этихъ треугольниковъ Алкарги находитъ по извѣстному правилу, умноживъ основаніе на половину высоты. Кромѣ того также дано Алкарги правило для нахожденія площади треугольника въ функціи сторонъ. Правило, данное имъ, приводится къ выраженію:

$$S=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$

въ которомъ S площадь, p периметръ а a, b и c стороны треугольника *).

Для нахожденія площади круга (гл. XLVI) Алкарги даетъ слѣдующія правила: „возьми произведеніе изъ половины діаметра и половины окружности, или изъ четверти діаметра на цѣлую окружность, или изъ четверти окружности на цѣлый діаметръ, или умножь діаметръ самъ на себя

магупты и Баскары, а еще ранѣе у Герона Старшаго Треугольникъ этотъ также встрѣчается въ „Алгебрѣ“ Магомета-бенъ-Музы, который находитъ кромѣ отрѣзковъ основанія еще высоту.

*) Мы уже выше замѣтили (см. стр. 234), что формула эта находиться въ сочиненіи по Геометріи, написанным тремя сыновьями Музы-бенъ-Шакера. Кромѣ того выраженіе это извѣстно Герону Старшему, а также Брамагуптѣ.

и изъ произведенія вычти сначала $\frac{1}{7}$, а потомъ $\frac{1}{7}\ \frac{1}{2}$ этого произведенія; или же умножь окружность саму на себя и произведеніе раздѣли на $12\frac{4}{7}$". Правила эти легко выразить слѣдующими формулами:

$$K = \frac{d}{2}\cdot\frac{u}{2} = \frac{d}{4}\cdot u = \frac{u}{4}\cdot d = d^2\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\ \frac{1}{2}\right) = \frac{u^2}{12\frac{4}{7}}.$$

Длину окружности онъ находитъ умножая діаметръ на $3\frac{1}{7}$, а длину діаметра, раздѣливъ длину окружности на $3\frac{1}{2}$. Площадь сектора онъ находитъ взявъ произведеніе радіуса и половины дуги *).

Указавъ на правила, которыми слѣдуетъ пользоваться при измѣреніи круга, Алкарги переходитъ къ измѣренію сегментовъ (гл. XLVII). Сегменты онъ дѣлитъ на три рода: полукругъ, сегментъ большій полукруга и сегментъ меньшій полукруга. Въ первомъ изъ нихъ, по словамъ Алкарги, хорда вдвое больше стрѣлы, во второмъ стрѣла больше половины хорды и въ третьемъ стрѣла меньше половины хорды. При измѣреніи этихъ сегментовъ указаны слѣдующія правила: „для измѣренія сегментовъ перваго рода надо умножить половину хорды на половину соотвѣтствующей дуги. При измѣреніи площадей остальныхъ двухъ родовъ сегментовъ надо сперва найти половину діаметра круга, соотвѣтствующаго этому сегменту. При этомъ слѣдуетъ поступить слѣдующимъ образомъ: нужно квадратъ половины хорды раздѣлить на стрѣлу и частное придать къ стрѣлѣ. Полученная величина будетъ діаметръ, такъ какъ здѣсь двѣ хорды въ кругѣ пересѣкаются; если ты одну изъ частей одной изъ хордъ умножешь на другую, то произведеніе равно произведенію отрѣзковъ другой хорды. Если тебѣ извѣстенъ діаметръ круга, то умножай его половину на половину дуги, измѣряемой фигуры, и замѣть результатъ, затѣмъ ищи разность между половиной діаметра и стрѣлой сегмента и умножь ее на половину хорды. Полученное произведеніе придай къ выше замѣченному результату, если сегментъ больше полукруга, или вычти его изъ замѣченнаго результата если сегментъ меньше полукруга. Полученныя величины будутъ искомыя. Пойми это и слѣдуй этому". Называя чрезъ p стрѣлу, чрезъ b дугу и чрезъ s хорду,

---

*) Выраженія для π, именно $\pi = \sqrt{10}$ и $\pi = \frac{62832}{20000}$, извѣстныя Магомету-бенъ-Музѣ и заимствованныя имъ вѣроятно изъ сочиненій индусовъ, повидимому совершенно неизвѣстны Алкарги, иначе онъ бы о нихъ упомянулъ.

го правила, данныя Алкарги для обоихъ случаевъ, заключаются въ слѣдующемъ выраженіи *):

$$\text{Пл. сегм.} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{p}+p\right]\frac{b}{2} - \frac{s}{2}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{p}+p\right]-p\right]^{**)}$$

Выраженія для дуги въ функціи хорды, и обратное, Алкарги считаетъ приближенными. Для нахожденія хорды и стрѣлы извѣстной дуги надо предварительно найти діаметръ круга, соотвѣтствующаго этой дугѣ. Алкарги извѣстно, что радіусъ круга равенъ хордѣ, соотвѣтствующей шестой части окружности. Это онъ выражаетъ слѣдующими словами: „половина діаметра есть хорда, третьей части дуги, равной полукружности". Далѣе онъ находитъ выраженіе для стороны вписаннаго въ кругъ двѣнадцатиугольника. Выраженіе это выражено въ слѣдующей довольно сложной формѣ: „если ты изъ квадрата половины діаметра вычтешь квадратъ половины хорды третьей части полукружности, изъ разности извлечешь корень, который вычтешь изъ половины діаметра, полученную разность умножешь саму на себя и прибавишь къ ней квадратъ половины хорды третьей части, то полученный результатъ будетъ равенъ квадрату хорды, соотвѣтствующей шестой части полуокружности". Выраженіе это можно выразить слѣдующей формулой, назвавъ чрезъ S сторону вписаннаго въ кругъ двѣнадцатиугольника, а чрезъ d—діаметръ:

$$S^2 = \left[\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{4}\right)^2}\right]^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2$$

привесть это выраженіе къ болѣе простому виду:

$$S^2 = \frac{d^2}{2} - \frac{d^2}{4}\sqrt{3}$$

Алкарги не умѣетъ. Далѣе указаны еще нѣкоторыя правила, какъ по даннымъ нѣкоторымъ частямъ круга, могутъ быть отысканы другія. Также из-

*) Магометъ-бенъ-Муза также въ своей „Алгебрѣ" находитъ площадь сегмента круга.

**) Въ сочиненіи „*De re rustica*" (кн. V, гл. 2) римскаго писателя I-го вѣка Колумеллы также находиться выраженіе для нахожденія площади сегмента круга, для частнаго случая, когда хорда равна 16, а стрѣла 4. Выраженіе слѣдующее: $\frac{(16+4)4}{2} + \left(\frac{16}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{14}$. Выраженіе это Колумелла вѣроятно заимствовалъ изъ сочиненій Герона Старшаго.

вѣстна Алкарги теорема Птоломея, которую онъ выражаетъ въ слѣдующемъ видѣ: „всякій четыреугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ, если произведеніе его діагоналей, равно суммѣ двухъ фигуръ, изъ которыхъ каждая составлена изъ произведенія двухъ противолежащихъ сторонъ четыреугольника“. Относительно правилъ для измѣренія длины дуги Алкарги замѣчаетъ, что лучше если эти измѣренія сдѣланы непосредственно, т. е. при помощи веревки, тогда всѣ указанныя имъ правила можно опустить.

Послѣ измѣренія круга и частей его Алкарги переходитъ къ многоугольникамъ (гл. XLVIII). Площади правильныхъ многоугольниковъ онъ находитъ слѣдующимъ образомъ, беретъ половину діаметра круга, описаннаго около многоугольника, и умножаетъ его на половину периметра, полученное произведеніе выражаетъ площадь многоугольника. Для нахожденія діаметра круга, описаннаго около правильнаго многоугольника, Алкарги даетъ правило, которое можно выразить слѣдующей формулой, въ которой D—діаметръ описаннаго круга, n—число сторонъ многоугольника, а s длина одной стороны:

$$D^2=\frac{(n^2-n+6)s^2}{9}$$

число 6 есть постоянная величина, независящая отъ числа сторонъ *). Изъ послѣдняго выраженія Алкарги находитъ выраженіе для діаметра круга, вписаннаго въ правильный многоугольникъ, въ видѣ выраженія, которое можетъ быть представлено формулой:

$$d^2=\frac{(n^2-n+6)s^2}{9}-s^2$$

въ которомъ d есть величина діаметра круга вписаннаго. Правила для нахожденія площадей правильныхъ многоугольниковъ Алкарги поясняетъ на частномъ примѣрѣ, именно на шестиугольникѣ.

Для нахожденія поверхности шара Алкарги даетъ слѣдующее правило: „умножь половину діаметра на половину окружности, а полученное произведеніе на 4“. Правило это можно выразить слѣдующей формулой:

$$S=4\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{u}{2}$$

*) Подобное же выраженіе находиться въ сочиненіи Герона Старшаго „Liber Geoponicus“. Только выраженіе немного иное, именно $D=\frac{n}{8}\cdot s$

При этомъ Алкарги замѣчаетъ, что „древнимъ" извѣстно другое выраженіе, которое выражается формулой:

$$S = 4d^2\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Свое выраженіе Алкарги считаетъ болѣе точнымъ.

Боковую поверхность круговаго цилиндра онъ находитъ по формулѣ, въ которой u окружность основанія, а h высота:

$$S = u \,.\, h$$

Боковую поверхность усѣченнаго конуса онъ находитъ по извѣстной формулѣ,

$$S = \frac{U + u}{2} \,.\, s$$

въ которой U и u окружности нижняго и верхняго основаній, а s образующая линія. Усѣченный конусъ Алкарги разсматриваетъ какъ особый видъ цилиндра, въ которомъ всѣ горизонтальныя сѣченія различны. Боковую поверхность конуса онъ находитъ по извѣстной формулѣ:

$$S = \frac{u}{2} \,.\, s.$$

Указавъ на правила, которыя слѣдуетъ прилагать при нахожденіи поверхностей тѣлъ, Алкарги переходитъ къ нахожденію ихъ объемовъ. Тѣла онъ дѣлитъ на *пять* родовъ. Къ *первому* роду принадлежатъ тѣла, въ которыхъ оба основанія одинаковы. Объемъ ихъ находятъ умножая площадь основанія на высоту. Ко *второму* роду принадлежитъ конусъ, т. е. тѣла, которыя начинаются одной площадью и оканчиваются точкою. Объемъ ихъ равенъ площади основанія на треть высоты. Къ *третьему* роду принадлежитъ шаръ. Объемъ его онъ находитъ по правилу, которое можетъ быть выражено слѣдующей формулой:

$$V = d^3\left[1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}\right]^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot 3\,\frac{69}{98}.$$

Кромѣ приведеннаго правила Алкарги находитъ объемъ шара еще инымъ образомъ. Онъ беретъ кубъ изъ воску и взвѣшиваетъ его; затѣмъ онъ дѣлаетъ изъ него шаръ, коего-бы діаметръ равнялся ребру куба и снова взвѣшиваетъ его. Если вѣсъ куба былъ 30 диргемовъ, то вѣсъ шара будетъ немного менѣе $18\frac{2}{3}$. Послѣ этого онъ возвышаетъ діаметръ въ кубъ и вы-

вычитаетъ изъ него $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{5}$ частей куба діаметра. Правило данное Алкарги выражается формулой вида:

$$V=d^3\left[1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{5}\right]=\frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3\cdot 3\frac{11}{15}.$$

Сравнивая полученныя два выраженія для объема шара, видимъ, что второе больше перваго на:

$$\frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3\frac{43}{1470}$$

Впрочемъ, самъ Алкарги замѣчаетъ, что первое правило лучше. Кромѣ того онъ указываетъ, какъ найти объемъ шароваго слоя.

Къ *четвертому* роду тѣлъ Алкарги причисляетъ дискъ и вѣнки. Для нахожденія объема этихъ тѣлъ онъ даетъ слѣдующее правило: „умножь полусумму внутренней и внѣшней окружностей на ширину, а полученное произведеніе на длину". Правило это заключается въ слѣдующей формулѣ:

$$V=\frac{U+u}{2}\cdot(R-r)\cdot h$$

Къ *пятому* роду тѣлъ Алкарги относитъ усѣченный конусъ. Объемъ его онъ находитъ по правилу, которое можетъ быть выражено слѣдующей формулой:

$$V=\frac{Dh}{D-d}\cdot\frac{D^2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{Dh}{D-d}-h\right)\cdot\frac{d^2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

въ которой D и d діаметры верхняго и нижняго основаній, а h высота. Правило это онъ поясняетъ на примѣрѣ.

Далѣе (гл. L), Алкарги находитъ объемъ усѣченной пирамиды для частнаго случая, а также находитъ высоту пирамиды, дополняющей данную усѣченную до цѣлой. Если верхнее и нижнее основанія пирамиды суть многоугольники, вписанные въ круги, то объемъ ея находиться по правилу, которое можетъ быть представлено формулой:

$$V=h.\frac{G+g+\frac{3}{8}\sqrt{3}\,Dd}{3}$$

въ которой g и G площади верхняго и нижняго основаній пирамиды,

h—высота, а D и d діаметры круговъ. Если данное тѣло есть усѣченный конусъ, то объемъ его онъ даетъ въ видѣ выраженія:

$$V = h \cdot \frac{(Dd + D^2 + d^2)\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}\right)}{3}.$$

Въ концѣ главы Алкарги даетъ общее правило для нахожденія объемовъ тѣлъ, когда верхнее основаніе меньше или равно нижнему. Правило это заключается въ формулѣ.

$$V = h \cdot \frac{G + g + \sqrt{Gg}}{3}$$

Покончивъ съ вопросомъ объ измѣреніи объемовъ тѣлъ Алкарги переходитъ къ другимъ вопросамъ, имѣющимъ чисто практическое значеніе, какъ напр. опредѣленіе числа камней или кирпичей, необходимыхъ для строенія (гл. LII); нивеллировка мѣстности (гл. LIII), при чемъ онъ даетъ описаніе различныхъ инструментовъ, при посредствѣ которыхъ можно опредѣлить разность высотъ двухъ мѣстъ или ихъ высоту и т. п.

Одну изъ главъ своего сочиненія (гл. LI) Алкарги посвятилъ рѣшенію нѣкоторыхъ геометрическихъ вопросовъ, имѣющихъ по его словамъ особенный интересъ. Приведемъ нѣкоторые изъ этихъ вопросовъ:

1) „Найти площадь прямоугольника, котораго длина вдвое больше ширины, и коего площадь равна периметру? Рѣшеніе состоитъ въ слѣдующемъ: онъ полагаетъ длину равной $2x$, тогда ширина равна x. Площадь будетъ $2x^2$, но по условію $2x^2 = 6x$, слѣдовательно $x = 3$, это и будетъ ширина".

2) „Найти площадь равносторонняго четыреугольника, коего діагональ равна площади? Рѣшеніе: если діагональ x, то площадь равна $\frac{x^2}{2}$, но по условію вопроса $\frac{x^2}{2} = x$, слѣдов. $x = 2$, это и будетъ діагональ".

3) „Найти стороны прямоугольника, коего площадь равна суммѣ периметра и діагонали, и коего основаніе въ три раза больше высоты? Рѣшеніе: если высота x, то основаніе $3x$, а площадь $3x^2$. Сумма периметра и діагонали будетъ $8x + \sqrt{10x^2}$, а по условію вопроса $3x^2 = 8x + \sqrt{10x^2}$, откуда $x = 2\frac{2}{3} + \sqrt{1\frac{1}{9}}$. Это и есть высота, а основаніе будетъ $8 + \sqrt{10}$".

4) „Найти діаметръ круга, коего площадь равна 100? Пусть діаметръ x, квадратъ его x^2, отнимаемъ $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}$ квадрата діаметра. Остатокъ бу-

детъ равенъ $\frac{5}{7}x^2+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}x^2$ и это должно быть равно 100. Изъ равенства слѣдуетъ $x^2=127\frac{3}{11}$; корень изъ этого числа есть діаметръ".

5) „Среди озера ростетъ трость, выходящая на 5 локтей надъ водой. Вслѣдствіи вѣтра трость наклонилась и верхушкой касается поверхности воды. Разстояніе между послѣднимъ мѣстомъ и мѣстомъ гдѣ первоначально выходила трость изъ воды есть 10 локтей. Опредѣлить длину трости. Рѣшеніе: возвысь въ квадратъ 10, раздѣли потомъ на 5, т. е. на то число локтей, на которые трость выходитъ изъ воды. Частное придай къ 5. Полученный результатъ будетъ вдвое больше длины трости, а потому половина его равна длинѣ трости, т. е. есть $12\frac{1}{2}$ локтей. Потому что въ этомъ мѣстѣ трость равна половинѣ діаметра круга, а 5 равно стрѣлѣ дуги, коей половина хорды есть 10, такъ какъ вершина трости при наклоненіи совпадаетъ съ линіей погруженія".

6) „На двухъ противоположныхъ берегахъ рѣки стоитъ по одной пальмѣ. Вышина одной 20 локтей, другой 30 локтей. Ширина рѣки 50 локтей. На каждой изъ пальмъ сидитъ по птицѣ. Обѣ птицы видятъ въ рѣкѣ рыбу и одновременно летятъ по прямой линіи на нее. Одновременно онѣ достигаютъ поверхности воды въ точкѣ, находящейся на прямой, соединяющей корни пальмъ. Опредѣлить длину путей, которые пролетѣли птицы? Опредѣлить мѣсто встрѣчи. Рѣшеніе: положи равнымъ x разстояніе мѣста встрѣчи отъ корней большей изъ пальмъ, возвысь въ квадратъ, то получишь x^2. Прибавь къ этому 900, т. е. квадратъ высоты большей пальмы, и положи эту сумму равной квадрату $50-x$, т. е. $2500+x^2-100x$, увеличенному на квадратъ высоты другой пальмы. Такимъ путемъ получишь $x=20$. Это будетъ разстояніе мѣста встрѣчи отъ корней большей изъ пальмъ. Разстояніе этой точки отъ корней меньшей пальмы будетъ равно 30. Прямая, которую пролетѣли каждая изъ птицъ, равна $\sqrt{1300}$".

Послѣдняя задача приводится очевидно къ рѣшенію уравненія:

$$x^2+900=(50-x)^2+400.$$

Обѣ послѣднія задачи основаны на Пиѳагоровой теоремѣ. Задачи эти мы встрѣчали уже выше у китайцевъ и индусовъ, подъ именемъ „задачи о бамбуковыхъ тростяхъ", только въ немного иной формѣ. Мы считали не лишнимъ привесть нѣкоторыя задачи, которымъ Алкарги придавалъ особенное значеніе и указали на пріемы, примѣненные имъ при ихъ рѣшеніи.

Послѣ практическихъ приложеній, авторъ переходитъ собственно къ Алгебрѣ, которая начинается съ LIV главы, озаглавленной „шесть алгебраи-

ческихъ видовъ". Въ началѣ главы Алкарги говоритъ слѣдующее: „въ настоящемъ сочиненіи мы помѣстили все необходимое для желающаго весть счетныя книги и производить вычисленія; само заглавіе сочиненія показываетъ, что въ немъ все необходимое, и что всѣ другія вспомогательныя средства излишни. Кто только усвоилъ себѣ все изложенное до сихъ поръ, тотъ будетъ въ состояніи производить съ умѣніемъ всѣ встрѣчаемыя имъ вычисленія. Между тѣмъ я нашолъ, что для вычисленій весьма остроумнымъ вспомогательнымъ и облегчающимъ средствомъ служитъ примѣненіе ***al-dschabr*** и ***al-mukâbalah*** *). Вслѣдствіе этого я покажу шесть формъ и все къ нимъ относящееся".

„Знай, что все вычисленіе состоитъ въ томъ, чтобы изъ извѣстныхъ и данныхъ величинъ опредѣлить неизвѣстныя. Цѣль эту можно достигнуть тремя путями. Первый, самый простой, состоитъ въ примѣненіи къ вопросу дѣйствія **), которое сводитъ его на правило товарищества. Навыкъ въ производствѣ и примѣненіи указаннаго можно пріобрѣсть только долгимъ опытомъ и знаніемъ извѣстныхъ основныхъ правилъ, которыя изложены въ моемъ сочиненіи „Книга чудесъ" ***). Второй путь состоитъ въ томъ, что вопросъ рѣшаютъ въ зависимости отъ условій. Этотъ путь оказываетъ вѣрное пособіе. Третій путь состоитъ въ примѣненіи правилъ **al-dschabr** и **al-mukâbala**, т. е. сложенія и вычитанія, умноженія и дѣленія, суммы и разности, отношеній и собственно дѣйствій *алъ-джабръ* и *аль-мукабила*,—и въ раскрытіи неизвѣстныхъ".

Неизвѣстную величину Алкарги, подобно Магомету-бенъ-Музѣ, обозначаетъ безразлично чрезъ ***schai*** или чрезъ ***dschizr***, а квадратъ ея чрезъ ***mâl***; четвертую степень x^4 онъ называетъ ***квадратомъ—квадрата.*** Затѣмъ онъ переходитъ къ умноженію многочленныхъ алгебраическихъ выраженій ****) (гл. LV) и рѣшаетъ нѣсколько частныхъ примѣровъ, какъ напр.:

$$(3x^2+2x+4)(2x^2+3x+5)=6x^4+13x^3+29x^2+22x+20 .$$

Правила которыми слѣдуетъ руководствоваться при умноженіи, по словамъ Алкарги, состоятъ въ слѣдующемъ: „произведеніе двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ равно положительному, а произведеніе положи-

---

*) Приставка *al* въ арабскихъ словахъ выражаетъ собою членъ, соотвѣтствующій французскому *le* или нѣмецкому *der*. На русскомъ языкѣ безразлично пишутъ *алъ* и *аль*; правильнѣе *алъ*.

**) Подъ названіемъ *дѣйствія* авторъ понимаетъ *пропорціи*.

***) По арабски *al-badî*. Сочиненіе это утеряно и содержаніе его неизвѣстно.

****) Алкарги различаетъ два рода умноженій, именно. умноженіе одночленныхъ выраженій *mufrad* и умноженіе многочленныхъ выраженій—*murâkkab*.

тельнаго и отрицательнаго равно отрицательному". Правило это онъ поясняетъ на частныхъ примѣрахъ (гл. LVII). Послѣ этого Алкарги переходитъ къ различнымъ примѣрамъ, какъ напр. $\frac{20}{x}.5$, $\frac{10}{x}.\frac{10}{2x}$, $\sqrt{5}.3$, $\sqrt{10}.\frac{1}{2}$, для которыхъ онъ даетъ правила. Затѣмъ Алкарги переходитъ къ дѣленію (гл. LIX), которое онъ начинаетъ съ того, что замѣчаетъ, что $-x$ дѣленное на $-x$ равно $+1$, $-x^2$ дѣленное на $-x$ равно $+x$, x^3 дѣленное на $+x^3$ равно $+1$. При дѣленіи величинъ, въ которыя входятъ корни, ему извѣстно правило $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Послѣ дѣленія Алкарги переходитъ къ пропорціямъ, сложенію и вычитанію алгебраическихъ выраженій (гл. LX, LXI, LXII, LXIII, LXIV и LXV). Сложеніе и вычитаніе онъ производитъ соединяя подобные члены въ одинъ. О пропорціяхъ онъ упоминаетъ только мимоходомъ, такъ какъ о нихъ онъ подробно говорилъ въ началѣ своего сочиненія. При сложеніи дробныхъ выраженій съ одинаковыми знаменателями онъ дѣйствуетъ по правилу, выражаемому формулой: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Также имъ даны правила для сложенія и вычитанія ирраціональныхъ величинъ, какъ напр. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{18}$. Выраженія эти онъ складываетъ и вычитаетъ по правилу, выражаемому формулами:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\sqrt{ab}+a+b} \text{ *)}$$

и

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

При вычитаніи многочленовъ изъ многочленовъ Алкарги примѣняетъ правило, выражаемое формулой:

$$(a+b)-(c-d+f)=a+b-c+d-f$$

Далѣе слѣдуютъ правила для суммованія ариѳметическихъ строкъ. Алкарги находитъ сумму чиселъ отъ 1 до 10, а также сумму всѣхъ четныхъ чиселъ отъ 1 до 100. Затѣмъ слѣдуетъ рядъ правилъ, которыя могутъ быть выражены формулами:

$$a:b=ma:mb$$

---

*) Предложеніе это также встрѣчается въ X-й книгѣ „Началъ" Евклида. Оно было также извѣстно индусскимъ математикамъ.

$$a^2+na+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\left[a+\frac{n}{2}\right]^2$$

$$a^2-\left[na-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]=\left[a-\frac{n}{2}\right]^2$$

и

$$ab+\left[\frac{a+b}{2}-b\right]^2=ab+\left[\frac{a+b}{2}-a\right]^2=\left(\frac{M}{2}\right)^2$$

гдѣ

$$M=a+b$$

$$(a+m)m+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+m\right)^2$$

Послѣ приведенныхъ преобразованій Алкарги переходитъ къ опредѣленію дѣйствія al-dschabr (гл. LXVIII). Онъ говоритъ: „Третій путь, ведущій къ рѣшенію задачъ, состоитъ въ умноженіи и дѣленіи, удвоеніи и дѣленіи на два, сложеніи и вычитаніи, прибавленіи и отнятіи, до тѣхъ поръ пока задача сведется на двѣ суммы, которыя равны между собою. Если въ одной изъ этихъ суммъ будетъ отрицательное число, то ты долженъ прибавить къ этой суммѣ число, равное отрицательному, для того чтобы отрицательный членъ исчезъ, а затѣмъ прибавить такое же число къ другой суммѣ, чтобы обѣ суммы оставались равными. Такое дѣйствіе есть al-dschabr. Оно прилагается также иначе. Именно, если одна изъ суммъ раздѣлена на какое нибудь число, то этотъ дѣлитель ты устраняешь тѣмъ, что умножаешь на него все что ты имѣешь, для того, чтобы съ одной стороны устранить дѣлитель, а съ другой—сохранить равенство. Это дѣлается для того, чтобы неизвѣстную величину придвинуть къ границѣ извѣстной и чтобы раскрыть ея значеніе. Вся совокупность дѣйствій, ведущихъ къ этой цѣли, носитъ названіе al-dschabr. Такимъ путемъ задача приводится къ al-mukâbala (или противоставленію), т. е. исключенію числовыхъ величинъ, сопровождающихъ неизвѣстную величину. Послѣ этого отыскиваютъ неизвѣстную въ шести формахъ. Первая есть слѣдующая".

Послѣ приведеннаго объясненія терминовъ al-dschabr и al'-mukâbala Алкарги переходитъ къ разсмотрѣнію, такъ называемыхъ, шести формъ, которыя заключаются въ слѣдующемъ: 1) неизвѣстныя равны числу, 2) квадраты неизвѣстной равны неизвѣстнымъ, 3) квадраты неизвѣстной равны числу, 4) квадратъ неизвѣстной и неизвѣстныя равны числу, 5) квадратъ и 21 единицы равны 10 корнямъ, и 6) квадратъ равенъ тремъ корнямъ и 4 единицамъ. Формы эти Алкарги дѣлитъ на два класса: первыя три суть *простыя* формы, а послѣднія три *сложныя*. Написанныя, нынѣ употреби-

тельными алгебраическими символами, формы эти представятся въ видѣ уравненій вида:

$$ax = b \qquad x^2 + 10x = 39$$

$$ax^2 = bx \qquad x^2 + 21 = 10x$$

$$ax^2 = b \qquad x^2 = 3x + 4$$

Для рѣшенія этихъ шести уравненій Алкарги предлагаетъ правила, которыя даны для первыхъ трехъ формъ въ общемъ видѣ, а для послѣднихъ трехъ въ примѣненіи къ вышенаписаннымъ частнымъ примѣрамъ *). Правила эти заключаются въ слѣдующихъ рѣшеніяхъ:

$$x = \frac{1}{a} \cdot b \qquad x = \sqrt{39 + 5^2} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3$$

$$x^2 = \frac{b}{a} \cdot x \qquad x = 5 \pm \sqrt{5^2 - 21} = 5 \pm 2 = 7 \text{ или } 3$$

$$x^2 = \frac{b}{a} \qquad x = 1\frac{1}{2} + \sqrt{4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 4$$

Изъ написанныхъ выраженій мы видимъ, что при рѣшеніи второй сложной формы арабамъ были извѣстны оба корня уравненія. Это заслуживаетъ вниманія, такъ какъ при рѣшеніи подобныхъ уравненій Діофантъ допускалъ только одинъ корень. Случай когда корень мнимый также замѣчаетъ Алкарги, при чемъ онъ говоритъ: „въ этомъ случаѣ рѣшеніе вопроса невозможно".

Слѣдующая глава, послѣдняя (гл. LXX), заключаетъ различныя задачи, которыя сводятся на рѣшеніе уравненій второй степени, а также нѣсколькихъ уравненій первой степени со многими неизвѣстными. Нѣкоторые вопросы относятся къ правилу смѣшенія.

Сочиненіе свое Алкарги заканчиваетъ замѣчаніемъ, что вопросы, рѣшенные въ этомъ сочиненіи, заимствованы имъ изъ сочиненій различныхъ писателей. Назначеніе сочиненія, по его словамъ, „служить путеводителемъ въ искусствѣ счисленія".

Познакомившись съ содержаніемъ ариѳметическаго трактата Алкарги мы видимъ сколько онъ заключаетъ интереснаго. Содержаніе сочиненія указываетъ, что авторъ его основательно былъ знакомъ съ трудами греческихъ математиковъ. Многое въ немъ носитъ ясно слѣды греческаго вліянія, такъ

*) Нѣкоторые изъ примѣровъ рѣшенія уравненій, встрѣчаемые въ сочиненіи Алкарги, мы уже встрѣчали въ „Алгебрѣ" Магомета-бенъ-Музы.

напр. различныя определенія чиселъ прямо заимствованы у Никомаха и Евклида, методы производить умноженіе взяты у Аполлонія, Архимеда, Паппуса и Евтокія; ученіе о пропорціональности также заимствовано у Евклида. Шестидесятичныя дроби и извлеченіе корней у Птоломея и Теона. Нѣкоторые частные виды дробей у Герона Старшаго. Нѣкоторыя определенія въ Геометріи заимствованы прямо изъ „Началъ" Евклида. Выраженіе площади треугольника въ функціи сторонъ заимствовано вѣроятно у Герона. Нѣкоторые термины суть просто дословные переводы тѣхъ же словъ съ греческаго языка. Съ другой стороны необходимо замѣтить, что Алкарги также пользовался индусскими сочиненіями при составленіи своего труда. На это указываютъ: повѣрка при посредствѣ 9, а также тройныя правила.

„Аль-Факри". Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію содержанія другаго сочиненія, написаннаго Алкарги, именно къ сочиненію алгебраическаго содержанія, извѣстнаго подъ названіемъ „Аль-Факри".

Сочиненіе это имѣетъ для насъ особенный интересъ, такъ какъ оно знакомитъ насъ съ познаніями арабскихъ математиковъ въ Алгебрѣ. Хотя еще ранѣе Алкарги сочиненіе алгебраическаго содержанія было написано Магометомъ-бенъ-Музой, но въ послѣднемъ сочиненіи Алгебра находится еще на первыхъ ступеняхъ своего развитія, трудъ же Алкарги есть полный трактатъ по Алгебрѣ и самое обширное изъ всѣхъ извѣстныхъ въ настоящее время сочиненій, написанныхъ арабскими математиками, по этому предмету. Изъ содержанія сочиненія Алкарги видно, что онъ былъ основательно знакомъ съ трудами Діофанта, на котораго онъ часто ссылается. Въ историческомъ отношеніи сочиненіе Алкарги представляетъ интересъ, такъ какъ многое изъ этого сочиненія было заимствовано Фибоначчи въ его „Liber abaci", пользовавшимся такою извѣстностью въ теченіи XIII, XIV и XV вѣковъ. Многіе вопросы и пріемы, служащіе къ ихъ рѣшенію, были заимствованы Фибоначчи изъ сочиненія арабскаго математика. На это обратилъ вниманіе, однимъ изъ первыхъ, извѣстный Вепке.

Сочиненіе Алкарги состоитъ изъ двухъ частей: первой теоретической, которая заключаетъ собственно трактатъ по Алгебрѣ, и второй—практической, представляющей собраніе примѣровъ и ихъ рѣшеній. Первой части предшествуетъ предисловіе, въ которомъ авторъ говоритъ, что „предметъ счисленія заключается въ нахожденіи неизвѣстныхъ величинъ при помощи извѣстныхъ и я нашелъ, что самое лучшее и ясное правило, служащее къ этому, есть искусство Алгебры, благодаря его общности и силѣ". Сочиненіе свое авторъ написалъ въ виду того, что всѣ сочиненія, написанныя объ этой наукѣ, многаго не содержатъ, и что авторы ихъ не даютъ доказательствъ различнымъ предложеніямъ. Кромѣ того, по словамъ Алкарги, имъ

сдѣланы замѣчательныя открытія и рѣшено много трудныхъ вопросовъ, о которыхъ ничего не говорится въ другихъ сочиненіяхъ и которые не объяснены. Подобно всѣмъ сочиненіямъ, написаннымъ арабами, предисловіе начинается и кончается обращеніемъ къ Богу. Первая часть состоитъ изъ пятнадцати главъ, а вторая изъ пяти отдѣловъ. Познакомимся съ содержаніемъ каждой изъ главъ отдѣльно.

Часть первая. Глава I озаглавлена „алгебраическія степени"; въ этой главѣ Алкарги указываетъ на образованіе различныхъ степеней и на ихъ названія. При образованіи степеней Алкарги слѣдуетъ Діофанту. Степени онъ разсматриваетъ до девятой включительно при рѣшеніи вопросовъ неопредѣленныхъ, и до восьмой при рѣшеніи вопросовъ опредѣленныхъ. Каждая степень имѣетъ свое названіе *), при чемъ показано ихъ происхожденіе, которое поясняется на примѣрѣ. Авторъ приводитъ слѣдующую таблицу, которая, по его словамъ, можетъ быть продолжена до безконечности:

a	корень или вещь . . сторона	2
$a^2 = a \cdot a$	квадратъ . . . . площадь	4
$a^3 = a^2 \cdot a$	кубъ . . . . тѣло	8
$a^4 = a^3 \cdot a = a^2 \cdot a^2$	квадрато-квадратъ	16
$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a^2$	квадрато-кубъ	32
$a^6 = a^5 \cdot a = a^4 \cdot a^2 = a^3 \cdot a^3$	кубо-кубъ	64
$a^7 = a^6 \cdot a$	квадрато-квадрато-кубъ	128
$a^8 = a^7 \cdot a$	квадрато-кубо-кубъ	256
$a^9 = a^8 \cdot a$	кубо-кубо-кубъ	512

Степени эти Алкарги сравниваетъ съ единицами, десятками, сотнями, тысячами и т. д., при чемъ онъ замѣчаетъ, что существуетъ аналогія между отношеніями:

$$1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3 = a^3 : a^4 \quad \ldots\ldots$$

$$1 : 10 = 10 : 100 = 100 : 1000 = 1000 : 10000 = \ldots\ldots$$

Глава II разсматриваетъ обратныя значенія степеней. Авторъ начинаетъ съ опредѣленія *части* числа; онъ говоритъ „частью числа называется то, что будучи умножено на число, даетъ единицу". Въ этой главѣ Алкарги даетъ нѣсколько правилъ, которыя можно выразить слѣдующими формулами:

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a \quad , \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} \quad , \quad \frac{1}{a^m} \cdot a^n = a^n : a^m$$

*) Различныя степени выражаются сочетаніемъ терминовъ *mal* и *kab*, т. е. *квадратъ* и *кубъ*, откуда произошли названія *mál-mál*, *mál-kab*, *kab-kab*, *mál-mál-kab*, *mál-kab-kab*, *kab-kab-kab* и т. д.

Правила эти даны сначала для частныхъ случаевъ, а потомъ обобщаются. Въ началѣ главы Алкарги замѣчаетъ, что равенства:

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}:\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^3}:\frac{1}{a^4}=\ldots\ldots$$

могутъ быть продолжены до безконечности.

Глава III занимается умноженіемъ, при чемъ указаны правила сначала умноженія одночленовъ, а потомъ многочленовъ. Одночлены Алкарги называетъ *простыми числами* и какъ примѣръ ихъ указываетъ на *предметы, квадраты, число, части предмета* и т. д., многочлены онъ называетъ *составными числами*, такъ какъ они составлены изъ простыхъ.

Глава IV посвящена дѣленію, которое Алкарги опредѣляетъ „дѣйствіе обратное умноженію". Затѣмъ слѣдуютъ указанія, когда дѣленіе возможно и примѣры.

Глава V озаглавлена „отношеніе". Алкарги даетъ слѣдующее опредѣленіе отношенія: „отношеніемъ какой нибудь величины къ другой называется предметъ, который будучи умноженъ на второй членъ отношенія, даетъ первый членъ". Въ концѣ главы авторъ поясняетъ на примѣрѣ разницу между *отношеніемъ* и *дѣленіемъ*. Онъ говоритъ, что $20:4=5$ принадлежитъ къ числу случаевъ дѣленія, а $4:20=\frac{1}{5}$ къ числу примѣровъ отношеній.

Глава VI озаглавлена „извлеченіе квадратныхъ корней". Въ началѣ главы авторъ объясняетъ, что называется квадратнымъ корнемъ и показываетъ, что только изъ четныхъ степеней возможны корни квадратные. Затѣмъ онъ показываетъ, какъ извлекаются корни квадратные изъ многочленовъ, представляющихъ полный квадратъ, какъ напр.:

$$\sqrt{a^2+4a+4}=a+2$$

$$\sqrt{4a^2+1-4a}=2a-1$$

Глава VII озаглавлена „сложеніе". Правила, данныя Алкарги, такія же, какъ употребляемыя нынѣ. Сложеніе возможно только тогда, если есть члены подобные, которые можно соединить въ одинъ. Алкарги говоритъ: „если одно изъ выраженій содержитъ отрицательный членъ, и если другое выраженіе не содержитъ члена того же порядка, то отрицательный членъ остается; въ противномъ случаѣ его уничтожаютъ (или какъ Алкарги выражается: ты его возстановляешь) съ равнымъ ему, взятымъ отъ члена одного съ нимъ порядка".

Глава VIII озаглавлена „вычитаніе“. Дѣйствіе это производится въ томъ же порядкѣ, какъ и въ настоящее время.

Глава IX озаглавлена „правила и предложенія, которыя нужны при алгебраическихъ вычисленіяхъ“. Въ этой главѣ Алкарги даетъ правила, какъ умножать и дѣлить корни различныхъ степеней. Правила и различные случаи онъ прямо поясняетъ на частныхъ примѣрахъ. Затѣмъ онъ переходитъ къ сложенію квадратныхъ корней и корней высшихъ степеней, а также ихъ вычитанію. При этомъ Алкарги замѣчаетъ, что правила, данныя имъ для этихъ случаевъ, примѣнимы только къ дѣйствіямъ надъ ирраціональными выраженіями, такъ какъ для выраженій изъ которыхъ можно извлечь корень нѣтъ правилъ. Справедливость употребляемыхъ имъ дѣйствій Алкарги основываетъ на извѣстныхъ выраженіяхъ:

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Корень квадратный, въ этой главѣ, онъ называетъ „корень“, корень кубическій—„сторона куба“, а корень четвертой степени—„сторона квадрато-квадрата“. Нѣкоторыя изъ выраженій надъ которыми Алкарги производитъ дѣйствія довольно сложны. Упрощенія ведутъ къ сложнымъ преобразованіямъ, что заслуживаетъ вниманія, такъ какъ всѣ дѣйствія Алкарги производилъ словесно и никакихъ формулъ и символовъ несуществуетъ.

Глава X носитъ заглавіе „предложенія, пригодныя при рѣшеніи вопросовъ при посредствѣ алгебры“. Предметъ этой главы суммованіе различныхъ рядовъ. Онъ начинаетъ съ нахожденія суммы ряда:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10 \cdot 10+10}{2} = \frac{10}{2} \cdot (1+10)$$

Алкарги извѣстно правило, по которому находятся суммы подобныхъ рядовъ. Затѣмъ онъ переходитъ къ нахожденію суммы первыхъ двадцати членовъ ряда:

$$3+7+11+15+\ldots\ldots$$

при этомъ онъ находитъ сначала выраженіе послѣдняго члена, по формулѣ:

$$19 \cdot 4+3 = 79$$

и находитъ затѣмъ сумму:

$$(79+3)\frac{20}{2} = 820.$$

Послѣ этого Алкарги показываетъ, какъ находить сумму первыхъ четныхъ или нечетныхъ чиселъ отъ 1 до 10. Далѣе онъ приводитъ равенство:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+10^2=(1+10).10\left(\frac{10}{3}+\frac{1}{6}\right)=110.3\frac{1}{2}=385$$

$$=(1+2+3+\dots+10)\left(\frac{2}{3}.10+\frac{1}{3}\right)$$

которое, по его словамъ, онъ не съумѣлъ доказать; онъ говоритъ только, что имъ замѣчено, что равенство:

$$\frac{1+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2}{1+2+3+4+\dots+n}=\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$$

всегда существуетъ. Онъ обѣщаетъ дать доказательство предложенію, которое будетъ основано на равенствѣ:

$$5^2+4.6+3.7+\dots+1.9=5^3-[1^2+2^2+3^2+\dots+(5-1)^2]$$

Послѣднее выраженіе онъ основываетъ на формулѣ $(a-n)(a+n)=a^2-n^2$. Потомъ онъ находитъ сумму членовъ ряда:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+10^2=385$$

а также находитъ сумму членовъ:

$$6.5+7.4+8.3+9.2+10.1=6.5.5-(1.2+2.3+3.4+4.5)=$$

$$=6.5.5-\left[(1+2+3+4+5)\frac{2}{3}(5-1)\right]=150-40=110$$

Доказательство послѣдняго выраженія Алкарги основываетъ на справедливости равенства:

$$[(a+1)+n](a-n)=(a+1)a-n(n+1)$$

Далѣе слѣдуетъ нахожденіе суммы ряда:

$$1.2+2.3+3.4+\dots+9.10=(1+2+3+4+\dots+10)\left(\frac{2}{3}.10-\frac{2}{3}\right)=330$$

Послѣ этого Алкарги переходитъ къ доказательству слѣдующаго равенства:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+10^3=(1+2+3+\dots+10)^2$$

Доказательство этого предложенія онъ основываетъ на существованіи равенствъ:

$$(1+2+3+\dots+10)=55=45+10$$

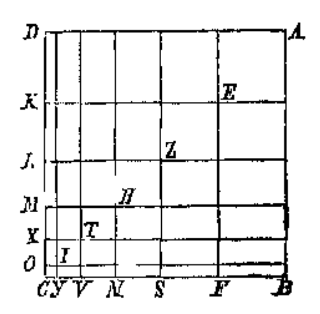
$$(45+10)^2=45^2+2.10.45+10^2=45^2+10^3$$

$$45^2=(36+9)^2=36^2+2.9.36+9^2=36^2+9^3$$

$$36^2=(28+8)^2=28^2+2.8.28+8^2=28^2+8^3$$

Справедливость предложенія „сумма кубовъ ряда натуральныхъ чиселъ, равна квадрату суммы этихъ чиселъ“ Алкарги доказываетъ также на слѣдующей фигурѣ: Пусть $ABCD$ квадратъ (фиг. 31), въ которомъ $FB = 6$,

Фиг. 31.



$SF = 5$, $NS = 4$, $VN = 3, \ldots$ но $EA = 6.6$, $DE = EB = 6.15 = 90$, а потому гномонъ:

$$DABFEK = DE + EB + EA = 6^3 = DK^3 = 216$$

изъ чего слѣдуетъ, что:

$$(a-1)a^2 + a^2 = a^3$$

и

$$(1+2+3+\ldots+n)(n+1).2+(n+1)^2=(n+1)^3$$

Изъ той же фигуры слѣдуетъ, что:

гномонъ $KEFSZL = KL^3 = 5^3$

гномонъ $LZSNHM = LM^3 = 4^3$

гномонъ $MHNVTX = MX^3 = 3^3$

гномонъ $XTVYIO = XO^3 = 2^3$

квадратъ $OIYC = CY^3 = 1^3$

Сложивъ всѣ эти фигуры получимъ площадь квадрата $ABCD$, которая выразится чрезъ:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$$

но площадь квадрата $ABCD$ равна:

$$(1+2+3+4+5+6)^2$$

слѣдовательно:

$$(1+2+3+4+5+6)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3 \; *)$$

*) По мнѣнію Ганкеля, приведенное геометрическое доказательство носитъ на себѣ слѣды вліянія индусовъ, и было вѣроятно заимствовано Алкарги у индусскихъ математиковъ. См. *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, pag. 192.

Далѣе Алкарги находитъ сумму членовъ выраженія:

$$(1.3+3.5+\ldots+7.9)+(2.4+4.6+\ldots+8.10)=$$

$$=(1+2+3+\ldots+10)\left(\frac{2.10}{3}-1\frac{2}{3}\right)+1=$$

$$=55\left(\frac{2.10}{3}-1\frac{2}{3}\right)+1=275+1=276$$

и наконецъ находитъ сумму членовъ ряда.

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+4.5.6+5.6.7+\ldots+8.9.10=$$

$$=1^3+2^3+3^3+\ldots+(10-1)^3-[1+2+3+\ldots+(10-1)]=$$

$$=(1+2+3+\ldots+9)^2-(1+2+3+\ldots+9)=45^2-45=45.44=1980$$

Справедливость этого предложенія Алкарги основываетъ на существованіи равенства:

$$(n-1)n(n+1)=n^3-n$$

Глава XI озаглавлена „предложенія, знаніе которыхъ служитъ къ рѣшенію затрудненій“. Подъ названіемъ „равенствъ“ Алкарги понимаетъ слѣдующія выраженія:

$$\left[\frac{a^2-b^2}{a-b}+(a-b)\right]:2=a\quad,\quad\left[\frac{a^2-b^2}{a-b}-(a-b)\right]:2=b$$

Затѣмъ онъ указываетъ на существованіе равенствъ:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)ab=a^2+b^2\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\quad,\quad\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)ab=a^2-b^2$$

и еще нѣкоторыхъ другихъ.

Послѣ этого авторъ переходитъ къ такъ называемымъ квадратнымъ числамъ, подъ которыми онъ разумѣетъ выраженія, которыя представляются въ видѣ полнаго квадрата. Къ числу такихъ выраженій Алкарги относитъ:

$$(a+b)b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$$

$$(ma)^2+a^2\pm2(ma)a\ ^{*)}$$

$$a^2+(2a+1)$$

$$a^2-(2a-1)$$

*) Справедливость этого предложенія Алкарги основываетъ на 4-мъ пред. II-й кн. „Началъ“ Евклида.

$$a+\left[n\sqrt{a}+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]=\left(\sqrt{a}+\frac{n}{2}\right)^2$$

$$a-\left[n\sqrt{a}-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]=\left(\sqrt{a}-\frac{n}{2}\right)^2$$

Далѣе Алкарги указываетъ, что выраженія:

$$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+a \quad \text{и} \quad \left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a$$

всегда суть числа квадратныя при положеніи:

$$a=mn$$

такъ какъ существуютъ равенства:

$$\sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a}=\frac{m-n}{2}, \quad \sqrt{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+a}=\frac{m+n}{2}$$

Глава XII имѣетъ предметомъ „шесть задачъ“. Подъ именемъ шести задачъ авторъ понимаетъ рѣшеніе уравненій первой и второй степеней. Цѣль Алгебры, по словамъ Алкарги, заключается въ опредѣленіи неизвѣстныхъ величинъ при посредствѣ извѣстныхъ. Онъ говоритъ, что „предметъ задачи называютъ „вещью“ и что ее подвергаютъ дѣйствіямъ, изложеннымъ въ предъидущихъ главахъ сочиненія“. Затѣмъ авторъ переходитъ къ объясненію терминовъ dschabr и mokabalah.

Уравненія Алкарги дѣлитъ на два класса: *простыя* уравненія и *сложныя*. Къ первому классу принадлежатъ выраженія: нѣсколько предметовъ равны числу; нѣсколько предметовъ равны квадратамъ; и нѣсколько квадратовъ равны числу. Во второмъ классѣ также три вида. Алкарги замѣчаетъ, что одно изъ самыхъ существенныхъ дѣйствій въ Алгебрѣ есть приведеніе нѣсколькихъ квадратовъ къ одному.

Подъ названіемъ *простыхъ* уравненій Алкарги понимаетъ выраженія слѣдующаго вида:

$$ax=b \qquad ax^2=bx \qquad ax^2=b$$

рѣшенія ихъ онъ находитъ по правиламъ выраженнымъ формулами:

$$x=\frac{b}{a} \qquad x=\frac{b}{a} \qquad x=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Три вида *сложныхъ* уравненій, разсмотрѣнныхъ Алкарги, можно выразить слѣдующими тремя формулами:

$$ax^2+bx=c$$
$$ax^2+c=bx$$
$$bx+c=ax^2$$

Сначала Алкархи даетъ общія правила для рѣшенія каждаго изъ этихъ трехъ видовъ уравненій, и затѣмъ переходитъ къ численнымъ примѣрамъ, при рѣшеніи которыхъ онъ примѣняетъ четыре пріема. Одинъ изъ этихъ пріемовъ Алкархи называетъ способомъ Діофанта. Мы познакомимся съ каждымъ изъ этихъ пріемовъ, при чемъ укажемъ примѣненіе ихъ къ рѣшенію уравненій перваго вида.

Общія правила, данныя Алкархи, для рѣшенія уравненія вида:

$$ax^2+bx=c$$

можно представить въ видѣ формулъ

$$x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)$$

или

$$x=\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+ac}-\frac{b}{2}\right]:a$$

Чтобы найти непосредственно квадратъ неизвѣстной величины, т. е. x^2 Алкархи предварительно приводитъ уравненіе къ виду:

$$x^2+bx=c$$

тогда правило, данное Алкархи, представится въ видѣ выраженія:

$$x^2=\frac{b^2}{2}+c-\sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2+b^2c}$$

Ко второму виду уравненій второй группы принадлежитъ уравненіе:

$$ax^2+c=bx$$

правила, данныя Алкархи, для ихъ рѣшенія, представляются въ видѣ выраженій:

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c}{a}} \qquad (1).$$

или

$$x=\left[\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}\right]:a$$

Для нахожденія непосредственно x^2, Алкархи предполагаетъ, подобно какъ въ предъидущемъ случаѣ, что уравненіе дано въ формѣ:

$$x^2+c=bx$$

въ этомъ случаѣ правило для рѣшенія выражается въ видѣ формулы такой:

$$x^2 = \left[\frac{b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c}\,\right] - c$$

Давая правило (*k*) при рѣшеніи этого случая, Алкарги замѣчаетъ, что если нельзя вычесть $\frac{c}{a}$ изъ $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$, т. е. если подкоренная величина количество отрицательное, то задача *нельпа*; если же $\frac{c}{a} = \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$, то рѣшеніе представляется въ видѣ $x = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}$. Не смотря на то, что Алкарги извѣстно, что этотъ видъ уравненій (*k*) допускаетъ два рѣшенія, какъ это и видно изъ правилъ, данныхъ имъ, но въ примѣненіи къ частнымъ случаямъ онъ разсматриваетъ только второй случай.

Къ послѣднему, третьему, виду уравненій принадлежитъ уравненіе вида:

$$bx + c = ax^2$$

рѣшеніе его выражается формулой:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{1}{2}\frac{b}{a}$$

Для нахожденія прямо квадрата неизвѣстной величины x^2, Алкарги приводитъ это уравненіе сначала къ виду:

$$x^2 = bx + c$$

Тогда рѣшеніе его выражается формулой.

$$x^2 = \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2} + \frac{b^2}{2} + c$$

Указавъ на общія правила, данныя Алкарги, для рѣшенія каждаго изъ уравненій *сложной* формы, мы покажемъ въ четыре пріема, которые онъ употребляетъ при рѣшеніи частныхъ случаевъ этихъ уравненій. Мы разсмотримъ эти методы только въ примѣненіи къ уравненію типа:

$$ax^2 + bx = c.$$

Первый пріемъ. Методъ этотъ прилагается къ уравненіямъ содержащимъ одинъ полный квадратъ. Рѣшеніе заключается въ слѣдующемъ. Пусть дано уравненіе:

$$x^2 + 10x = 39$$

Алкарги беретъ неопредѣленную прямую, на которой откладываетъ $BC=x$ и $AB=10$; точка D средина AB (фиг. 32). Затѣмъ онъ говоритъ: „на

Фиг. 32.

C B D A

основаніи извѣстнаго предложенія Евклида *) будемъ имѣть“:

$$AC.CB+DB^2=DC^2$$

но:

$$AC.BC=(x+10)x=39$$

и

$$DB=5$$

слѣдовательно:

$$DC^2=64 \text{ и } DC=\sqrt{64}, \text{ откуда } 8=5+BC;$$

слѣдовательно:

$$3=BC=x$$

Второй пріемъ. Въ этомъ случаѣ рѣшеніе уравненія, не приводя предварительно квадраты къ одному квадрату. При этомъ Алкарги различаетъ два случая: одинъ когда коэфиціентъ при квадратѣ неизвѣстной величины x, число цѣлое, и другой случай, когда этотъ коэфиціентъ величина дробная. Разсмотримъ оба случая, каждый отдѣльно. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$3x^2+6x=24$$

На неопредѣленной прямой откладываемъ $BC=3x$ и $AB=6$, пусть O средина AB, отложимъ $CD=BC$ и раздѣлимъ CD въ точкахъ E и H на равныя части, изъ которыхъ каждая очевидно равна x, наконецъ проведемъ EM и HN параллельныя BC (фиг. 33). Извѣстно что.

$$ACEM=AC.CE=3x^2+6x=24$$

Фиг. 33.

C B O A

E M

H N

D K

слѣдовательно:

$$ACDK=72$$

*) См. „Начала“ Евклида, кн. II, пред. 6.

но:

$$ACDK = AC \,.\, CD = AC \,.\, BC$$

и $OB^2 = 9$ а потому:

$$AC \,.\, BC + OB^2 = 81$$

Изъ этого слѣдуетъ, что $OC = \sqrt{81} = 9$.

Но

$$OC = BC + OB = BC + 3$$

слѣдовательно:

$$6 = BC = 3x$$

или

$$x = 2.$$

Второй случай уравненія, въ которомъ квадратъ неизвѣстной неполная величина, какъ напр. въ уравненіи:

$$\frac{1}{2} x^2 + 2x = 6$$

Алкарги рѣшаетъ слѣдующимъ образомъ: На неопредѣленной прямой онъ откладываетъ сначала $AB = \frac{1}{2} x$, $BD = 2$ и проводитъ $AN = x$ (фиг. 34).

Фиг. 34.

D C B A

T O

M N

Затѣмъ онъ откладываетъ

$$AO = AB = \frac{1}{2} AN$$

и проводитъ TO параллельно AD и дѣлитъ BD, въ точкѣ C, пополамъ. Дѣлая такое построеніе, какъ извѣстно, существуетъ равенство:

$$ADMN = AD \,.\, AN = \left(\frac{1}{2} x + 2\right) x = \frac{1}{2} x^2 + 2x = 6$$

и

$$ADTO = \frac{1}{2} ADMN = 3$$

Но:

$$ADTO = AO \,.\, AD = AB \,.\, AD$$

слѣдовательно:

$$AB \,.\, AD = 3$$

и

$$AD \cdot AB + BC^2 = AC^2$$

а потому:

$$AC^2 = 3 + 1 = 4$$

и

$$AC = 2$$

Но $BC = 1$, слѣдовательно $AB = 1$ и $x = 2$.

Третій пріемъ. Методъ этотъ служилъ для нахожденія прямо квадрата неизвѣстной величины; онъ состоитъ въ слѣдующемъ: Пусть данное уравненіе есть:

$$x^2 + 10x = 39$$

Полагая $CD = x^2$ и $DE = 10x$, находимъ $CE = 39$ (фиг. 35). Отложимъ

Фиг. 35.

M C

N D A

O K E B

$AD = DE$ и дополнимъ квадратъ $ADEB$; площадь его равна $100x^2$. Построимъ прямоугольникъ $CMND$ равный квадрату $ADEB$. Такъ какъ $CD = x^2$, то $DN = 100$. Слѣдовательно прямоугольникъ $CMOE = CE \cdot ND = 3900$, а потому $ANOB = OB \cdot AB = OB \cdot EB$. Пусть K средина OE, тогда:

$$OB \cdot EB + EK^2 = BK^2 = 3900 + 2500$$

а потому:

$$BK = \sqrt{6400} = 80$$

Слѣдовательно:

$$DE + EK = 80$$

но $EK = 50$, а потому $DE = 30$. Мы имѣли выше $CE = 39$, а потому $CD = 9$ или $x^2 = 9$.

Четвертый пріемъ. Слѣдующій пріемъ для рѣшенія уравненій названъ

Алкарги: „методомъ рѣшенія на подобіе Діофанта“. Пріемъ состоитъ въ слѣдующемъ: Пусть данное уравненіе будетъ:

$$x^2+10x=39$$

Алкарги ищетъ число, которое будучи прибавлено къ x^2+10x составило бы съ нимъ полный квадратъ. Такое число есть очевидно 25; тогда получимъ:

$$x^2+10x+25=(x+5)^2=39+25=64$$

откуда:

$$x+5=\sqrt{64}=8 \quad \text{и} \quad x=3$$

Для другихъ двухъ видовъ сложныхъ уравненій, Алкарги также приводитъ только что указанные четыре метода рѣшенія, но мы на этомъ не остановимся, такъ какъ пріемы тѣ-же.

Глава XIII занимается рѣшеніемъ уравненій высшихъ степеней. Въ этой главѣ Алкарги даетъ правила для рѣшенія слѣдующихъ четырехъ видовъ уравненій:

$$ax^{2n}+bx^n=c$$
$$ax^{2n}=bx^n+c$$
$$ax^{2n}+c=bx^n$$
$$ax^{2n+m}=bx^{n+m}+cx^m$$

Рѣшенія первыхъ трехъ уравненій даны въ формѣ слѣдующихъ выраженій:

$$x^n=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}$$

$$x^n=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}+\frac{b}{2a}$$

$$x^n=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^3}-\frac{c}{a}}.$$

Алкарги объясняетъ, что рѣшеніе уравненія $ax^{2n}+bx^n+c=0$ сводится на рѣшеніе уравненія $ax^2+bx+c=0$. Рѣшеніе уравненія $ax^{2n+m}+bx^{n+m}+cx^m=0$ онъ сводитъ также на рѣшеніе уравненія $ax^2+bx+c=0$. Правила свои Алкарги поясняетъ на слѣдующихъ примѣрахъ: $x^4+5x^2=126$, $x^4+24=10x^2$, $x^4=2x^2+8$. Рѣшеніе уравненія $x^6=3x^3+40$ Алкарги сводитъ на рѣшеніе уравненія $x^2=3x+40$. Уравненіе $x^7=bx^5+cx^3$ онъ предварительно сокращаетъ на x^3 и получаетъ $x^4=bx^2+c$; послѣднее уравненіе онъ сводитъ къ рѣшенію уравненія вида $x^2=bx+c$. Въ этой главѣ Алкарги, въ началѣ, замѣчаетъ, что „число алгебраическихъ задачъ безгранично“.

Глава XIV занимается рѣшеніемъ неопредѣленныхъ уравненій. Рѣшеніе вопросовъ, относящихся къ неопредѣленному анализу, Алкарги производитъ при посредствѣ метода, который онъ называетъ *истикра* *). Пріемъ этотъ, по его словамъ, состоитъ въ слѣдующемъ: „если дано выраженіе, состоящее изъ одного, двухъ или трехъ послѣдовательныхъ членовъ, и если это выраженіе, по условіямъ вопроса, не есть квадратъ, то предполагаютъ его равнымъ квадрату, котораго корень ищутъ. Такое дѣйствіе при вычисленіяхъ называютъ *истикра*". Алкарги замѣчаетъ, что вопросы такого рода допускаютъ нѣсколько рѣшеній. Далѣе онъ указываетъ, какъ рѣшаются неопредѣленныя уравненія второй степени, какъ напримѣръ уравненія: $x^2+4x=y^2$, $4x^2+16x+9=y^2$. Для перваго изъ этихъ уравненій Алкарги дѣлаетъ положеніе $y=2x$ и находитъ $x=2\frac{2}{3}$. Въ заключеніе этой главы Алкарги говоритъ: „сказаннаго здѣсь достаточно. Въ комментаріяхъ на настоящее сочиненіе я буду говорить обо всемъ относящемся къ кубамъ, квадратамъ-квадрата и слѣдующимъ степенямъ. Также написано мною сочиненіе, въ которомъ говорится подробно объ пріемѣ *истикра*". Къ сожалѣнію, въ настоящее время, неизвѣстны ни комментаріи на „Аль-Факри", ни сочиненіе объ истикрѣ. Труды эти вѣроятно пропали безслѣдно.

Глава XV озаглавлена: „особенные случаи образованія квадратовъ". Въ этой главѣ рѣшены вопросы относящіеся къ нахожденію выраженій, которыя будучи умножены на данное выраженіе, въ произведеніи дали-бы единицу. Такъ напримѣръ: найти число, которое будучи умножено на $3+\sqrt{5}$ равнялось бы единицѣ. Для этого Алкарги полагаетъ: $x(3+\sqrt{5})=1$ или $3x+\sqrt{5x^2}=1$, откуда $5x^2=(1-3x)^2=1+9x^2-6x$. Прилагая къ этому выраженію алгебраическія дѣйствія, приведенныя въ предъидущихъ главахъ, Алкарги находитъ величину неизвѣстнаго. Точно также онъ поступаетъ съ выраженіями у которыхъ коэффиціентъ при квадратѣ есть величина дробная, какъ напримѣръ въ выраженіяхъ: $\frac{1}{3}x^2+6x^4$, $\frac{1}{3}x^2+\sqrt{\frac{1}{3}x^4}$.

Часть вторая. Скажемъ теперь нѣсколько словъ о второй—практической

*) Значеніе слова *истикра* объяснено въ сочиненіи „Объ опредѣленіяхъ", написанномъ Абулъ-Гассаномъ. Подъ названіемъ *истикра* авторъ понимаетъ обобщеніе, т. е. если излагаемое предложеніе справедливо для нѣсколькихъ отдѣльныхъ случаевъ, то оно справедливо вообще. Въ дословномъ переводѣ терминъ *истикра* значитъ „съ мѣста на мѣсто". Сочиненіе „Объ опредѣленіяхъ" переведено подъ заглавіемъ. *Sylv. de Sacy*. Définitions. Ouvrage de Seid Schérif Zein-eddin Abou 'lhassan Ali, fils de Mohammed, Djordjâni. Traduit par Sylv. de Sacy. Помѣщено въ Notices et extraits des Manuscrits, T. X. 1818. Объ *истикрѣ* см. pag. 42.

части сочиненія Алкарги. Мы уже выше замѣтили, что это есть сборникъ задачъ, раздѣленныхъ на пять отдѣловъ. Задачъ всѣхъ 254. Онѣ расположены безъ всякой системы; повидимому авторъ руководился только мыслію переходить отъ рѣшенія задачъ легкихъ къ болѣе труднымъ *). Вопросы, рѣшенные въ сборникѣ, относятся къ уравненіямъ первой и второй степеней, къ уравненіямъ высшихъ степеней, которыя могутъ быть сведены на уравненія квадратныя; около 170 вопросовъ сводятся на рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой и второй степеней, а также высшихъ степеней. Многіе вопросы своего сборника Алкарги заимствовалъ изъ „Ариѳметикъ" Діофанта, а также изъ „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы. Такъ напримѣръ болѣе одной трети задачъ первой книги „Ариѳметикъ" Діофанта, многія изъ второй, и почти всѣ задачи третьей книги Алкарги включилъ въ свой сборникъ. При этомъ даже порядокъ задачъ оставленъ тотъ же. Весьма вѣроятно, что и нѣкоторыя другія задачи Алкарги заимствовалъ изъ недошедшихъ до насъ отрывковъ „Ариѳметикъ". Извлеченія, сдѣланныя Алкарги изъ сочиненія Діофанта были замѣчены еще арабскими математиками **).

Подобно Діофанту Алкарги рѣшаетъ вопросы, въ которыхъ встрѣчается по нѣсколько неизвѣстныхъ величинъ, иногда по шести. Діофантъ вопросы подобнаго рода рѣшалъ различными весьма искусственными сочетаніями между неизвѣстными величинами, такъ какъ у него не существовало многихъ символовъ, для обозначенія неизвѣстныхъ, а былъ только одинъ. Какъ мы видимъ въ этомъ отношеніи онъ стоитъ несравненно ниже индусовъ, у которыхъ различныя неизвѣстныя носили названія цвѣтовъ (см. стр. 42[illegible]). Въ этомъ отношеніи Алкарги значительно превзошелъ Діофанта, такъ какъ при рѣшеніи двухъ задачъ онъ пользуется особеннымъ терминомъ для обозначенія второй неизвѣстной величины. Неизвѣстными этими онъ пользуется совершенно такъ, какъ мы неизвѣстными x и y, входящими въ уравненіе. Подобное обозначеніе онъ вводитъ всего два раза, изъ чего можно заключить, что это есть одна изъ первыхъ попытокъ введенія особенныхъ символовъ, для отличія одной неизвѣстной величины отъ другой. Вепке еще

*) Нѣкоторые изъ вопросовъ рѣшены даже по два раза, какъ напр. 46-я задача II-го отд. и 15 задача IV-го отдѣла; 50-я зад. I-го отд. и 1-я зад. IV-го отд.; 28-я зад. II-го отд. и 27-я зад. IV-го отдѣла.

**) Въ концѣ IV-го отдѣла сборника задачъ Алкарги, находиться примѣчаніе, сдѣланное вѣроятно впослѣдствіи владѣльцемъ рукописи, въ которомъ говориться, что „задачи настоящаго отдѣла, а также часть задачъ предыдущаго отдѣла заимствованы изъ сочиненія Діофанта". На основаніи этого примѣчанія Вепке нѣкоторое время предполагалъ, что вопросы указанныхъ отдѣловъ входили въ составъ недошедшихъ до насъ книгъ „Ариѳметикъ" Діофанта и составляли отрывокъ, который слѣдуетъ вставить между второй и третьей книгами „Ариѳметикъ". См. Extrait du Fakhri, pag. 22—24.

обращаетъ особенное вниманіе на то обстоятельство, что въ обѣихъ задачахъ термины для обозначенія второй неизвѣстной величины совершенно различны. Въ одной изъ задачъ неизвѣстныя величины обозначены терминами *[illegible]* и *мѣра*, а въ другой *вещь* и *часть* *). Къ сожалѣнію остроумная попытка Алкарги не получила дальнѣйшаго развитія, такъ какъ другіе арабскіе математики не обратили на нее должнаго вниманія. При рѣшеніи уравненій Алкарги обращаетъ вниманіе только на положительные корни уравненія; отрицательныя рѣшенія онъ, подобно всѣмъ арабскимъ математикамъ, не принимаетъ во вниманіе. Всѣ вопросы, которые сводятся къ отрицательнымъ значеніямъ неизвѣстной величины онъ считаетъ нелѣпыми, и потому вводитъ часто различныя дополнительныя условія, чтобы сдѣлать отрицательную величину неизвѣстной положительной; для этой цѣли онъ измѣняетъ въ уравненіяхъ постоянныя величины. О мнимыхъ корняхъ нѣтъ и помину. Нулевыхъ значеній для неизвѣстной величины Алкарги также не признаетъ, говоря въ этомъ случаѣ, что „задача не допускаетъ рѣшенія". Въ неопредѣленныхъ вопросахъ Алкарги, подобно Діофанту, ограничивается дробными значеніями для неизвѣстной величины, исключивъ совершенно ирраціональныя рѣшенія.

Въ сочиненіи Алкарги теорія рѣшенія уравненій второй степени, а также рѣшеніе уравненій высшихъ степеней, сводимыхъ на квадратныя, изложена вполнѣ обстоятельно. Менѣе полно показано рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій. Сравнивая содержаніе „Аль-Факри" съ сочиненіями Фибоначчи Венке нашелъ, что многіе изъ вопросовъ, разсмотрѣнныхъ въ „Liber Abaci", прямо заимствованы изъ сочиненія Алкарги. При этомъ Венке высказываетъ предположеніе, что весьма вѣроятно, что сборникъ задачъ Алкарги есть извлеченіе изъ болѣе обширнаго задачника, написаннаго неизвѣстнымъ намъ математикомъ. Изъ послѣдняго сборника Фибоначчи могъ прямо заимствовать многіе вопросы ненаходящіеся въ сочиненіи Алкарги. Также возможно, что Фибоначчи самъ дополнилъ сборникъ, составленный Алкарги. Многие изъ вопросовъ знаменитаго трактата Фибоначчи „О квадратныхъ числахъ", заимствованы изъ „Аль-Факри" **). Нѣкоторые изъ воп-

*) См. Задачи 5 и 6-я III-го отдѣла. Текстъ этихъ вопросовъ подробно приведенъ Венке въ прибавленіяхъ къ своему сочиненію; *Woepcke*, Extrait du Fakhri, pag. 11, 90, 139—143

**) *Woepcke*, Note sur le *Traité des nombres carrés*, de *Leonard de Pise*, retrouvé et publié par M. le prince Balthasar Boncompagni. Помѣщено въ Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. XX 1855. pag. 54—62

Chasles, Remarques sur quelques points intéressants des ouvrages de Fibonacci découverts et publiés récemment par M. le prince Boncompagni. См. Comptes Rendus. T. XL. 1855 pag. 775—782.

росовъ, составляющихъ содержаніе XI-й главы первой части „Аль-Фахри", были прямо заимствованы Фибоначчи изъ сочиненія арабскаго математика. Также суммированія строкъ, находящихся въ X-й главѣ „Аль-Фахри", были впослѣдствіи заимствованы Фибоначчи *).

Разсмотримъ теперь нѣкоторыя изъ задачъ, рѣшенныхъ въ сборникѣ Алкарги. Изъ числа вопросовъ, рѣшенныхъ Алкарги въ своемъ сборникѣ особеннаго вниманія заслуживаетъ выраженіе для нахожденія квадратнаго числа (отд. III, зад. 5) равнаго суммѣ квадратовъ двухъ чиселъ, т. е. уравненіе:

$$x^2+y^2=z^2$$

Алкарги принимаетъ $y=x+1$, а $z=nx-1$, при чемъ $n=2$. Подставляя эти значенія y и z въ вышенаписанное уравненіе Алкарги получаетъ:

$$x=\frac{2(n+1)}{n^2-2}\quad,\quad y=\frac{(n+1)^2-1}{n^2-2}\quad,\quad z=\frac{(n+1)^2+1}{n^2-2}$$

Числители этихъ выраженій суть ничто иное какъ формула, данная еще Платономъ **), для построенія прямоугольныхъ треугольниковъ, которыхъ стороны выражаются цѣлыми числами ***). Рѣшеніе этого вопроса Алкарги стремится найти только въ раціональныхъ числахъ ****). Изъ числа другихъ вопросовъ укажемъ еще на слѣдующій (отд. III, зад. 50): построить два прямоугольныхъ раціональныхъ треугольника, коихъ гипотенузы равны т. е.

$$x^2+y^2=u^2 \quad\text{и}\quad z^2+t^2=u^2$$

Алкарги вводитъ условіе $y=x+n$ и говоритъ „выберемъ u равнымъ какому нибудь произвольному числу m". Алкарги принимаетъ $n=2$, а $u=10$. Такимъ образомъ онъ находитъ:

$$2x^2+2nx+n^2=m^2$$

откуда:

$$x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2m^2-n^2}-n\right]$$

При этомъ, необходимо замѣтить, что Алкарги совсѣмъ упустилъ изъ виду

---

*) *Chasles*, Histoire de l'Algèbre. Analyse de quelques ouvrages arabes. Помѣщено въ Comptes Rendus. T. XL. 1855. pag. 782.

**) На эти выраженія мы уже обратили вниманіе выше (см. стр. 25—27).

***) Выраженіе это Боэцій приписываетъ Архиту. Вопросомъ о построеніи прямоугольныхъ треугольниковъ, коихъ стороны числа раціональныя, много занимался Діофантъ. Вся VI-я книга „Ариѳметикъ" посвящена этому вопросу.

****) Вопросъ этотъ также занималъ Пиѳагора, Евклида (см. X-я кн. „Началъ", пред. 29, лемма I) и Фибоначчи, но они подобно Платону дали выраженія для построенія прямоугольныхъ треугольниковъ, коихъ стороны выражены цѣлыми числами.

условіе, что числа m и n должны быть такъ выбраны, чтобы $2m^2-n^2$ было число квадратное. При принятыхъ условіяхъ, $m=10$ и $n=2$, Алкарги находитъ уравненіе:

$$2x^2+4x+4=100$$

откуда:

$$x=-1+\sqrt{1+48}=6, \text{ а } y=8.$$

Далѣе онъ находитъ значенія z и t. Въ другомъ вопросѣ (отд. III, зад. 37) Алкарги ищетъ значенія удовлетворяющія уравненію:

$$x^2+y^2=10.$$

Значенія $x=1$ и $y=3$ онъ устраняетъ, а ищетъ другія, которыя находитъ въ видѣ: $x^2=6\frac{19}{25}$ и $y^2=3\frac{6}{25}$.

Приведемъ еще нѣсколько задачъ IV-го отдѣла. Напр. (зад. 23), найти неизвѣстныя изъ системы уравненій:

$$x^2+y^2=z^2 \qquad xz=y^2 \qquad xy=10$$

Алкарги находитъ:

$$y=\frac{10}{x} \quad , \quad z=\frac{100}{x^3}$$

откуда:

$$x^2+\frac{100}{x^2}=\frac{10000}{x^6}$$

Затѣмъ онъ умножаетъ это выраженіе сначала на x^2, а потомъ на x^4, и находитъ:

$$10000=100x^4+x^8 \quad , \quad x^4=\sqrt{12500}-50$$

откуда:

$$x=\sqrt{\sqrt{\sqrt{12500}-50}} \text{ *)}$$

Изъ другихъ задачъ укажемъ еще на одну (отд. IV, зад. 39), именно:

$$x^2+x+1=y^2 \qquad x^2+2x+2=z^2$$

Алкарги полагаетъ:

$$z=\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}$$

откуда очевидно:

$$x^2+2x+2=x^2+x+1\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+1}$$

---

*) Этотъ же самый вопросъ рѣшаетъ Фибоначчи въ XV-й главѣ своего „*Liber abaci*". Смот. *Libri*, Histoire des sciences mathématiques en Italie, T. II, Note III, pag. 451—458.

слѣдовательно:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=x^2+\left(1\frac{1}{2}\right)x+\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\right]$$

или:

$$x=\frac{7}{8}.$$

Въ концѣ этой задачи Алкарги дѣлаетъ слѣдующее замѣчаніе: „въ числѣ подобныхъ вопросовъ есть такіе, которые неразрѣшимы этимъ способомъ. Въ комментаріяхъ на настоящее сочиненіе я покажу какія изъ задачъ разрѣшимы, и какія неразрѣшимы, а также я укажу въ чемъ заключается искусство умѣнія ихъ рѣшать".

Задачи V-го отдѣла большею частью относятся къ вопросамъ неопредѣленнаго анализа, сводимымъ на уравненія высшихъ степеней; вопросы этого отдѣла, по мнѣнію Вепке, вполнѣ арабскаго происхожденія. Неопредѣленныя уравненія, рѣшенныя въ этомъ отдѣлѣ, принадлежатъ къ нѣсколькимъ группамъ вопросовъ; къ вопросамъ первой группы принадлежатъ уравненія типа:

$$x^a \pm y^a = z^{a+1}$$

полагая:

$$x = my \;,\; z = ny$$

получимъ:

$$(m^a \pm 1)y^a = n^{a+1}.y^{a+1}$$

слѣдовательно:

$$\frac{m^a \pm 1}{n^{a+1}} = y \quad \text{или} \quad y = \frac{n^{a+1}}{m^a \pm 1}$$

Ко второй группѣ принадлежатъ уравненія типа:

$$x^a.y^b = z^c$$

полагая:

$$y = mx \quad , \quad z = nx^p$$

получимъ:

$$m^b.x^{a+b-pc} = n^c$$

Если въ послѣднемъ уравненіи удовлетворяется условіе $a+b-pc=\pm 1$, то вопросъ рѣшенъ и мы имѣемъ:

$$x = \frac{n^c}{m^b} \quad \text{или} \quad x = \frac{m^b}{n^c}$$

Если же приведенное условіе неудовлетворяется, то данное уравненіе сводится къ уравненію вида:

$$x^{a+b-pc}.y^b = z^b$$

Послѣднее уравненіе иногда рѣшается скорѣе и легче первоначальнаго $x^a . y^b = z$.

Къ третьей группѣ принадлежатъ уравненія вида:

$$x^{a+1} \pm bx^a = y^a$$

полагая:

$$y = mx$$

получаемъ:

$$x^{a+1} = (m^a \mp b)x^a \quad , \quad x = m^a \mp b$$

Къ четвертой группѣ принадлежатъ уравненія типа:

$$ax = y^2 \quad , \quad bx = z^3$$

Изъ этихъ уравненій легко получить уравненіе:

$$\frac{y^2}{a} = \frac{z^3}{b}$$

полагая:

$$y = mz$$

легко найти:

$$z = \frac{b}{a} . m^2$$

Подобнымъ образомъ рѣшаются и другіе неопредѣленные вопросы этого отдѣла. Нѣкоторыя задачи пятаго отдѣла заключаютъ рѣшеніе опредѣленныхъ уравненій, которыя представляются въ видѣ уравненій типа:

$$ax^c = y^d \quad , \quad bx^c = y$$

откуда:

$$x = \sqrt[c(d-1)]{\frac{a}{b^d}}$$

При этомъ Алкарги вводитъ условіе:

$$\frac{a}{b^d} = m^{c(d-1)}$$

т. е. онъ ищетъ рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ.

Познакомившись съ содержаніемъ алгебраическаго трактата Алкарги, мы видимъ состояніе Алгебры у арабовъ въ началѣ XI вѣка. Методы, употребленные Алкарги носятъ на себѣ слѣды вліянія сочиненій греческихъ математиковъ. Съ сочиненіями индусскихъ математиковъ арабы были въ то время вѣроятно почти незнакомы, такъ какъ неопредѣленный анализъ, достигшій такой высокой степени развитія у индусовъ, въ сочиненіи Алкарги представляется почти въ томъ же видѣ, какъ мы его встрѣчаемъ въ „Ариө-

матикахъ Діофанта *). Весьма жаль, что до насъ не дошли другія сочиненія, написанныя Алкарги. На заглавія нѣкоторыхъ изъ этихъ сочиненій мы имѣли уже случай указать выше. Кромѣ того въ концѣ „Аль-Факри“ Алкарги упоминаетъ еще объ другихъ сочиненіяхъ, именно онъ говоритъ „я исключилъ изъ настоящаго сочиненія все неотносящееся къ его содержанію. Я желалъ помѣстить въ немъ кое-что относящееся къ свойствамъ фигуръ, круга и наслѣдствамъ, но этого я не сдѣлалъ въ виду двухъ причинъ: первая, это мое отвращеніе къ многословію, а вторая то, что я уже написалъ по каждому изъ этихъ вопросовъ обширное сочиненіе, содержащее начала всего этого, ихъ теорію и рѣшеніе самыхъ сложныхъ задачъ, на основаніи истинныхъ правилъ“. Весьма вѣроятно, что слова Алкарги относятся къ разсмотрѣнному уже нами выше сочиненію, именно „Кафи-филъ-Гисабъ“. Содержаніе послѣдняго сочиненія относиться именно къ вопросамъ, о которыхъ говоритъ Алкарги.

Магометъ, Гэзенъ и Гаметъ. Изъ числа арабскихъ математиковъ IX-го столѣтія наиболѣе извѣстны три брата Магометъ, Гаценъ и Гаметъ. Отецъ ихъ Муза-бенъ-Шакеръ въ молодости былъ разбойникомъ, а впослѣдствіи занималъ видное мѣсто при дворѣ Алмамуна, который обратилъ особенное вниманіе на воспитаніе его сыновей. Поименованные три брата написали много сочиненій, списокъ которыхъ помѣщенъ въ первомъ томѣ каталога Кассири. Изъ числа этихъ сочиненій сохранилось одно въ переводѣ на латинскій языкъ. Содержаніе его относиться къ Геометріи, оно озаглавлено: ***Liber trium fratrum de Geometria.*** Въ настоящее время извѣстны два списка этого сочиненія, одинъ принадлежитъ Базельской библіотекѣ, а другой Парижской **). Первый начинается словами: ***Verba filiorum Moysi filii Schiae, id est Mahumeti Hameti et Hason***, а второй словами: ***Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti Hameti Hasen.*** На Базельскую рукопись первый обратилъ вниманіе Вентури ***). Въ настоящее время сочиненіе арабскихъ

*) Венке, во введеніи къ своему сочиненію „Extrait du Fakhri“ pag. 18—48, указываетъ на все то, что заимствовано Алкарги изъ сочиненій Діофанта, а также сравниваетъ содержаніе трактата „Liber quadratorum“ и XV-ю главу „Liber abaci“ съ содержаніемъ „Аль-Факри“. Кромѣ того Венке разбираетъ методы рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій, находящіеся въ сочиненіяхъ Брамагупты и Баскары.

**) Отрывокъ „Геометріи“, написанной тремя братьями, находится въ рукописи, входящей въ составъ цѣлаго сборника принадлежащаго Торнской библіотекѣ. Сборникъ этотъ описанъ въ статьѣ: *Maximilian Curtze*, Ueber die Handschrift R. 4°. 2, Problematum Euclidis explicatio der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn. (См. Zeitschrift für Mathematik und Physik XIII Jahrgang. Supplement 1868. pag. 44—101. Отрывокъ „Геометріи“ въ Торнской рукописи озаглавленъ: *Verba filiorum Moysi filii Schyr. i. Mahumeti, Hameti, Hasen.*

***) Commentarii sopra la storia e le teorie dell' ottica. T. I—II. 1814. Bologna (см. T. I, pag. 127).

геометровъ предприняль издать Курце*). Сочиненіе это заключаетъ много интереснаго. Особенное вниманіе было обращено на выраженіе площади треугольника въ функціи его сторонъ**). Выраженіе это по мнѣнію нѣкоторыхъ ученыхъ было заимствовано арабскими математиками изъ сочиненій греческихъ геометровъ. Какъ извѣстно, выраженіе это встрѣчается въ сочиненіяхъ Герона Старшаго, но доказательство его разнится отъ доказательства, даннаго тремя братьями, хотя между ними видна зависимость***). Доказательство арабскихъ математиковъ встрѣчается въ сочиненіи геометрическаго содержанія, написанномъ Фибоначчи въ началѣ XIII вѣка. Вѣроятно Фибоначчи былъ знакомъ съ „Геометріей“ трехъ братьевъ. Впослѣдствіи доказательство, данное Фибоначчи, воспроизвелъ Пачіоли въ своемъ сочиненіи *„Summa de arithmetica geometria proportioni“* ****). Кромѣ того на греческое происхожденіе этой формулы указываетъ еще то обстоятельство, что въ сохранившихся латинскихъ рукописяхъ „Геометріи“ трехъ братьевъ, части фигуръ обозначаются буквами совершенно также, какъ въ греческихъ сочиненіяхъ. Весьма вѣроятно, что содержаніе „Геометріи“ и въ томъ числѣ выраженіе площади треугольника въ функціи трехъ его сторонъ было заимствовано старшимъ изъ братьевъ Магометомъ, во время своихъ путешествій въ греческія земли, изъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ, съ сочиненіями которыхъ онъ могъ познакомиться. Во время этихъ путешествій онъ познакомился съ Габитомъ-бенъ-Корра, съ которымъ онъ прибылъ въ Багдадъ. Три сына Музы-бенъ-Шакера пользовались большою извѣстностью среди арабскихъ математиковъ. Они занимались также астрономіей. Алсиджи, въ своемъ сочиненіи „О черченіи коническихъ сѣченій“, приписываетъ имъ нахожденіе способа чертить эллипсъ при помощи

*) Сочиненіе это печатается въ Nova Acta Acad. Caes. Leop.-Carol. German. Naturae Curios. Въ слѣдующемъ томѣ, въ которомъ напечатана „Геометрія“ еще не вышелъ изъ печати.

**) Предложеніе это, по словамъ Вентури, въ Базельской рукописи выражено слѣдующими словами: Et possumus praeter hunc modum convenientem quo scitur embadum omnis trianguli; et isto modo quamvis jam usi sunt multi homines et sciverunt ipsum, tamen ipsi nonnisi usi sunt eo, aut plures eorum, secundum modum credulitatis, praeterquam quod sciverint demonstrationem super ejus veritate.

***) Выраженіе площади треугольника въ функціи его сторонъ было извѣстно также индусскимъ математикамъ. (см. стр. 405—407).

****) Вопросомъ объ историческомъ происхожденіи выраженія площади треугольника въ функціи сторонъ занимался много Гульчъ. Изслѣдованія его помѣщены въ статьѣ: *Fr. Hultsch*, Der Heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreieckes als Function der drei Seiten, помѣщено въ Zeitschrift für Mathematik und Physik. IX Jahrgang, 4 Heft. 1864. pag. 225—249. См. также статью Курце въ Jahresbericht über Mathematik im Alterthum für 1878—79.

натянутой веревки, коей концы прикрѣплены неподвижно. Методъ этотъ основанъ на свойствѣ эллипса, что сумма двухъ его радіусовъ векторовъ есть величина постоянная. По словамъ Альсиджи три брата называли эллипсъ „продолговатымъ кругомъ“. Изъ другихъ сочиненій, написанныхъ тремя братьями, упомянемъ еще одно, которое написано старшимъ братомъ Магометомъ. Предметъ этого сочиненія плоскія и сферическія фигуры, заглавіе его: „*De figuris planis et sphaericis*“ *). Три брата принимали также участіе при измѣреніяхъ длины земнаго меридіана, произведенныхъ по повелѣнію калифа Алмамуна. Старшій изъ братьевъ Магометъ умеръ въ 873 г., его часто смѣшиваютъ съ извѣстнымъ Магометомъ-бенъ-Музой, авторомъ „Алгебры“.

Въ каталогѣ Кассири, въ первомъ томѣ, находиться списокъ двѣнадцати сочиненій, написанныхъ тремя братьями. Въ числѣ этихъ сочиненій поименовано сочиненіе по механикѣ, рукопись котораго хранится въ Ватиканской библіотекѣ, рукопись эта до настоящаго времени неиздана, но есть основаніе предполагать, что содержаніе ея относиться къ различнымъ приборамъ, описаннымъ въ „Пневматикѣ“ Герона Старшаго. Изъ числа сочиненій, написанныхъ тремя братьями, особенное вниманіе заслуживаетъ также сочиненіе о вѣсахъ—*Liber Carastonis*, предметъ котораго относиться къ теоріи, такъ называемыхъ, шведскихъ вѣсовъ, или безмена. Терминъ *caraston* занималъ многихъ ученыхъ; по мнѣнію нѣкоторыхъ ученыхъ подъ этимъ терминомъ слѣдуетъ понимать сочиненіе о вѣсахъ, а по мнѣнію другихъ названіе это есть невѣрно переданное арабами имя Діофанта **). Окончательное разъясненіе дано Штейншнейдеромъ, показавшимъ что терминъ *caruston* или *karastun* соотвѣтствуетъ латинскому названію *bilancia*, т. е. вѣсы, и происходитъ отъ греческаго слова χείρ—*mano* ***)

Старшій изъ братьевъ, Магометъ написалъ также сочиненіе подъ заглавіемъ: „*De mensura figurarum*“, которое пользовалось извѣстностью у арабскихъ математиковъ и входило въ составъ такъ называемыхъ „среднихъ книгъ“ ****). Въ концѣ „Геометріи“ трехъ братьевъ, въ Парижской рукописи,

*) О трудахъ трехъ братьевъ мы уже говорили выше, см. стр. 233—234.

**) Такъ объясняли этотъ терминъ нѣкоторые арабскіе писатели. Гейльброннеръ въ своей „Исторіи математическихъ наукъ“ говоритъ, что нѣкій *Caraso* написалъ сочиненіе о вѣсѣ (см. *Heilbronner*, Historia Matheseos universae. Lipsiae. 1742, in-4).

***) Intorno al *Liber Karastonis*; lettera di *Maurizio Steinschneider* a D. Baldassarre Boncompagni. Помѣщено въ Annali di Matematica pura ed applicata. T. V. 1863. pag. 54—59.

****) Какія сочиненія арабы причисляли къ числу „среднихъ книгъ“ мы указали выше (см. стр. 247). Интересныя свѣдѣнія о „среднихъ книгахъ“ находятся въ статьѣ *Steinschneider*, Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter. Помѣщено въ Zeitschrift für Mathematik und Physik. X Jahrgang, 6 Heft. 1865. pag. 456—498.

приложено маленькое сочинение геометрическаго содержанія, заглавіе котораго: *„Iste modus est sufficiens in arte heptagoni cadentis in circulo"*; последнее сочинение также приписано тремъ братьямъ.

Табитъ-бенъ-Корра. Въ числѣ многочисленныхъ арабскихъ переводчиковъ и комментаторовъ математическихъ сочиненій древнихъ грековъ наиболѣе извѣстно имя Табита-бенъ-Корра *). Онъ родился въ 836 г., въ Месопотамии, и умеръ въ 901 г. въ Багдадѣ **). Первоначально онъ былъ мѣнялой, но встрѣтившись во время своихъ путешествий съ Магометомъ, однимъ изъ трехъ братьевъ, написавшихъ „Геометрію", онъ отправился съ нимъ въ Багдадъ, гдѣ скоро занялъ видное мѣсто среди тамошнихъ математиковъ и астрономовъ. Табитъ-бенъ-Корра былъ основательно знакомъ не только съ арабскимъ но и съ греческимъ и сирійскимъ языками, а потому ему легко было заняться переводами на арабскій языкъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ. Изъ числа многочисленныхъ его переводовъ наиболѣе извѣстны переводы сочиненій: Евклида, Архимеда, Аполлонія Пергскаго, Птоломея и Теодосія. Кромѣ переводныхъ сочиненій Табитъ-бенъ-Корра написалъ нѣсколько самостоятельныхъ сочиненій. Изъ числа послѣднихъ сочиненій до насъ дошелъ трактатъ, содержаніе котораго касается различныхъ свойствъ чиселъ. На содержаніе этого сочиненія обратилъ вниманіе Венке ***).

Вопросы, разсмотрѣнные въ сочиненіи Табита-бенъ-Корра, касаются различныхъ свойствъ чиселъ и входятъ въ область теоріи чиселъ. Самъ авторъ въ введеніи къ своему сочиненію, замѣчаетъ, что многія изъ своихъ воззрѣній на числа онъ заимствовалъ изъ ученій пиѳагорейцевъ, а также у Евклида и Никомаха, и кромѣ того далъ дальнѣйшее развитіе этому вопросу. Сочиненіе Табита-бенъ-Корра представляетъ первый примѣръ изслѣдованія арабскихъ математиковъ въ области теоріи чиселъ. Предметъ изслѣдованій Табита-бенъ-Корра носитъ на себѣ слѣды сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ. Вопросы, которыхъ касается Табитъ-бенъ-Корра велись въ духѣ греческихъ ариѳметиковъ. Извѣстно, что вопросами, относящимися къ различнымъ свойствамъ чиселъ занимались также индусскіе

*) Полное имя его Abul Hasan Tabit ibn Kurrah ibn Marwan al Harrani. Пишутъ безразлично *Корра* и *Курра*.

**) Перечисленіе сочиненій, написанныхъ Табитъ-бенъ-Коррой, можно найти въ статьѣ *Steinschneider*, Thabit ben Korra, помѣщенной въ *Zeitschrift* für Mathematik und Physik, XVIII Jahrgang 1873 pag. 331—338.

***) *F. Woepcke*, Notice sur une theorie ajoutée par Thâbit ben Korrah a l'arithmétique spéculative des Grecs. См. Journal Asiatique, IV Série, T. XX, 1852, Octobre-Novembre, pag. 420—429.

математики, но вопросы разсмотрѣнные ими носятъ совершенно иной характеръ.

Въ своемъ сочиненіи Табитъ-бенъ-Корра разсматриваетъ вопросъ объ составленіи *совершенныхъ* и *дружественныхъ чиселъ* *). Первыя изъ этихъ чиселъ были извѣстны Евклиду, который далъ правила для ихъ составленія; правила эти впослѣдствіи также даны Никомахомъ. Вторыя числа, по словамъ Ямвлиха, были извѣстны еще Пиѳагору, который указывалъ на числа 220 и 284, какъ примѣры чиселъ подобнаго рода. Какъ отыскиваются *дружественныя* числа Ямвлихъ ничего не говоритъ. Первый, давшій правила для составленія дружественныхъ чиселъ, на сколько извѣстно, былъ Табитъ-бенъ-Корра. Мы сейчасъ укажемъ его пріемъ, но предварительно считаемъ необходимымъ сказать нѣсколько словъ о томъ, что понимали древніе греки подъ терминами *совершенное* и *дружественное* число.

Подъ именемъ *совершеннаго числа* греческіе философы понимали такія числа, которыхъ числовая величина равнялась суммѣ всѣхъ ихъ дѣлителей **). Какъ примѣръ такихъ чиселъ можно указать на числа: 6, 28, 496, такъ какъ числа эти удовлетворяютъ требуемымъ условіямъ, т. е.:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

Подъ именемъ *дружественныхъ чиселъ* древніе понимали два числа такихъ свойствъ, что сумма всѣхъ дѣлителей перваго числа равна второму, а сумма всѣхъ дѣлителей втораго числа равна первому. Примѣромъ такихъ чиселъ могутъ служить числа 220 и 284, такъ какъ онѣ удовлетворяютъ условіямъ:

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

Эти два числа, по словамъ Ямвлиха, были извѣстны еще Пиѳагору, который будто бы отвѣтилъ на вопросъ, что такое другъ, слѣдующимъ образомъ: „такой, который есть другое я, какъ 220 и 284" ***).

---

*) Терминъ *дружественное* число мы перевели дословно съ латинскаго, гдѣ такія числа носятъ названія *numeri amicabiles*, по французски они названы nombres *amiables*, а по нѣмецки *befreundete Zahlen*.

**) Опредѣленіе совершеннаго числа дано Евклидомъ въ VII-й книгѣ своихъ „Началъ" въ 22-мъ опредѣленіи. Къ образованію такого числа Евклидъ указываетъ въ 36-мъ предложеніи IX-й книги „Началъ."

***) См. *Jamblichus*, introductio in Nicomach. arithmeticam. Ed. Tennulius. Arnheim 1668. pag. 47—48.

Табитъ-бенъ-Корра далъ правило для составленія дружественныхъ чиселъ; правило это совмѣстно съ правиломъ, даннымъ Евклидомъ для составленія совершенныхъ чиселъ, рѣшаетъ вопросъ о нахожденіи дружественныхъ чиселъ. Пріемъ Табита-бенъ-Корра заключается въ слѣдующемъ: если $p = 3.2^n - 1$, $q = 3.2^{n-1} - 1$ и $r = 9.2^{2n-1} - 1$ суть числа простыя, то числа $A = 2^n.p.q$ и $B = 2^n.r$ будутъ числа дружественныя. Полагая въ частномъ случаѣ $n = 2$, находимъ: $p = 11$, $q = 5$, $r = 71$ и $A = 220$, $B = 284$.

Вопросъ о различныхъ свойствахъ дружественныхъ чиселъ занималъ многихъ арабскихъ математиковъ. Числамъ этимъ они приписывали различныя сверхъестественныя значенія. Такъ напримѣръ, арабскій писатель X-го вѣка Алъ-Маджрити*) говоритъ, что числа 284 и 220 имѣютъ эротическое дѣйствіе, которое испытано имъ самимъ. Извѣстный Ибнъ-Халдунъ, жившій въ XIV в., также говоритъ**) о чудесныхъ свойствахъ дружественныхъ чиселъ и разсказываетъ, что онѣ употреблялись какъ талисманы. Нѣтъ ничего удивительнаго, что арабскіе математики обратили такое вниманіе на дружественныя числа, если припомнить, что и впослѣдствіи числа эти занимали многихъ первоклассныхъ ученыхъ, какъ напримѣръ Эйлера, написавшаго о нихъ цѣлый трактатъ***).

Кромѣ вышепоименованнаго сочиненія Табитъ-бенъ-Корра написалъ еще сочиненіе, содержаніе котораго, по предположеніямъ Шаля****), относится къ приложенію Алгебры къ Геометріи. Заглавіе этого сочиненія: ***De problematibus algebraicis geometrica ratione comprobandis********); оно поименовано въ каталогѣ Кассири. Также занимался Табитъ-бенъ-Корра рѣшеніемъ задачи трисекціи угла. Построеніе, данное имъ, сохранилъ намъ Алсиджи******). Есть основанія предполагать, что свое построеніе Табитъ-бенъ-Корра заимствовалъ изъ IV-й книги „Математическихъ Коллекцій“ Паппуса.

Изъ числа другихъ сочиненій, написанныхъ Табитъ-бенъ-Корра из-

*) *Алъ-Маджрити*, извѣстный также подъ именемъ *Маслема (Maslem)*, перевелъ на арабскій языкъ сочиненіе Птоломея „Планисферій“. По его словамъ, первый нашелъ дружественныя числа индусскій царь Kanaka, или какъ его обыкновенно называютъ Kanka. Лицу этому приписываютъ индусы многія изобрѣтенія. Маслемъ умеръ между 1005—1008 гг.

**) Prolégomènes historiques d'Ibn-Khaldoun. Troisième partie. Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale. T. XXI. 1868. pag. 178—179.

***) Объ дружественныхъ числахъ говорилъ Декартъ, а Эйлеръ посвятилъ имъ цѣлую статью „De numeris amicabilibus“, которая помѣщена въ собраніи *L. Euleri*, Opuscula Varii Argumenti. T. I—II. 1746—51. Berolini. in-4. (см. T. II).

****) *M. Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, etc. 2 éd. Paris. 1875, in-4. pag. 493.

*****) Мы уже о немъ упоминали выше, см. стр. 236, примѣч.

******) См. *F. Woepcke*. L'Algèbre d'Omar Alkhayyami. Paris. 1851. pag. 118.

вѣстно слѣдующее, заглавіе котораго „*De figura sectoris*". Арабскій оригиналъ этой рукописи хранится въ библіотекѣ Эскуріала. Сочиненіе это входило въ число „среднихъ книгъ" (см. стр. 247). Предметъ этого сочиненія изслѣдованіе свойствъ фигуры, которая образуется пересѣченіемъ двухъ дугъ, въ углѣ, образованномъ двумя большими кругами на шарѣ. Содержаніе сочиненія Табита-бенъ-Корра, какъ видимъ, относится къ Тригонометріи. Вѣроятно содержаніе своего сочиненія Табитъ-бенъ-Корра заимствовалъ изъ I-й книги „Альмагеста" Птоломея, которая есть извлеченіе изъ III-й книги „Сферикъ" Менелая. Основное предложеніе, въ сочиненіи Табитъ-бенъ-Корра, носило у арабскихъ математиковъ названіе „*regula intersectionis*" и было предметомъ изслѣдованій многихъ ученыхъ и вошло въ ихъ сочиненія *).

Подобно Магомету-бенъ-Музѣ (старшему изъ трехъ братьевъ, написавшихъ „Геометрію"), Табитъ-бенъ-Корра написалъ сочиненіе „О вѣсахъ"— *Liber Carastonis*—которое заключаетъ весьма много интереснаго. Изъ содержанія этого сочиненія видно, что авторъ его основательно былъ знакомъ съ теоріей рычага. Курце издалъ это сочиненіе по рукописи, хранящейся въ Торнской библіотекѣ **). Сочиненіе „О вѣсахъ" Табита-бенъ-Корра пользовалось извѣстностью въ Средніе Вѣка, такъ какъ оно было переведено на латинскій языкъ Герардомъ Кремонскимъ.

Другія сочиненія, написанныя Табитъ-бенъ-Корра, относятся къ астрономіи, а потому мы о нихъ ничего не говоримъ. Сочиненіе Табита-бенъ-Корра „О секторѣ" поименовано также въ переводахъ Герарда Кремонскаго, гдѣ оно озаглавлено: „*De figura quae nominatur sector*" или „*De figura alhata*". Послѣднее названіе вѣроятно обязано своимъ происхожденіемъ арабскому названію сектора *catha*, о которомъ мы упоминали выше.

Альбатани. Магометъ-бенъ-Джеферъ, болѣе извѣстный подъ именемъ Альбатани ***), былъ родомъ изъ города Батена, въ Сиріи. Онъ производилъ астрономическія наблюденія отъ 877 г. до 918 г. въ городахъ Ракка, и...

*) Вопросомъ этимъ также занимались многіе европейскіе математики во время Среднихъ Вѣковъ. Правило арабскихъ математиковъ вошло въ ихъ сочиненія, такъ напр. оно было заимствовано англичаниномъ *Бредономъ* (*Simon de Bredon* или Simon *Beridonus*), жившимъ около 1350 г. Фигуру, образованную пересѣченіемъ круговъ, арабы называли *Katta*. Названіе это также заимствовали въ своихъ сочиненіяхъ европейскіе математики, писавшіе о фигурѣ *Catha*. Фигура эта есть ничто иное какъ секторъ.

**) Въ статьѣ *Curtze*, Ueber die Handschrift R. 4°.2, Problematum Euclidis explicatio der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn, помѣщено сочиненіе „О вѣсахъ" подъ заглавіемъ: „*Carastonis liber editus a Thebith filio Thore*". См. Zeitschrift für Math. und Physik. XIII Jarg. Supp. 1868. pag. 56—61.

***) Онъ принадлежалъ къ княжескому роду. Альбатани есть латинизированное *Albategnius*; имя это онъ получилъ отъ мѣста своего рожденія Батена.

Эфратѣ, а потомъ Антіохіи, въ Сиріи. Умеръ онъ около 929 г. Альбатани авторъ астрономическаго сочиненія, которое было переведено на латинскій языкъ въ XII в. извѣстнымъ Платономъ Тивольскимъ подъ заглавіемъ: „Liber de motu stellarum". Въ этомъ сочиненіи помѣщены его наблюденія *). Сочиненіе это пользовалось большою извѣстностью въ Средніе Вѣка; оно было комментировано впослѣдствіи Регіомонтанусомъ **). Содержаніе своего сочиненія Альбатани заимствовалъ изъ „Альмагеста" Птоломея.

Въ сочиненіи Альбатани, въ III-й главѣ, изложена Тригонометрія, причемъ тригонометрическія формулы не носятъ уже геометрическаго характера, какъ въ сочиненіи Птоломея, а являются въ видѣ алгебраическихъ выраженій. Альбатани ввелъ первый вмѣсто хордъ *синусы*. Названіе термина *синусъ* получило свое происхожденіе въ переводѣ на латинскій языкъ сочиненія Альбатани, изданнаго Платономъ Тивольскимъ. Мы считаемъ нелишнимъ указать на происхожденіе термина *sinus*. Терминъ этотъ многіе ученые объясняли различно, болѣе правдоподобное дано оріенталистомъ Мункомъ; оно состоитъ въ слѣдующемъ: хорду, какъ извѣстно, индусскіе математики называли *jyâ* или *jîva*, т. е. тетива лука, а половину хорды—*ardhajyâ*. Впослѣдствіи стали также называть саму хорду *jyâ*. Въ такомъ видѣ терминъ этотъ перешелъ къ арабскимъ математикамъ у которыхъ онъ превратился въ *dschîba*. Съ послѣднимъ словомъ представляетъ сходство арабское слово *dschaib*, т. е. разрѣзъ въ платье ***). Такъ какъ оба слова *dschîba* и *dschaib* весьма мало различаются, то арабы постоянно стали употреблять второе. Въ такой формѣ употреблялъ это слово и Альбатани въ своемъ сочиненіи; Платонъ Тивольскій переводя сочиненіе арабскаго астронома пе-

*) Содержаніе этого сочиненія и обозрѣніе астрономическихъ трудовъ Альбатани можно найти въ сочиненіи: *Delambre*, Histoire de l'astronomie du Moyen-age. Paris, 1819, in 4. См. pag. 10—62.

**) Сочиненіе это было въ первый разъ напечатано въ 1537 г. въ Нюренбергѣ, съ прибавленіями Регіомонтануса. Изданіе это заключаетъ переводъ Платона Тивольскаго; сочиненіе Альбатани озаглавлено: In nomine Domini incipit liber Machometi filii Gebir filii Cinan qui vocatur Albategni in numeris stellarum et in locis motuum earum experimenti ratione conceptorum in quo LVII capitula continentur. При этомъ изданіи помѣщены „Начала астрономіи" Альфергана, въ переводѣ писателя XII в. Іоанна Севильскаго. Послѣднее сочиненіе озаглавлено: Brevis ac perutilis compilatio Alfragani Astronomorum peritissimi totum id continens quod ad rudimenta astronomica est opportunum. Впослѣдствіи оно было снова издано подъ заглавіемъ: Mahometis Albatenii de Scientia Stellarum liber cum aliquot additionibus Joannis Regiomontani, ex Bibliothecâ Vaticanâ transcriptus, Bononiae, 1645, in 4.

***) Слово *dschaib*, на арабскомъ языкѣ, означаетъ разрѣзъ въ платье на груди—пазуха.

ревели терминъ *dscharb* въ его прямомъ смыслѣ, т. е. въ смыслѣ *разрѣза*, который по-латински выражается словомъ *sinus* *). Кромѣ того арабы иногда синусъ называли *kardaga*; названіе это происходитъ отъ санскритскаго *kramajyâ*.

Изъ тригонометрическихъ выраженій Альбатани извѣстны всѣ формулы, находящіяся въ „Альмагестѣ" и кромѣ того зависимость, существующая между тремя сторонами и однимъ изъ угловъ сферическаго треугольника, въ видѣ выраженія:

$$\text{Cos}\, a = \text{Cos}\, b\, \text{Cos}\, c + \text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, c\, \text{Cos}\, A$$

также извѣстно ему и обратное выраженіе, т. е.:

$$\text{Sin. vers.}\, A = \frac{\text{Cos}\,(b - c) - \text{Cos}\, a}{\text{Sin}\, b\, \text{Sin}\, c}$$

Изъ другихъ тригонометрическихъ функцій встрѣчаются въ сочиненіи Альбатани тангенсы въ видѣ выраженія $\frac{\text{Sin}}{\text{Cos}}$. Тангенсъ онъ называетъ *растянутая тѣнь*.

Алсингари. Изъ числа арабскихъ математиковъ, жившихъ въ концѣ X-го столѣтія извѣстенъ Алсингари, носившій также имя *Алсиджи*. Онъ авторъ нѣсколькихъ сочиненій, изъ которыхъ наиболѣе извѣстенъ сборникъ математическихъ сочиненій, составленный имъ въ 972 г. въ Ширазѣ; объ этомъ сборникѣ мы уже упоминали выше (см. стр. 245—246). Въ числѣ сочиненій, составляющихъ сборникъ, нѣкоторыя написаны самимъ Алсингари. Изъ этихъ сочиненій особеннаго вниманія заслуживаетъ трактатъ „О трисекціи угла" **). Сочиненіе это интересно въ томъ отношеніи, что авторъ указываетъ на рѣшенія задачи трисекціи угла, предложенныя нѣкоторыми математиками; при этомъ Алсингари замѣчаетъ, что задача эта впервые была рѣшена Табитъ бенъ-Корра, а потомъ Алкуги. Въ началѣ своего сочиненія Алсингари говоритъ: „не смотря на все желаніе древнихъ рѣшить эту задачу, и на всѣ усилія многихъ занимавшихся этимъ вопросомъ, ни одинъ въ этомъ не успѣлъ". Изъ послѣднихъ словъ Алсингари видно, что ему были неизвѣстны „Математическія Коллекціи" Паппуса, въ которыхъ находиться два рѣшенія задачи трисекціи угла ***). Первое изъ

*) Другіе ученые производятъ слово *sinus* отъ латинскаго сокращеннаго термина *s. ins.*, соотвѣтствующаго выраженію *semis inscriptae*. Подъ терминомъ *inscripta* понимали цѣлую хорду, а *semis inscripta* — полухорду.

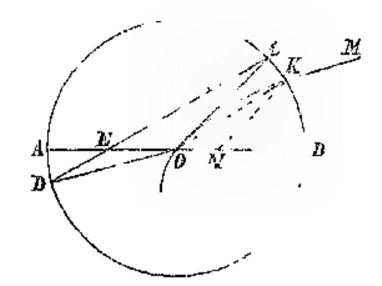
**) Сочиненіе это издано Вепке подъ заглавіемъ: Traité de la trisection de l'angle rectiligne, par Aboû Saïd Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl Alsidjzî, и помѣщено въ прибавленіяхъ къ сочиненію: *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî. Paris 1851. in 8. pag. 117—125.

***) Рѣшенія эти составляютъ предлож. 31—34, IV-й книги.

этихъ рѣшеній совершенно схоже съ рѣшеніемъ, которое Алсингари приписываетъ Табиту-бенъ-Корра. Весьма можетъ быть, что рѣшеніе свое Табитъ-бенъ-Корра нашелъ вполнѣ самостоятельно, не будучи знакомъ съ сочиненіемъ Паппуса.

Показавъ построенія, данныя Табитъ-бенъ-Корра и Алкуги, при рѣшеніи задачи трисекціи угла, Алсингари предлагаетъ свое, которое состоитъ въ слѣдующемъ: Пусть данный уголъ BOC, который требуется раздѣлить на три равныя части. На сторонѣ OC и на продолженіи AO другой стороны OB отложимъ равныя части OC и AO; радіусомъ AO опишемъ

Фиг. 36.



кругъ (фиг. 36). Изъ точки C проведемъ прямую CD, такъ чтобы существовало соотношеніе:

$$EC \cdot EO + EO^2 = OC^2 \qquad (\alpha)$$

кромѣ того существуетъ соотношеніе:

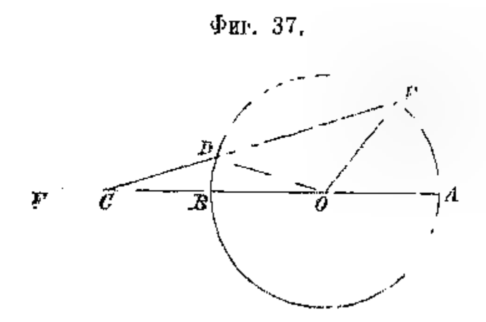
$$OC^2 = OA^2 = EO^2 + AE \cdot EB = EO^2 + DE \cdot EC$$

Сравнивая послѣднее равенство съ предыдущимъ, находимъ $EO = DE$, откуда прямо слѣдуетъ, что уголъ EDO или равный ему $\angle EOD = \frac{1}{3} \angle BOC$. Изъ приведеннаго построенія мы видимъ, что вопросъ о трисекціи угла Алсингари сводитъ на другой, именно: найти точку E такихъ свойствъ, чтобы существовало равенство (α). Точку E Алсингари находитъ, строя гиперболу OKM, которой вершина въ точкѣ O, и дѣйствительная ось которой равна AO. Дѣлая еще нѣкоторыя построенія и пользуясь однимъ изъ предложеній первой книги „Коническихъ Сѣченій" Аполлонія, Алсингари находитъ соотношеніе (α).

Передъ доказательствомъ только что приведеннаго предложенія Алсингари показываетъ, какъ древніе геометры строили уголъ въ три раза меньшій даннаго. Предложеніе это Алсингари выражаетъ въ слѣдующихъ сло-

нахъ: „предложеніе, рѣшенное однимъ изъ древнихъ при помощи линейки и *подвижной* Геометріи, но которое мы должны рѣшить при помощи *неподвижной* Геометріи". Вопросъ о которомъ говоритъ Алсингари состоитъ въ слѣдующемъ: данъ кругъ O и центральный уголъ EOA (фиг. 37); изъ

Фиг. 37.



точки E проведемъ сѣкущую CE такъ, чтобы отрѣзокъ CD равнялся радіусу круга OA. Изъ чертежа видно, что $\angle ECO = \frac{1}{3} \angle EOA$. Изъ приведеннаго построенія видно, что пріемъ *подвижной* Геометріи заключался въ слѣдующемъ механическомъ построеніи: взята линейка, вращающаяся около точки E, линейка эта раздѣлена на равныя части, выраженныя въ частяхъ радіуса. Линейку CE вращаютъ до тѣхъ поръ около точки E пока внѣшній отрѣзокъ сѣкущей CD не сдѣлается равнымъ радіусу OA. Предложеніе это Алсингари приписываетъ одному изъ *древнихъ*; есть основанія предполагать, что древній этотъ есть Архимедъ *).

Изъ другихъ сочиненій, написанныхъ Алсингари, извѣстны еще „Коническія сѣченія", рукопись этого сочиненія хранится въ Лейденской библіотекѣ. Монтукла упоминаетъ еще другое сочиненіе, заглавіе котораго „Математическіе отвѣты". Кромѣ того Седильо издалъ три маленькихъ сочиненія Алсингари, первое „Отвѣты Алсингари на вопросы, предложенные ему относительно рѣшенія предложеній, заимствованныхъ изъ сочиненія „Леммы" Архимеда" **). Сочиненіе это заключаетъ пятнадцать предложеній. Второе сочиненіе озаглавлено: „Нѣсколько геометрическихъ правилъ", оно содержитъ всего одиннадцать предложеній, относящихся къ свойствамъ круга

*) Предложеніе это вѣроятно заимствовано изъ сочиненія Архимеда „Леммы" которое арабы называли „*Assumpta*". Приведенное предложеніе представляетъ сходство съ 8-мъ предложеніемъ „Liber Assumptorum.", См. послѣднее изданіе сочиненій Архимеда *Heiberg*, Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii. Lipsiae. Vol. II. 1881. in-8. pag. 437—438.

**) Объ этомъ сочиненіи мы уже упоминали выше (см. стр. 242).

и эллипса. Третье сочиненіе озаглавлено: „Замѣтка Алсинджари о линіяхъ проведенныхъ, внутри данныхъ круговъ, чрезъ данныя точки"; сочиненіе это содержитъ тринадцать предложеній *). Во второмъ изъ только что приведенныхъ сочиненій Алсинджари ссылается на два другія сочиненія, написанныя имъ, именно: „Геометрическія замѣтки" **) и „О свойствахъ эллипса"; послѣднее сочиненіе было вѣроятно довольно обширно, такъ какъ авторъ ссылается на 72-е предложеніе этой книги. Къ сожалѣнію поименованныя сочиненія до насъ не дошли. Также много занимался Алсинджари вопросомъ о черченіи коническихъ сѣченій; отрывокъ изъ сочиненія по этому предмету былъ изданъ Венке ***). Въ этомъ отрывкѣ авторъ упоминаетъ о своемъ сочиненіи „Трактатъ о построеніи коническаго циркуля", но сочиненіе это вѣроятно утеряно.

Алкуги, извѣстный также подъ именемъ *Вайджана-ибнъ-Рустама* ****), принадлежалъ къ ученымъ Багдадской школы. Онъ извѣстенъ не только, какъ авторъ многихъ математическихъ сочиненій, но и какъ искусный астрономъ. Изъ астрономическихъ его наблюденій извѣстны наблюденія надъ лѣтнимъ и зимнимъ солнцестояніемъ, произведенныя въ 988 г. въ Багдадѣ. Наблюденія эти онъ производилъ уже въ глубокой старости *****).

Самыя интересныя изслѣдованія Алкуги касаются вопросовъ, которые были затронуты еще древними греческими геометрами Архимедомъ и Аполлоніемъ, но которые получили только окончательное развитіе благодаря трудамъ арабскихъ математиковъ; вопросы эти касаются рѣшенія геометри-

---

*) Поименованныя три сочиненія были изданы Седильо подъ заглавіемъ: „Réponse de Al-Sindjiari aux demandes qui lui ont été faites sur la solution de propositions tirées du livre des Lemmes d'Archimède", „Quelques règles géométriques par Al-Sindjiari"; „Opuscule d'Al-Sindjiari sur les lignes menées dans des cercles donnés par des points donnés". Сочиненія эти напечатаны въ сочиненіи *Am. Sedillot*, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux Paris. 1845. T. I, pag. 402—413.

**) Седильо перевелъ заглавіе этого сочиненія „Геометрическія короларіи". По арабски сочиненіе это озаглавлено „Tâhkat", но подъ этимъ названіемъ, по словамъ Гербело, извѣстно нѣсколько различныхъ сочиненій.

***) Отрывокъ этотъ помѣщенъ въ статьѣ. Trois traités arabes sur le compas parfait, publiés et traduits par *M. François Woepeke*. Напечатано въ Notices et extraits de la Bibliothèque Nationale. T. XXII. Paris. 1874. См pag. 112—115.

****) Настоящее имя его было Waidschan ibn Rustam Abû Saal Alkuhi, послѣднее названіе онъ получилъ отъ мѣста своего рожденія—горъ Al-Kuh въ Табаристанѣ.

*****) Извѣстно, что въ молодости Алкарги давалъ одно изъ своихъ сочиненій для просмотра и исправленія математику *Синану*, сыну Табита-бенъ-Корра. Синанъ считался весьма свѣдущимъ геометромъ. Онъ умеръ въ 948 г., т. е. за 45 лѣтъ до упомянутыхъ наблюденій Алкарги.

ческихъ вопросовъ, которые аналитически сводятся на рѣшеніе уравненій выше второй степени. Изъ числа подобныхъ вопросовъ намъ извѣстно рѣшеніе задачи трисекціи угла, приведенное въ сочиненіи Алсингари, современника Алкуги.

Особенное вниманіе заслуживаютъ рѣшенія, найденныя Алкуги для слѣдующихъ трехъ вопросовъ: 1) найти шаровой сегментъ равный одному данному шаровому сегменту и подобный другому; 2) найти шаровой сегментъ, котораго кривизна одинакова съ кривизной одного даннаго шароваго сегмента и подобный другому данному сегменту; 3) найти шаровой сегментъ, который съ двумя данными сегментами, находился въ слѣдующемъ соотношеніи: чтобы объемъ его равнялся объему одного изъ данныхъ шаровыхъ сегментовъ, а кривизна поверхности была одинакова съ кривизной другаго сегмента. Задачи эти тѣсно связаны между собою. Первыя двѣ изъ поименованныхъ задачъ находятся во второй книгѣ сочиненія Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ" и заключаются въ 6 и 7 предложеніяхъ. Послѣдній вопросъ, самый трудный, рѣшенъ Алкарги вполнѣ самостоятельно. Неизвѣстную величину онъ находитъ при помощи пересѣченія равносторонней гиперболы и параболы. При этомъ Алкуги вводитъ тѣ необходимыя условія только при существованіи которыхъ задача можетъ быть рѣшена. Введеніе подобныхъ условій, показывающихъ условія возможности задачъ, было еще извѣстно древнимъ греческимъ геометрамъ, которые называли ихъ *діоризмами* (см. стр. 54). Къ сожалѣнію весьма рѣдко послѣдователи греческихъ геометровъ въ рѣшенія задачъ вводили діоризмы; только благодаря строгому изслѣдованію условій, при которыхъ задача разрѣшима, Алкуги нашелъ рѣшеніе третьяго изъ вышеприведенныхъ вопросовъ. Сочиненіе Алкуги, въ которомъ имъ даны рѣшенія вышеприведенныхъ трехъ вопросовъ, заключало комментаріи на II-ю книгу сочиненія Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ" *).

Много также занимался Алкуги надъ рѣшеніемъ слѣдующаго вопроса: раздѣлить десять на такія двѣ части, чтобы сумма, составленная изъ суммы квадратовъ этихъ частей и частнаго отъ дѣленія большей на меньшую равнялась 72. Вопросъ этотъ сводиться на рѣшеніе слѣдующаго уравненія третьей степени:

$$(10-x)^2+x^2+\frac{10-x}{x}=72$$

*) Подлинникъ этого сочиненія до насъ не дошелъ. Рукопись, содержащая приводимые нами три вопроса, есть вѣроятно извлеченіе изъ сочиненія Алкарги; авторъ рукописи неизвѣстенъ.

или:

$$x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2$$

Не смотря на всѣ усилія, рѣшить это уравненіе Алкуги не съумѣлъ *).

Изъ числа другихъ сочиненій, написанныхъ Алкуги, укажемъ на слѣдующія: „Трактатъ о центрахъ инструментовъ“, „Трактатъ о началахъ Геометріи, какъ она изложена у Евклида“, оба эти сочиненія не окончены авторомъ. Сочиненіе „О построеніи астролябій“ въ двухъ книгахъ, хранящееся въ Лейденской библіотекѣ, при немъ находится комментарій. Сочиненіе „Объ опредѣленіи точекъ на прямыхъ“, въ которомъ Алкуги рѣшаетъ задачу: изъ данной точки провести двѣ прямыя, заключающія данный уголъ; при этомъ Алкуги вводитъ различныя другія условія. Сочиненіе, написанное въ защиту Табита-бенъ-Корра, предметъ котораго относится къ непрерывному сочетанію двухъ движеній. Сочиненія „О центрахъ круговъ, расположенныхъ на линіяхъ, на основаніи аналитическаго метода, безъ помощи синтеза“ и „О касающихся кругахъ, на основаніи аналитическаго метода“; въ послѣднихъ сочиненіяхъ Алкуги рѣшаетъ слѣдующія задачи: построить кругъ, проходящій чрезъ двѣ данныя точки, или касающійся двухъ данныхъ прямыхъ и коего центръ лежитъ на данной прямой; построить кругъ, коего центръ лежалъ-бы на данной кривой, и касающійся двухъ данныхъ круговъ. При этомъ Алкуги замѣчаетъ, что прежде чѣмъ познакомиться съ „Коническими сѣченіями“ Аполлонія, онъ рѣшаетъ частный вопросъ, который не ведетъ къ коническимъ сѣченіямъ; вопросъ этотъ заключается въ слѣдующемъ: линія, положеніе которой извѣстно, есть часть окружности, а центры трехъ круговъ лежатъ на одной прямой. Также написалъ сочиненія Алкуги подъ заглавіемъ: „О двухъ средне-пропорціональныхъ“ и „О нахожденіи стороны правильнаго семиугольника, вписаннаго въ кругъ“. Къ сожалѣнію послѣднія два сочиненія Алкуги до насъ не дошли, въ особенности интересно второе, такъ какъ построеніе семиугольника, вписаннаго въ кругъ, зависитъ отъ уравненія третьей степени, т. е. сводится на пересѣченіе двухъ коническихъ сѣченій. По словамъ неизвѣстнаго автора „имъ и Алкуги впервые была построена хорда седьмой части окружности при помощи коническихъ сѣченій“ **).

*) Корни этого уравненія суть: $x_1 = 2$, $x_2 = 4 + \frac{1}{2}\sqrt{71}$ и $x_3 = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{71}$.

**) Построеніе стороны семиугольника, вписаннаго въ кругъ, показано въ „Отвѣтѣ“ неизвѣстнаго автора на предложенный ему вопросъ: опредѣлить въ прямоугольномъ треугольникѣ отношеніе двухъ катетовъ, когда данъ уголъ, противолежащій первому изъ катетовъ. Вопросъ этотъ былъ предложенъ Абу-Бекромъ-Алхамеи. Рѣшеніе этого вопроса приведено въ сочиненіи: *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi. pag. 126—127.

Въ послѣднее время издано сочиненіе Алкуги, заглавіе котораго „Совершенный циркуль“; подъ именемъ *совершеннаго циркуля* арабы понимали инструментъ для черченія всѣхъ коническихъ сѣченій. Сочиненіе это было издано Венке*); оно состоитъ изъ двухъ книгъ: въ первой книгѣ показано по словамъ автора, что при помощи этого прибора можно чертить правильныя линіи, т. е. прямыя, окружности, параболы, эллипсы и вѣтьви гипербол. Во второй книгѣ изложена теорія приведенныхъ кривыхъ, въ предположеніи, что положеніе ихъ дано. Въ введеніи къ своему сочиненію Алкуги замѣчаетъ, что инструментъ о которомъ онъ будетъ говорить вполнѣ принадлежитъ ему, такъ какъ ему неизвѣстно былъ-ли подобный приборъ извѣстенъ древнимъ или нѣтъ. Построенію коническихъ сѣченій Алкуги придавалъ особенное значеніе, какъ это видно изъ послѣдняго сочиненія. По словамъ Албируни, Алкуги свои методы построенія коническихъ сѣченій при помощи прибора, основывалъ на предложеніяхъ, изложенныхъ въ его сочиненіи, заглавіе котораго „Раздѣленіе линій на основаніи отношеніи, коихъ члены суть поверхности“. Содержаніе послѣдняго сочиненія совершенно неизвѣстно.

Алсагани, извѣстный также подъ именемъ *Алъ-Устурлаби*, т. е. дѣлателя астролябій, умеръ въ 990 г. Онъ былъ родомъ изъ города Сагана въ Хороссанѣ. Изъ математическихъ его изслѣдованій до насъ дошло только предложеніе, относящееся къ трисекціи угла; предложеніе это сохранилъ намъ Алсинджари**). Алсагани былъ извѣстенъ какъ опытный и свѣдущій дѣлатель астролябій, приборы эти, какъ извѣстно, были въ большемъ употребленіи у арабскихъ астрономовъ при производствѣ астрономическихъ наблюденій. Астролябіи были угломѣрные снаряды, представляющіе, по словамъ Кантора, переходъ отъ діоптръ Герона къ нынѣшнимъ теодолитамъ.

Алходжанди, родомъ изъ Ходжента, жилъ въ концѣ X-го вѣка; извѣстно астрономическое наблюденіе, произведенное имъ въ 992 г. Сочиненія его до насъ не дошли. Изъ математическихъ изслѣдованій Алходжанди особеннаго вниманія заслуживаетъ доказательство данное имъ знаменитаго

*) Сочиненіе это издало Венке по рукописи, принадлежащей Лейденской библиотекѣ. Рукопись эта заключаетъ кромѣ сочиненія Алкуги, еще два трактата по тому же предмету, одинъ, написанный *Алсинджари*, современникомъ Алкуги, а другой *Магометомъ-ибнъ-Алгосейномъ*, жившимъ въ концѣ XII вѣка. Послѣднему автору сочиненіе Алкуги неизвѣстно. Трудъ Венке былъ напечатанъ, весьма недавно, Можемъ подъ заглавіемъ: Trois traités arabes sur le compas parfait, publiés et traduits par *François Woepcke*. Помѣщено въ Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale. T. XXII. 1874. pag. 1—175.

**) Въ своемъ сочиненіи „О трисекціи угла“. См. *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyami. pag. 119.

предложенія теоріи чиселъ, что сумма двухъ кубовъ не можетъ быть равна числу кубическому, т. е. что выраженіе $x^3 + y^3 = z^3$ не можетъ быть рѣшено въ раціональныхъ числахъ. Къ сожалѣнію доказательство, данное Алходшанди, до насъ не дошло, но по словамъ нѣкоторыхъ математиковъ, оно было неудовлетворительно. Кромѣ того Алходшанди занимался раціональными прямоугольными треугольниками, но по словамъ современниковъ изслѣдованія эти неполны.

Абулъ Вефа. Къ числу самыхъ замѣчательныхъ арабскихъ математиковъ и астрономовъ, жившихъ въ X вѣкѣ, принадлежитъ Абулъ Вефа *). Онъ родился въ 940 г. въ Бузджанѣ, въ Хорессанѣ, и умеръ въ 998 г. въ Багдадѣ. Не только современники, но и позднѣйшіе писатели отзывались о немъ, какъ объ одномъ изъ самыхъ свѣдущихъ геометровъ **). Онъ написалъ множество сочиненій, изъ которыхъ, къ сожалѣнію, дошли до насъ только незначительные отрывки. Абулъ Вефа принадлежитъ къ числу послѣднихъ арабскихъ переводчиковъ и комментаторовъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ. По словамъ арабскихъ писателей Абулъ Вефа обратилъ вниманіе на сочиненія Діофанта, которыя были имъ переведены и комментированы, также комментировалъ онъ „Алгебру" Магомета-бенъ-Музы и сочиненіе алгебраическаго содержанія, написанное Гиппархомъ. Всѣ эти сочиненія пропали безслѣдно. Въ особенности слѣдуетъ сожалѣть потерю сочиненія, заключавшаго комментаріи на труды Гиппарха, такъ какъ объ этомъ сочиненіи не существуетъ положительно никакихъ указаній. Послѣднее сочиненіе могло бы, безъ сомнѣнія, пролить много свѣта на состояніе Алгебры у грековъ до Діофанта ***). По словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей, сочиненіе алгебраическаго содержанія было написано также Аристархомъ ****).

*) Полное имя его Aboûl Wafâ Mohammed Ben Mohammed Ben Jahyâ Ben Ismâ'îl Ben Al'abbâs Albouzdjânî. Пишутъ безразлично *Абулъ Вефа* и *Абулъ Вафа*.

**) Абулъ-Фараджъ-Ибнъ-Алнадимъ въ своемъ сочиненіи „Qitâb Alfihrist" приводитъ списокъ сочиненій, написанныхъ Абулъ Вефой. Нѣкоторыхъ сочиненій въ спискѣ нѣтъ, такъ какъ замѣтка эта написана въ 988 г., т. е. за десять лѣтъ до смерти Абулъ Вефы. Вепке издалъ эту замѣтку.

***) Относительно алгебраическаго сочиненія Гиппарха положительныхъ указаній нѣтъ, о немъ упоминаютъ всѣ писатели мимоходомъ. Нѣкоторые называютъ это сочиненіе трактатомъ „О квадратныхъ уравненіяхъ".

****) Кромѣ Гиппарха сочиненіе алгебраическаго содержанія приписываютъ еще Аристарху. Сочиненіе это въ каталогѣ Казири (Bibliot.-arabico-hispana Escurial. T. I, pag. 346) озаглавлено „*el-Dschebr*", Казири неправильно перевелъ это заглавіе, назвавъ это сочиненіе „*Arithmetica*". Венрихъ неправильно назвалъ это сочиненіе *De fractionum ad integritatem reductione*" (см. *Wenrich*, De auctorum graecorum versionibus etc. Lips. 1842, pag. 210). Штейншнейдеръ полагаетъ, не безъ основанія, что алгебраическаго трактата,

Объ астрономическихъ трудахъ Абуль Вефы мы не будемъ говорить, такъ какъ это не входитъ въ предѣлы нашего сочиненія, замѣтимъ только, что имъ написано было сочиненіе подъ заглавіемъ „Альмагестъ“, содержаніе котораго частію заимствовано изъ знаменитаго трактата Птоломея. Въ одной изъ главъ этого сочиненія находиться мѣсто, которое служило предметомъ самой оживленной полемики между учеными. Мѣсто это касается вопроса было-ли дѣйствительно извѣстно Абулъ Вефѣ одно изъ неравенствъ въ движеніяхъ луны, извѣстное подъ именемъ *variatio*. Какъ извѣстно, движеніе это было снова замѣчено Тихо-де-Браге, шестсотъ лѣтъ послѣ Абуль Вефы. Приведенное мѣсто изъ сочиненія арабскаго астронома занимало многихъ ученыхъ. Извѣстный Седильо и Шаль утверждали, что варіація была замѣчена Абуль Вефой, другіе же ученые, какъ напримѣръ: Либри, Біо, Мункъ и Бертранъ были противнаго мнѣнія. По мнѣнію Біо, Абуль Вефа былъ только самый заурядный переписчикъ сочиненія Птоломея, переписывавшій многое не понимая, открытіе же варіаціи ему навязано. Не входя въ дальнѣйшій разборъ различныхъ мнѣній, высказанныхъ учеными по этому предмету, замѣтимъ только, что едва-ли мнѣніе Біо вполнѣ справедливо *).

Изъ числа многочисленныхъ сочиненій, написанныхъ Абулъ Вефой, въ настоящее время, извѣстны два, дошедшія до насъ въ спискахъ его учениковъ. Первое изъ этихъ сочиненій носитъ заглавіе „Книга о геометрическихъ построеніяхъ“, а второе есть трактатъ по математикѣ, въ которомъ помѣщено собраніе различныхъ практическихъ правилъ, имѣющихъ приложеніе при рѣшеніи различныхъ вопросовъ. Сочиненіе это дошло до насъ также въ неполномъ видѣ **).

„Книга о геометрическихъ построеніяхъ“ не была написана самимъ

написаннаго Аристархомъ, никогда не существовало, и приписываетъ его возникновеніе простой случайности—ошибкѣ (см. *Steinschneider*, Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter, pag. 23).

*) Интересная переписка по этому вопросу помѣщена въ слѣдующихъ статьяхъ: *Am. Sédillot*, Sur la détermination de la troisième inégalité lunaire ou *variation* par Aboul Wéfâ et Tycho Brahé (Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, T. I pag. 51—58. 1868).—*Am. Sédillot*, Des savants arabes et des savants d'aujourd'hui, à propos de quelques rectifications (Bullettino di Bibliog. T. IV pag. 401—408. 1871).—*Am. Sédillot*, Sur les emprunts que nous avons faits à la science arabe, et en particulier de la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul Wéfâ de Bagdad, astronome du X-e siècle (Bullettino di Bibliog. T. VIII. pag. 63—78, 1875).—*J. Bertrand*, La théorie de la Lune d'Aboul Wéfâ. (Journal des Savants, Octobre 1871).—*Chasles* (а также отвѣтъ Bertrand), Comptes Rendus, Avril 1873.

**) На содержаніе и оглавленіе этого сочиненія мы указывали выше (см. стр. 241).

Абулъ Вефой, такъ какъ этого сочиненія нѣтъ въ спискахъ, гдѣ перечисляются труды арабскаго геометра. Сочиненіе это вѣроятно составлено его учениками и заключаетъ лекціи, читанныя Абулъ Вефой. Такое предположеніе весьма вѣроятно, такъ какъ въ біографіяхъ Абулъ Вефы говорится, что „имъ были читаны курсы, которые посѣщались съ большою пользою". Кромѣ того въ дошедшемъ до насъ спискѣ этого сочиненія сказано, что это сочиненіе составлено въ видѣ извлеченія. До насъ дошелъ только поздвѣйшій списокъ этого сочиненія, заключающій переводъ съ арабскаго языка на персидскій. Переводъ этотъ сдѣланъ *Абу Исгакомъ-бенъ-Абдалла* при участіи четырехъ его учениковъ. При концѣ своего перевода Абу-Исгакъ говоритъ, что онъ пользовался переводомъ этого сочиненія, сдѣланнымъ до него, однимъ изъ его современниковъ *Неджимъ-Еддинъ-Махмутомъ*. Послѣдній, по словамъ Абу-Исгака, умеръ очень молодымъ и подавалъ блестящія надежды, имъ были написаны комментаріи на „Альмагестъ" и объясненія къ „Сферикамъ" Менелая; кромѣ того онъ написалъ „Извлеченія, содержащія особенные пріемы". Свой переводъ Абу-Исгакъ предпринялъ изъ желанія сохранить труды Неджима для ученаго міра. Къ сожалѣнію мы не знаемъ когда жилъ Неджимъ, а также ничего неизвѣстно объ его трудахъ.

Сочиненіе о геометрическихъ построеніяхъ дошло до насъ въ неполномъ видѣ, часть его утеряна. Разборъ и выдержки изъ этого сочиненія были изданы Венке *). Мы познакомимся болѣе подробно съ содержаніемъ этого сочиненія. Оно представляетъ особенный интересъ, такъ какъ нѣкоторыя изъ геометрическихъ построеній Абулъ Вефы представляютъ поразительное сходство съ построеніями индусскаго математика Баскары; это заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ это указываетъ на знакомство арабскихъ математиковъ съ методами доказательствъ индусскихъ ученыхъ. Сочиненіе это состоитъ изъ введенія и двѣнадцати главъ, въ которыхъ рѣшено много вопросовъ; въ текстѣ сочиненія находится около 170 фигуръ. Во введеніи авторъ говоритъ объ употребленіи линейки, циркуля и наугольника и показываетъ, какъ строить прямые углы, какъ возставить къ концу прямой перпендикуляръ, не продолжая ее, и наконецъ какъ узнать будетъ-ли данный уголъ прямой или нѣтъ. Содержаніе главъ слѣдующее:

Глава I. О предметахъ, составляющихъ начала, которыми необходимо прежде всего заниматься.

Глава II. О равностороннихъ фигурахъ, т. е. о правильныхъ многоугольникахъ.

---

*) *Woepcke*, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans. Deuxième article. Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ. Помѣщено въ Journal Asiatique. Cinquième Série, T. V, Février-Mars, Avril 1855. pag. 218—256, 309—359.

Глава III. О построеніи фигуръ, вписанныхъ въ кругъ.

Глава IV. О построеніи круга, описаннаго около фигуръ.

Глава V. О построеніи круга, вписаннаго въ данныя фигуры.

Глава VI. О способахъ вписывать однѣ фигуры въ другія.

Глава VII. О дѣленіи треугольниковъ.

Глава VIII. О дѣленіи четыреугольниковъ.

Глава IX. О дѣленіи круговъ.

Глава X. О способѣ оставлять лучи.

Глава XI. О дѣленіи квадратовъ на извѣстное число квадратовъ и о составленіи квадрата изъ извѣстнаго числа квадратовъ.

Глава XII. О дѣленіи шаровъ и о различныхъ родахъ фигуръ, которыя могутъ быть начерчены на поверхности шара.

Изъ числа вопросовъ, разсмотрѣнныхъ въ сочиненіи Абуль Вефы слѣдующіе три заслуживаютъ особеннаго вниманія:

1) Построеніе различныхъ геометрическихъ задачъ при помощи линейки и одного даннаго раствора циркуля, т. е. введеніе въ рѣшеніе задачи условія, чтобы всѣ построенія были сдѣланы при помощи линейки и одного круга, даннаго радіуса. Вопросамъ этого рода посвящены введеніе и первыя три главы сочиненія Абуль Вефы. Рѣшеніе различныхъ геометрическихъ вопросовъ съ помощью одного раствора циркуля занимало впослѣдствіи геометровъ эпохи возрожденія, какъ напримѣръ Тарталія, Кардано и въ особенности Venедетти. Вепке склоненъ думать, что первая мысль рѣшенія подобнаго рода вопросовъ была заимствована на Западѣ изъ сочиненій арабскихъ математиковъ. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что еще Паппусу было извѣстно рѣшеніе геометрическихъ вопросовъ при помощи одного раствора циркуля *). Вопросъ о производствѣ различныхъ геометрическихъ построеній при посредствѣ одного раствора циркуля занималъ также математиковъ новѣйшаго времени, въ томъ числѣ Маскерони **), Ламбера, Сервуа, Гергонна, Бріаншона, Понселе и Штейнера ***). Приведенныхъ

*) Объ вопросахъ подобнаго рода говоритъ Паппусъ въ пред. 12, книги VIII, „Математическихъ Коллекцій“. Онъ упоминаетъ, что существовала у грековъ „Геометрія съ однимъ растворомъ циркуля (τὰ ἑνὶ διαστήματι γραφόμενα)“. См. *Fr. Hultsch*, Pappi Alexandrini Collectionis cet. Vol. III, Liber VIII, pag. 1074—75.

**) *L. Mascheroni*, La geometria del compasso. Pavia, 1797. in-8. Переведено также на французскій языкъ подъ заглавіемъ. *L. Mascheroni*, Géométrie du compas, trad. de l'italien par Carette. Paris, 1798 in-8; другое изданіе: Paris, 1828, in-8. Также переведено на нѣмецкій языкъ подъ заглавіемъ: *Mascheroni*, Gebrauch des Zirkels, deutsch v. Grüson. Berlin. 1825. in-8.

***) *J. Steiner*, Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Einem festen Kreises. Berlin. 1833. in-8.

именъ достаточно, чтобы заключить о важности вопросовъ, рѣшенныхъ Абулъ Вефой.

2) Ко второй категоріи вопросовъ, разсмотрѣнныхъ Абулъ Вефой, принадлежитъ полное и всестороннее рѣшеніе вопроса: раздѣлить квадратъ на извѣстное число квадратовъ, или составить квадратъ изъ извѣстнаго числа квадратовъ. Вопросъ этотъ рѣшаетъ Абулъ Вефа не при помощи теоремы Пиѳагора, а пользуется болѣе нагляднымъ методомъ наложенія и сравненія различныхъ частей фигуръ между собой. Изъ пріемовъ, употребленныхъ Абулъ Вефой, при рѣшеніи подобнаго рода вопросовъ видно, что имъ была замѣчена связь между геометрическимъ рѣшеніемъ этого вопроса и нѣкоторыми вопросами теоріи чиселъ. Зависимость эта была вѣроятно замѣчена Абулъ Вефой благодаря основательному изученію сочиненій Діофанта, которыя были переведены и комментированы имъ. Кромѣ того вопросы этого рода, какъ мы увидимъ ниже, указываютъ на вліяніе сочиненій индусскихъ математиковъ на методы и направленіе геометрическихъ изслѣдованій арабовъ.

3) Къ числу вопросовъ третьей группы принадлежатъ задачи, относящіяся къ построенію правильныхъ многогранниковъ, а также нѣкоторыхъ видовъ полуправильныхъ. При этомъ необходимо замѣтить, что Абулъ Вефа рѣшаетъ эти вопросы, методомъ отличнымъ отъ пріемовъ, примѣненныхъ Евклидомъ и Паппусомъ при рѣшеніи того же вопроса. Укажемъ вкратцѣ въ чемъ заключается различіе въ пріемахъ Евклида, Паппуса и Абулъ Вефы для построенія многогранниковъ.

Вопросомъ о построеніи правильныхъ многогранниковъ, вписанныхъ въ шаръ, занимается Евклидъ въ XIII-й книгѣ своихъ „Началъ". Многогранники онъ строитъ совершенно независимо отъ шара, въ который они вписаны, только принимая за данное вопроса діаметръ шара. Построивъ многогранникъ Евклидъ показываетъ, что около него можно описать шаръ. Главное вниманіе онъ обращаетъ на численное соотношеніе, существующее между ребромъ многогранника и діаметромъ даннаго шара. Показавъ построеніе пяти правильныхъ многогранниковъ Евклидъ сравниваетъ ихъ ребра между собой и съ діаметромъ шара *). Опредѣленіе соотношеній, существующихъ между этими линіями есть повидимому основная цѣль Евклида, такъ какъ этимъ вопросомъ заканчивается его сочиненіе. Весьма можетъ быть, что все содержаніе X-й книги, введено въ „Начала" для того, чтобы возможно было опредѣлить родъ линій, къ которымъ принадлежатъ ребра додекаэдра и икосаэдра, и вмѣстѣ съ тѣмъ показать къ какому виду ирраціональныхъ линій онѣ принадлежатъ.

*) Книга XIII, предл. 13—18.

Совершенно иному пути слѣдуетъ Паппусъ, который строитъ многогранники прямо въ шарѣ, проводя на поверхности шара малые круги, на которыхъ расположены вершины многогранниковъ, и опредѣляя на этихъ малыхъ кругахъ точки, соотвѣтствующія вершинамъ многогранниковъ. Главная цѣль Паппуса показать, что на шарѣ всегда существуютъ: *a*) два равныхъ и параллельныхъ круга, на которыхъ расположены вершины, вписанныхъ въ шаръ, тетраедра, куба и октаедра; кромѣ того въ каждомъ изъ нихъ вписаны квадратъ куба и треугольникъ октаедра, а діаметромъ служитъ ребро тетраедра. *b*) двѣ пары равныхъ и параллельныхъ круговъ, на которыхъ расположены вершины икосаедра и додекаедра, вписанныхъ въ шаръ; въ одной изъ нихъ лежатъ треугольникъ икосаедра и пятиугольникъ додекаедра. Чтобы построить эти круги Паппусъ опредѣляетъ соотношеніе, существующее между ихъ радіусами, или діаметрами, и діаметромъ даннаго шара. Найти соотношеніе между ребрами многогранниковъ и діаметромъ шара является у Паппуса вопросомъ второстепеннымъ.

Показавъ различіе, существующее между пріемами Евклида и Паппуса, мы видимъ, что первый стремится найти численныя соотношенія, существующія между частями многогранника; а второй—обращаетъ болѣе вниманія на само построеніе многогранниковъ.

Абулъ Вефа изслѣдуетъ тотъ же вопросъ съ иной точки зрѣнія. Онъ не обращаетъ вниманія на самый многогранникъ, а только опредѣляетъ положеніе, которое занимаютъ на поверхности шара, въ который вписанъ многогранникъ, его вершины. Такимъ образомъ Абулъ Вефа совершенно измѣняетъ условія вопроса; Евклидъ и Паппусъ показываютъ, какъ можно вписать въ шаръ многогранникъ, а Абулъ Вефа показываетъ, какъ дѣлить поверхность шара на извѣстное число сферическихъ многоугольниковъ, которые были-бы равны и правильные; многоугольники эти суть части сферической поверхности, соотвѣтствующей сторонамъ многогранниковъ. Изъ условій вопроса, рѣшеннаго Абулъ Вефой, видно, что его пріемъ ближе подходитъ къ методу Паппуса, чѣмъ къ пріему Евклида, такъ какъ онъ также ищетъ положеніе вершинъ многогранниковъ, а не численныя соотношенія, существующія между ихъ частями и діаметромъ шара, въ который они вписаны.

Вопросъ о дѣленіи поверхности шара рѣшенъ Абулъ Вефой весьма просто и изящно. Онъ поступаетъ слѣдующимъ образомъ: на поверхности шара онъ проводитъ три взаимно-перпендикулярные большіе круга, пересѣченія этихъ круговъ дадутъ шесть вершинъ октаедра, вписаннаго въ этотъ шаръ. Кромѣ того круги эти дадутъ восемь сферическихъ треугольниковъ, которые равны между собою и правильны. Взявъ одинъ изъ этихъ треугольниковъ и три треугольника, противолежащіе его вершинамъ, Абулъ Вефа

беретъ центры этихъ четырехъ треугольниковъ, которые представятъ вершины тетраедра, вписаннаго въ шаръ. Взявъ центры всѣхъ восьми треугольниковъ онъ находитъ вершины куба, вписаннаго въ шаръ. Такимъ образомъ Абулъ Вефа находитъ вершины трехъ правильныхъ тѣлъ: октаедра, тетраедра и куба, не обращая никакого вниманія на численныя соотношенія, существующія между частями многогранниковъ и діаметромъ шара.

Для построенія остальныхъ двухъ многогранниковъ: додекаедра и икосаедра, Абулъ Вефа принужденъ ввесть новое построеніе, именно найти зависимость между ребрами этихъ многогранниковъ и діаметромъ шара, въ который они вписаны. Опредѣливъ вершины одного изъ этихъ многогранниковъ онъ немедленно находитъ вершины другаго, какъ центры сферическихъ многоугольниковъ, соотвѣтствующихъ сторонамъ перваго.

Вопросъ о построеніи многогранниковъ, вписанныхъ въ шаръ, разобранъ Абулъ Вефой весьма обстоятельно. Онъ первый обратилъ вниманіе, что совершенно повидимому упустили изъ виду Евклидъ и Паппусъ, на зависимость существующую между двумя группами правильныхъ многогранниковъ, вписанныхъ въ шаръ, именно между кубомъ и октаедромъ съ одной стороны и додекаедромъ и икосаедромъ съ другой, что вершины многогранниковъ, принадлежащихъ къ первой группѣ, суть центры сферическихъ многоугольниковъ, составленныхъ вершинами многогранниковъ второй группы на поверхности шара, и обратно.

Кромѣ того Абулъ Вефа показываетъ, какъ построить пять изъ полуправильныхъ многогранниковъ, вписанныхъ въ шаръ.

Указавъ на общій характеръ, вопросовъ, разсмотрѣнныхъ въ сочиненіи Абулъ Вефы и на методы примѣненные имъ, мы познакомимся съ содержаніемъ каждой изъ главъ и обратимъ вниманіе на болѣе интересныя изъ построеній, примѣненныхъ имъ при рѣшенія различныхъ вопросовъ.

Глава I. Раздѣленіе прямой на нѣсколько равныхъ частей. Дѣленіе угла на двѣ части. Опустить перпендикуляръ изъ данной точки на прямую. Къ данной прямой, чрезъ данную точку, провесть параллельную. Найти центръ круга. Къ кругу провесть касательную. Раздѣлить уголъ на три равныя части. Удвоеніе куба и шара. Построеніе зеркала, которое воспламеняетъ при посредствѣ лучей солнца, на данномъ разстояніи.

Глава II. Построеніе различныхъ правильныхъ плоскихъ фигуръ, какъ то: треугольника, квадрата, пятиугольника, шестиугольника, семиугольника, восьмиугольника, девятиугольника и десятиугольника. При построеніи правильнаго семиугольника Абулъ Вефа замѣчаетъ, что построеніе данное имъ только приближенное.

Глава III. Въ этой главѣ Абулъ Вефа показываетъ какъ можно впи-

сывать правильные многоугольники въ кругъ. Онъ разсматриваетъ всѣ многоугольники предъидущей главы.

Глава IV занимается рѣшеніемъ вопросовъ, относящихся къ описыванію круговъ около вышеприведенныхъ многоугольниковъ.

Глава V. Въ этой главѣ авторъ доказываетъ, что центръ круга, вписаннаго въ правильный многоугольникъ, есть точка пересѣченія равнодѣлящихъ два угла этой фигуры.

Глава VI посвящена построеніямъ, относящимся къ вписыванію однѣхъ плоскихъ фигуръ въ другія.

Глава VII, равно какъ конецъ VI-й и начало VIII-й утеряны.

Глава VIII касается вопросовъ относящихся къ дѣленію различныхъ прямолинейныхъ плоскихъ фигуръ.

Глава IX занимается дѣленіемъ круга и сегментовъ.

Особенный интересъ представляютъ главы VIII-я и IX-я, такъ какъ содержаніе ихъ относиться къ вопросу, который составлялъ предметъ утеряннаго сочиненія Евклида „О дѣленіи фигуръ (Περὶ διαιρέσεων)". Весьма вѣроятно, что Абулъ Вефа, былъ знакомъ съ этимъ сочиненіемъ. Вопросъ о дѣленіи плоскихъ фигуръ занималъ многихъ арабскихъ математиковъ, на одно изъ подобныхъ сочиненій мы уже указали выше (см. стр. 72, 236). Многіе изъ вопросовъ, относящихся къ дѣленію плоскихъ фигуръ, которые были извѣстны арабамъ и встрѣчаются въ ихъ сочиненіяхъ, находятся въ сочиненіи по Геометріи, написанномъ Фибоначчи. Это заслуживаетъ вниманія, такъ какъ можетъ служить подтвержденіемъ, что Фибоначчи при составленіи своихъ сочиненій имѣлъ подъ руками арабскіе источники. Весьма жаль, что до насъ не дошла VII-я глава сочиненія Абулъ Вефы, въ которой онъ занимается дѣленіемъ треугольниковъ.

Глава X. Въ этой главѣ Абулъ Вефа показываетъ, какъ можно раздѣлить квадратъ и треугольникъ на двѣ и на три равныя части, а трапецію на двѣ равныя части. При этомъ требуется между частями оставить *дорогу*, которая удовлетворяла-бы извѣстнымъ условіямъ.

Глава XI. Въ началѣ главы находиться слѣдующее замѣчаніе: „наставникъ говоритъ, что во всемъ предъидущемъ мы показали, какъ вписываются однѣ фигуры въ другія, а также какъ онѣ могутъ быть раздѣлены на части различными способами; вообще эти вопросы часто встрѣчаются на практикѣ. Все это мы изложили и объяснили достаточно ясно для всѣхъ, хотя немного знакомыхъ съ этой наукой и достаточно развитыхъ. Въ настоящей главѣ мы займемся разложеніемъ фигуръ; вопросъ этотъ необходимъ многимъ практикамъ и составляетъ предметъ особенныхъ ихъ розысканій. Къ такимъ вопросамъ мы приходимъ, когда требуется разложить квадраты, такъ, чтобы получились снова меньшіе квадраты, или когда изъ

нѣсколькихъ квадратовъ требуется составить большій квадратъ. Въ виду этого мы дадимъ основныя начала, которыя относятся къ этимъ вопросамъ, такъ какъ всѣ методы, примѣняемыя рабочими не основаны на какихъ-либо началахъ, не заслуживаютъ довѣрія и весьма ошибочны; между тѣмъ на основаніи такихъ методовъ они производятъ различныя дѣленія".

Затѣмъ дало опредѣленіе квадратнаго числа. Числа не квадратныя Абуль Вефа дѣлитъ на два класса, на числа, состоящія изъ двухъ квадратныхъ чиселъ, и не состоящія изъ двухъ квадратныхъ чиселъ. Послѣ этихъ опредѣленій Абуль Вефа говоритъ, что составленіе одного квадрата изъ нѣсколькихъ другихъ, или же разложеніе квадрата на извѣстное число меньшихъ квадратовъ, не представляетъ затрудненія если число квадратовъ, на которое разлагается данный квадратъ, или изъ которыхъ составляется квадратъ, будетъ само число квадратное, или же состоящее изъ суммы двухъ квадратныхъ чиселъ. Если же число квадратовъ не есть число квадратное, или же не состоитъ изъ суммы двухъ квадратныхъ чиселъ, то рѣшеніе, по словамъ Абуль Вефа, болѣе сложно. Въ зависимости отъ такого дѣленія чиселъ на классы, вопросъ о составленіи и разложеніи квадратовъ распадается на двѣ группы задачъ: въ первой группѣ, число квадратовъ число квадратное, или состоитъ изъ суммы двухъ квадратныхъ чиселъ, во второй— число это не есть квадратное и не состоитъ изъ суммы двухъ квадратовъ. Разсмотримъ обѣ группы вопросовъ, рѣшенныхъ Абуль Вефой, отдѣльно.

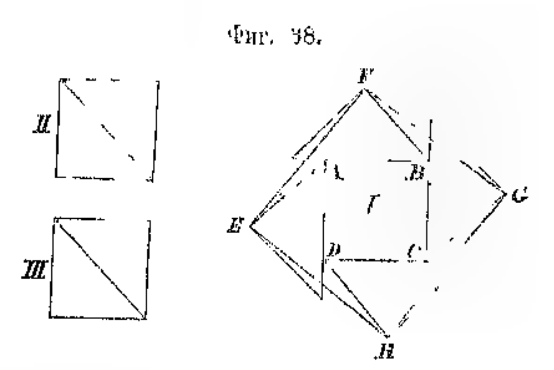
Первая группа. Если число n квадратовъ есть число квадратное, т. е. если $n = a^2$, то вопросъ рѣшается очень просто. Если же $n = a^2 + b^2$, то рѣшеніе основано на равенствѣ $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 4\frac{ab}{2}$. Къ числу задачъ первой группы принадлежатъ слѣдующіе вопросы, рѣшенные Абуль Вефой: 1) Раздѣлить квадратъ на квадратное число квадратовъ; 2) Составить квадратъ изъ квадратнаго числа квадратовъ; 3) Составить квадратъ изъ извѣстнаго числа другихъ квадратовъ, при условіи, что число этихъ квадратовъ равно суммѣ двухъ равныхъ квадратныхъ чиселъ; 4) Составить квадратъ изъ извѣстнаго числа квадратовъ, если это число равно суммѣ двухъ неравныхъ квадратныхъ чиселъ; 5) Раздѣлить квадратъ на извѣстное число квадратовъ, при условіи, чтобы число квадратовъ равнялось суммѣ двухъ равныхъ квадратныхъ чиселъ; и 6) Раздѣлить квадратъ на извѣстное число квадратовъ такъ, чтобы это число равнялось суммѣ двухъ неравныхъ квадратныхъ чиселъ. Всѣ эти вопросы рѣшены Абуль Вефой весьма просто, безъ помощи теоремы Пиѳагора, разрѣзывая данный квадратъ на части, или же составляя изъ данныхъ квадратовъ требуемый квадратъ.

Вторая группа. Къ этой группѣ вопросовъ принадлежатъ тѣ, когда

число *n* квадратовъ не есть квадратное и не выражается въ видѣ суммы двухъ квадратныхъ чиселъ. Въ этихъ случаяхъ Абулъ Вефа необходимо прибѣгаетъ къ помощи теоремы Пиѳагора, но если возможно только рѣшить вопросъ простымъ прикладываніемъ и разрѣзываніемъ данныхъ квадратовъ, то Абулъ Вефа предпочитаетъ этотъ способъ, какъ болѣе пригодный въ практикѣ и какъ дающій прямое рѣшеніе вопроса, т. е. непосредственно составить квадратъ равный суммѣ нѣсколькихъ квадратовъ.

Первый изъ вопросовъ, второй группы, рѣшенный Абуль Вефой, состоитъ въ слѣдующемъ: Составить квадратъ изъ извѣстнаго числа квадратовъ, если число квадратовъ не есть число квадратное и не равно суммѣ двухъ квадратныхъ чиселъ? При рѣшеніи этого вопроса Абулъ Вефа замѣчаетъ: „вопросъ этотъ рѣшается различно, геометры и практики разсматриваютъ его съ различныхъ точекъ зрѣнія". Какъ примѣръ вопроса подобнаго рода, авторъ рукописи „О геометрическихъ построеніяхъ" приводитъ слѣдующій: „Составить квадратъ изъ трехъ равныхъ квадратовъ?" Вопросъ этотъ былъ предложенъ Абулъ Вефѣ въ собраніи, въ которомъ участвовали геометры и практики. По словамъ автора рукописи, задачу эту геометры рѣшаютъ при помощи теоремы Пиѳагора, опредѣляя сторону искомаго квадрата *). Подобное рѣшеніе неудовлетворяетъ практиковъ, которые ищутъ квадратъ, составленный изъ извѣстнымъ образомъ раздѣленныхъ данныхъ квадратовъ, какъ это дѣлали при рѣшеніи другихъ вопросовъ подобнаго рода. Въ виду этого практики дали свои рѣшенія, изъ которыхъ нѣкоторыя основаны на геометрическихъ доказательствахъ, а другія безъ таковыхъ. При этомъ авторъ рукописи замѣчаетъ, что „рѣшенія, которыя не основаны на геометрическихъ доказательствахъ весьма часто невѣрны и ошибочны".

Фиг. 38.



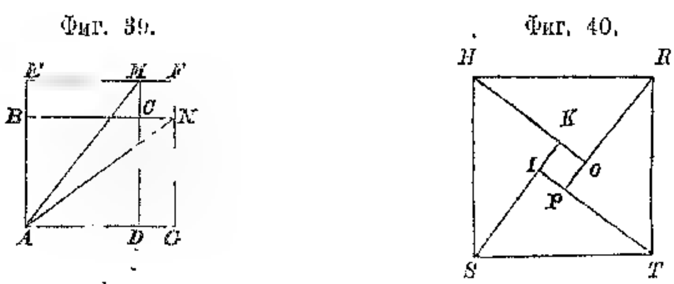
Абулъ Вефа предлагаетъ слѣдующее точное рѣшеніе предложеннаго вопро-

*) Сторона эта представится, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, коего катеты равны, одинъ сторонѣ, а другой гипотенузѣ даннаго квадрата.

са. Пусть требуется изъ квадратовъ I, II и III составить новый квадратъ (фиг. 38). Для этого надо взять одинъ изъ квадратовъ, напримѣръ I и приложить къ нему половины остальныхъ двухъ квадратовъ II и III, какъ показано на фигурѣ. Вершины *E*, *F*, *G* и *H* четырехъ приложенныхъ треугольниковъ надо соединить прямыми линіями; полученный квадратъ *EFGH* будетъ искомый. Справедливость указаннаго построенія очевидна, такъ какъ построенный квадратъ равенъ суммѣ трехъ данныхъ. Приведенное рѣшеніе, по словамъ составителя рукописи, „точно и вмѣстѣ съ тѣмъ удовлетворяетъ практиковъ".

Слѣдующій вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ: составить квадратъ изъ двухъ квадратовъ, коихъ стороны неизвѣстны? Рѣшеніе состоитъ въ слѣдующемъ: положимъ, что оба данные квадрата наложены одинъ на другой, какъ показано на чертежѣ (фиг. 39), тогда данные квадраты будутъ

Фиг. 39. Фиг. 40.



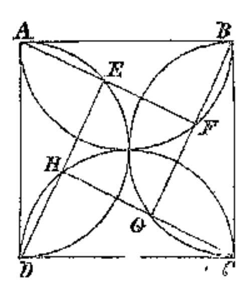
квадраты *AGFE* и *ADCB*. Продолжимъ прямыя *BC* и *CD* до пересѣченія съ сторонами большаго квадрата, въ точкахъ *M* и *N*; соединимъ точку *A* съ точками *M* и *N*. Сдѣлавъ такое построеніе мы видимъ, что квадратъ *AGFE* разбивается на маленькій квадратъ *CNFM* и на два прямоугольника *ADME* и *AGNB*, которые равны; прямоугольники эти діагоналями *AM* и *AN* разбиваются на равные треугольники. Катеты полученныхъ четырехъ прямоугольныхъ треугольниковъ *AGN*, *ABN*, *ADM* и *AEM* равны сторонамъ данныхъ квадратовъ, а сторона маленькаго квадрата *CNFM* равна разности сторонъ данныхъ квадратовъ. Располагая теперь полученные четыре прямоугольные треугольника *AGN*, *ABN*, *ADM* и *AEM* около маленькаго квадрата *CNFM* или *IPOK*, какъ показано на фигурѣ (фиг. 40), мы получимъ квадратъ *STRH* равный суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ *AGFE* и *ADCB*, стороны которыхъ неизвѣстны.

Послѣднее построеніе (фиг. 40) есть ничто иное, какъ построеніе, данное индусскимъ математикомъ Баскарой, для доказательства предложенія Пиѳагора *).

*) Объ этомъ построеніи мы уже говорили выше, въ главѣ объ индусахъ (см. стр. 452).

Послѣдній вопросъ второй группы задачъ, рѣшенныхъ Абулъ Вефой, заключается въ слѣдующемъ: Раздѣлить квадратъ на два квадрата, при условіи, что сторона одного изъ послѣднихъ двухъ квадратовъ извѣстна. Вопросъ этотъ рѣшенъ слѣдующимъ построеніемъ: Пусть данный квадратъ есть $ABCD$, на каждой изъ его сторонъ, какъ на діаметрѣ опишемъ полукруги (фиг. 41). Въ этихъ полукругахъ возьмемъ хорды AE, BF, CG, DH,

Фиг. 41.



равныя сторонѣ даннаго квадрата. Очевидно, что линіи AEF, BFG, CGH и DHE суть прямыя; онѣ образуютъ маленькій квадратъ $EFGH$ и четыре прямоугольные треугольника AED, BFA, CGB и DHC. Изъ полученныхъ, такимъ образомъ, четырехъ прямоугольныхъ треугольниковъ и квадрата, можно составить оба требуемые квадрата, для этого стоитъ только сдѣлать всѣ построенія, произведенныя въ предъидущемъ вопросѣ, только въ обратномъ порядкѣ.

Обративъ вниманіе на приведенныя выше построенія квадратовъ мы видимъ, что онѣ носятъ на себѣ слѣды вліянія индусовъ. Пріемы, употребленные Абулъ Вефой, совершенно отличны отъ геометрическихъ методовъ, употребляемыхъ греческими геометрами. Весьма вѣроятно, какъ полагаетъ Вепке, что указанные методы составленія квадратовъ, первоначальнымъ своимъ происхожденіемъ обязаны теоріи, т. е. что пріемы эти были найдены учеными на основаніи теоретическихъ соображеній. Впослѣдствіи методы эти получили практическое приложеніе и такимъ образомъ стали общеизвѣстны. Такіе практическіе методы необходимо должны были существовать въ Индостанѣ, гдѣ издавна производились различныя архитектурныя сооруженія. Впослѣдствіи методы эти стали извѣстны также арабамъ, благодаря сношеніямъ съ индусами.

Мы уже выше сказали, что необходимо предполагать, что Абулъ Вефа замѣтилъ связь существующую между вопросомъ геометрическаго построенія квадрата равнаго суммѣ нѣсколькихъ другихъ квадратовъ и нѣкоторыми вопросами входящими въ область теоріи чиселъ. Подобная зависимость была вѣроятно замѣчена Абулъ Вефой подъ вліяніемъ изученія сочиненій „Діо-

фанта. Къ сожалѣнію Абулъ Вефа упустилъ изъ виду доказать, какое изъ разложеній даннаго числа будетъ самое удобное, при которомъ теорема Пиѳагора войдетъ въ построеніе возможно наименьшее число разъ. Извѣстно, что какое бы ни было число n, вопросъ о составленіи изъ n квадратовъ новаго квадрата рѣшается примѣняя только *одинъ разъ* теорему Пиѳагора. Справедливость этого слѣдуетъ изъ того, что на основаніи извѣстнаго предложенія Ферма *), всякое число n состоитъ изъ двухъ квадратовъ, или трехъ, или четырехъ, т. е. что всякое число n представляется въ одной изъ слѣдующихъ четырехъ формъ.

$$n = a^2 \qquad\qquad n = a^2 + b^2 + c^2$$
$$n = a^2 + b^2 \qquad\qquad n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Зная это предложеніе легко видѣть, что изъ n квадратовъ можно составить квадратъ, притягая въ этомъ построеніи теорему Пиѳагора только одинъ разъ. На сколько извѣстно предложеніе данное Ферма **) не было извѣстно Діофанту, по крайней мѣрѣ оно не заключается ни въ одной изъ дошедшихъ до насъ книгъ „Ариѳметикъ". Несомнѣнно также, что такое замѣчательное свойство чиселъ не было извѣстно Абулъ Вефѣ, такъ какъ о немъ необходимо долженъ былъ бы упомянуть составитель рукописи „О геометрическихъ построеніяхъ".

Глава XII, какъ мы уже замѣтили выше, занимается вопросомъ о построеніи многогранниковъ вписанныхъ въ шаръ. Въ началѣ главы Абулъ-Вефа показываетъ, какъ проводятся большіе круги на шарѣ, а затѣмъ переходитъ къ рѣшенію слѣдующихъ вопросовъ: раздѣлить поверхность шара

*) Предложеніе это дало Ферма въ видѣ примѣчанія къ 31 предложенію IV-й книги „Ариѳметикъ" Діофанта. Предложеніе это заключается въ слѣдующемъ: найти четыре квадратныхъ числа, такихъ свойствъ, чтобы сумма этихъ чиселъ и сумма ихъ квадратныхъ корней, вмѣстѣ взятыя, равнялись данному числу.

**) Замѣчательное предложеніе о разложеніи числа на сумму четырехъ квадратныхъ чиселъ, если въ рядъ чиселъ включить и нуль, дано впервые Ферма. Предложеніе это онъ нашелъ для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, а потомъ обобщилъ, доказательства онъ не далъ; оно является у него какъ частный случай предложенія о разложеніи каждаго числа на полигональныя числа. Впервые предложеніе о разложеніи всякаго числа на сумму четырехъ квадратныхъ чиселъ, дано было Эйлеромъ въ *Nov. Comm. Petrop. T. V*, но это доказательство неудовлетворительно. Весьма остроумное доказательство дано Лагранжемъ въ *Mémoires de l'Acad. de Berlin*, 1770. Доказательство это упростилъ Эйлеръ въ *Act. Petrop.* T. I, P. II 1777. Доказательство предложенія о разложеніи всякаго числа на полигональныя числа дано Лежандромъ въ его сочиненіи *Théorie des nombres*, T. I, pag. 211—221. Другое доказательство дано Гауссомъ въ его сочиненіи *Recherches arithmétiques*, pag. 295. Вопросомъ этимъ также занимался Коши и предложилъ свое доказательство въ статьѣ: Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygones, которая помѣщена въ *Exercices de mathématiques*, 10 livraison. Paris. 1826. pag. 265—296.

на 4 равныхъ, равностороннихъ и равноугольныхъ треугольника; раздѣлить поверхность шара на шесть четыреугольниковъ, которые равноугольны и равносторонни, раздѣлить поверхность шара на 20 равноугольныхъ и равностороннихъ треугольниковъ; раздѣлить поверхность шара на 12 пятиугольниковъ, равноугольныхъ и равностороннихъ; раздѣлить поверхность шара на 14 частей, изъ числа которыхъ 6 четыреугольники, а 8 треугольники, начертить на шарѣ 12 пятиугольниковъ и 20 треугольниковъ; начертить на шарѣ 12 пятиугольниковъ и 20 шестиугольниковъ; раздѣлить поверхность шара на 6 четыреугольниковъ и 8 шестиугольниковъ; раздѣлить поверхность шара на 4 треугольника и 4 шестиугольника.

Нѣкоторыя изъ этихъ задачъ Абулъ Вефа рѣшаетъ по два раза, дѣлая различныя построенія.

Таково въ общихъ чертахъ содержаніе сочиненія „О геометрическихъ построеніяхъ". Мы остановились на немъ болѣе подробно, чтобы указать методы и пріемы, употребленные Абулъ Вефой при рѣшеніи различныхъ геометрическихъ вопросовъ. Особенное вниманіе мы обратили на составленіе и разложеніе квадратовъ; вопросъ этотъ указываетъ на новое направленіе въ математикѣ арабовъ и показываетъ, что они были знакомы съ нѣкоторыми изъ методовъ, получившихъ, вѣроятно, первоначальное свое развитіе у индусовъ.

Изъ другихъ сочиненій, написанныхъ Абулъ Вефой, до насъ дошла только часть сочиненія по Ариѳметикѣ, заглавіе котораго „Трактатъ о томъ, что необходимо сборщикамъ податей и конторщикамъ въ искусствѣ счисленія". Сочиненіе это состоитъ изъ семи книгъ, а каждая книга заключаетъ семь главъ; главы подраздѣляются на отдѣлы. Мы уже выше (см. стр. 241) имѣли случай указать на содержаніе каждой книги. Болѣе интересно содержаніе третьей книги, относящейся къ Геометріи. Въ этой книгѣ говорится объ различнаго рода мѣрахъ, употребляемыхъ при измѣреніяхъ, объ измѣреніи круговъ и сегментовъ, а также фигуръ составленныхъ изъ этихъ послѣднихъ; въ 4-й главѣ показано измѣреніе треугольниковъ, квадратовъ и вообще четыреугольниковъ различныхъ видовъ, въ 5-й главѣ измѣреніе многоугольниковъ и другихъ фигуръ; въ 6-й главѣ—измѣреніе различныхъ тѣлъ; - и наконецъ въ 7-й главѣ—измѣреніе разстояній. До насъ дошли только первыя три книги этого интереснаго сочиненія. Сочиненіе это заслуживаетъ вниманія еще потому, что въ немъ всѣ вычисленія производятся словесно, о цифрахъ же нѣтъ и помину.

Абулъ Вефой были также написаны: „Комментаріи на „Алгебру" Магомета-бенъ-Музы", „Комментаріи на „Ариѳметику" Діофанта", „Комментаріи на сочиненіе алгебраическаго содержанія, написанное Гиппархомъ",

объ этомъ сочиненіи мы уже говорили выше; „Введеніе въ Ариѳметику“ въ одной книгѣ; „О томъ, что должно предшествовать изученію ариѳметическаго сочиненія“; „Доказательства предложеній, находящихся въ сочиненіи Діофанта, и также предложеній, употребленныхъ Абулъ Вефой въ своихъ комментаріяхъ на это сочиненіе“; „О способѣ найти сторону куба и квадрато-квадрата, а также выраженій, составленныхъ изъ этихъ двухъ степеней“, въ одной книгѣ; по мнѣнію Вепке, въ этомъ сочиненіи, Абулъ Вефа занимался геометрическимъ построеніемъ уравненія вида: $x^3 = a$, $x^4 = a$, $x^4 + ax^3 = b$. Предположеніе Вепке весьма вѣроятно, такъ какъ извѣстно, что вопросъ о геометрическомъ построеніи корней уравненій занималъ многихъ арабскихъ геометровъ. Къ этому вопросу мы возвратимся впослѣдствіи. Кромѣ того Абулъ Вефа написалъ еще слѣдующія сочиненія: „О способѣ различать кругъ и шаръ“, въ одной книгѣ; „Совершенный трактатъ“, въ трехъ книгахъ, содержаніе первой — о предметахъ, которые необходимо знать прежде движенія свѣтилъ, содержаніе второй — движеніе свѣтилъ, и третьей — о случайностяхъ, встрѣчающихся въ движеніяхъ свѣтилъ. „Всеобщія таблицы“, въ трехъ книгахъ. „Сочиненіе, въ которомъ указано, какъ пользоваться шестидесятичными таблицами“; „Сочиненіе объ опредѣленіи длины хордъ“, объ этомъ сочиненіи Ибнъ-Халликанъ *) говоритъ, что оно „хорошее и полезное“. Объ „Альмагестѣ“, написанномъ Абулъ Вефой мы уже упоминали выше. Сочиненіе это состоитъ изъ трехъ частей. Содержаніе первой части этого сочиненія было изслѣдовано Седилльо **), занимавшимся вопросомъ о варіаціи. По словамъ Касири Абулъ Вефа комментировалъ также сочиненія Евклида и Аристарха, но какія сочиненія Евклида были имъ комментированы намъ неизвѣстно.

Многія изъ заглавій сочиненій, написанныхъ Абулъ Вефой, намъ непонятны и кажутся странными, безъ сомнѣнія потому, что содержаніе ихъ вполнѣ неизвѣстно. Названія ихъ дошли до насъ только въ сочиненіяхъ позднѣйшихъ писателей.

Кромѣ вышепоименованныхъ сочиненій Абулъ Вефа занимался еще другими вопросами, относящимися къ математикѣ, а также считался весьма искуснымъ астрономомъ наблюдателемъ. Въ одной, дошедшей до насъ, арабской рукописи, въ числѣ различныхъ сочиненій математическаго содержанія находится также сочиненіе Архимеда „Объ измѣреніи круга“. Въ прибавленіяхъ къ этому сочиненію находятся указанія, что Абулъ Вефа занимался вопросомъ о вычисленіи отношенія окружности къ діаметру, т. е. о нахожденіе величины π. Изъ вычисленій, находящихся въ рукописи видно, что

* *Ибнъ-Халликанъ* (1211—1281 г.) авторъ сочиненія, въ которомъ приведены біографіи знаменитыхъ людей. Сочиненіе это есть родъ біографическаго словаря.

**) *M. L. Am. Sédillot*, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. Paris, 1845. pag. 42—112.

Абулъ Вефа искалъ это отношеніе пріемомъ, напоминающимъ методъ, примѣняемый Птоломеемъ въ „Альмагестѣ“ для нахожденія той же величины*). Отношеніе окружности къ діаметру Абулъ Вефа находитъ вписывая въ кругъ правильный многоугольникъ о 720 сторонахъ; пріемъ этотъ заслуживаетъ вниманія, такъ какъ онъ снова примѣнялся въ весьма недавнее время **). Примѣняя свой пріемъ Абулъ Вефа находитъ $\pi = 3.14156815....$ Величина эта разнится на $\frac{1}{400000}$ отъ истинной, представляющейся въ формѣ $\pi = 3.14159265...$ Взявъ среднее изъ значеній, найденныхъ Архимедомъ, находимъ, что π вычисленное имъ представится въ видѣ $\pi = 3\frac{141}{994} =$ $= 3.14185$; ошибка сдѣланная имъ около $\frac{1}{4000}$. Итакъ видимъ, что ошибка, сдѣланная Архимедомъ при вычисленіи π въ десять разъ больше ошибки, сдѣланной Абулъ Вефой.

Говоря о численной величинѣ π, найденной Абулъ Вефой, необходимо напомнимъ, что численныя значенія для величины π встрѣчаются уже гораздо раньше у арабскихъ писателей, именно въ „Алгебрѣ“ Магомета-бенъ-Музы. Численныя значенія, данныя Магометомъ-бенъ-Музой представляются въ видѣ выраженій $\pi = \sqrt{10} = 3.1623....$ и $\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416...$ Первое изъ приведенныхъ выраженій представляетъ самое грубое приближеніе, а второе точнѣе приближенія даннаго Абулъ Вефой, такъ какъ ошибка дѣлаемая здѣсь при вычисленіи π представляетъ около одной трети погрѣшности, сдѣланной Абулъ Вефой. Въ виду этого можетъ показаться страннымъ, почему арабскіе математики имѣя довольно точное выраженіе для π стремились найти другое, и замѣнили его менѣе точнымъ, какъ это и сдѣлано Абулъ Вефой. Причина этого, по мнѣнію Венке, заключается въ томъ, что значенія, данныя для π въ „Алгебрѣ“ Магомета-бенъ-Музы прямо заимствованы арабскими математиками изъ другихъ сочиненій; были-ли это сочиненія грековъ или индусовъ нельзя сказать утвердительно. Съ вѣроятностью можно предположить, что значенія эти были заимствованы изъ ин-

*) *Woepcke*, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux d'après des traités inédits arabes et persans. Troisième article. Sur une mesure de la circonférence du cercle, due aux astronomes arabes, et fondée sur un calcul d'Aboul Wafâ. Помѣщено въ Journal Asiatique. Cinquième Série. T. XV, Avril—Mai. 1860 pag. 281—320.

**) Подобный пріемъ употреблялъ Симсонъ. Онъ вписалъ въ кругъ многоугольникъ о 768-ми сторонахъ, при чемъ для π нашелъ значеніе 3.1416. Методъ Симсона изложенъ въ его „Началахъ Геометріи“.

дусскихъ Сидгантъ. Заимствовавъ эти значенія арабскіе математики не знали пріемовъ и способовъ, какимъ образомъ были найдены эти значенія, а потому также пытались, съ своей стороны, отыскать значеніе π, какъ это и сдѣлалъ Абулъ Вефа.

Авиценна. Знаменитый арабскій врачъ *Ибнъ-Сина*, болѣе извѣстный подъ именемъ *Авиценны*, родился въ 980 г., а умеръ въ 1037 г. Первоначальное воспитаніе Авиценна получилъ въ г. Бухарѣ, гдѣ жилъ его отецъ. О своемъ воспитаніи Авиценна говоритъ, въ своей автобіографіи, слѣдующее: „Мой отецъ и мой братъ раздѣляли воззрѣнія измаильтянъ на душу и умъ. Они часто бесѣдовали между собою объ этихъ ученіяхъ въ моемъ присутствіи; я слышалъ, что они говорили, но умъ мой не могъ этого воспринять. Не смотря на это они пригласили меня принять участіе въ ихъ бесѣдахъ, посвященнымъ различнымъ вопросамъ, относящимся къ философіи, Геометріи и индусскому счисленію. Воспитаніе мое отецъ началъ съ того, что сталъ посылать меня къ продавцу овощей, который былъ весьма свѣдущъ въ индусскомъ счисленіи" *). Въ это время Авиценнѣ было десять лѣтъ. Получивъ блестящее воспитаніе, по понятіямъ того времени, Авиценна вскорѣ пріобрѣлъ громкую извѣстность.

Въ концѣ X-го вѣка Авиценна жилъ въ городѣ Каризмѣ, при устьѣ Оксуса, гдѣ занимался, совмѣстно съ Албируни, изученіемъ философіи, медицины и математики. Къ этому времени относятъ приглашеніе, сдѣланное калифомъ Махмудомъ, принять участіе и сопровождать его во время похода въ Индостанъ. Приглашенію этому послѣдовалъ Албируни, но Авиценна, болѣе склонный къ ученымъ занятіямъ и свободѣ, не смотря на всѣ просьбы Махмуда, сопровождать его отказался.

Авиценна авторъ многочисленныхъ сочиненій, изъ которыхъ нѣкоторыя весьма обширны. Сочиненія эти относятся къ различнымъ отраслямъ человѣческихъ знаній, такъ какъ авторъ ихъ пользовался извѣстностью, какъ философъ, врачъ, математикъ и алхимикъ. Не смотря на различныя неблагопріятныя стеченія обстоятельствъ, вслѣдствіи которыхъ Авиценна принужденъ былъ часто мѣнять мѣсто жительства, онъ находилъ время писать свои обширные трактаты **). Многосторонняя дѣятельность Авиценны

*) *F. Woepcke*, Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident et sur deux documents importants publiés par le Prince don B. Boncompagni ect. Rome. 1859. in 4. pag. 51—52.

**) Изъ числа сочиненій Авиценны наиболѣе извѣстенъ былъ его медицинскій трактатъ, переведенный на латинскій языкъ подъ заглавіемъ: *Canon medicinae*. Сочиненіе это въ теченіи цѣлыхъ пяти столѣтій пользовалось уваженіемъ врачей и лежало въ основаніи медицинскаго образованія. Многія сочиненія по Химіи, напечатанныя на латинскомъ языкѣ въ XVI вѣкѣ, носятъ имя Авиценны. Съ нѣкоторой вѣроятностью можно думать, что едва-ли

по истинѣ изумительна, занимаясь науками и имѣя обширную практику, какъ искуснѣйшій врачъ, онъ занимался государственными дѣлами, занимая мѣсто визиря при эмирѣ Гамаданскомъ. Изъ числа математическихъ сочиненій Авиценны извѣстно только одно, заключающее сочиненіе по Ариѳметикѣ. Сочиненіе это хранится въ Лейденской библіотекѣ и входитъ въ составъ рукописи, содержащей знаменитый медицинскій трактатъ Авиценны, озаглавленный „Излеченіе" *).

„Ариѳметика" Авиценны состоитъ изъ четырехъ книгъ; по своему содержанію она есть вѣроятно передѣлка „Ариѳметики" Никомаха, хотя во всемъ своемъ сочиненіи Авиценна имени Никомаха неупоминаетъ. Изъ другихъ греческихъ ученыхъ онъ упоминаетъ Евклида и его „Начала", а также ссылается на пиѳагорейцевъ. О содержаніи сочиненія Авиценны мы можемъ сказать весьма мало, такъ какъ оно до настоящаго времени неиздано. Напечатаны только два отрывка изъ III-й книги, предметъ которой относится къ фигурнымъ числамъ. Отрывки эти изданы Вепке **). Содержаніе ихъ слѣдующее: въ первомъ отрывкѣ Авиценна замѣчаетъ, что квадратныя числа имѣютъ всегда единицами числа 1, 4, 9, 6 и 5, а далѣе онъ говоритъ: „что же касается повѣрки квадратовъ по способу индусовъ, то необходимо это одинъ, или четыре, или семь, или девять. Ибо, единицѣ соотвѣтствуютъ одинъ или восемь, четыремъ два или семь, семи—четыре или пять, а если же будетъ девять, то будемъ имѣть три, или шесть, или девять". Отрывокъ этотъ легко объяснить слѣдующимъ образомъ: если дано число, которое будучи раздѣлено на 9, даетъ въ остаткѣ 1 или 8, то квадратъ этого числа, дѣленный на 9, даетъ въ остаткѣ 1. Если число, раздѣленное на 9, даетъ въ остаткѣ 2 или 7, то квадратъ этого числа, раздѣленный на 9, даетъ въ остаткѣ 4. Если число, дѣленное на 9, даетъ въ остаткѣ 4 или 5, то его квадратъ, дѣленный на 9, даетъ въ остаткѣ 7. Наконецъ, если число, дѣленное на 9, даетъ въ остаткѣ 3, 6 или 9, то его квадратъ, раздѣленный на 9, даетъ въ остаткѣ 9 ***).

Второй отрывокъ слѣдующій. „Одно изъ свойствъ кубовъ состоитъ въ томъ, что способъ ихъ повѣрки на основаніи метода индусскаго счисленія,

---

ній написаны Авиценной, такъ какъ арабскихъ подлинниковъ рукописей никакихъ не сохранилось. Изъ числа такихъ сочиненій укажемъ на: *Porta elementorum. Tractatus de Alchemia* и т. д.

*) Въ этой рукописи послѣ „Ариѳметики" Авиценны слѣдуетъ сочиненіе его о музыкѣ, а предшествуетъ сочиненіе, которое есть извлеченіе изъ „Началъ" Евклида и „Альмагеста" Птоломея. Кѣмъ написаны эти сочиненія неизвѣстно. При послѣднемъ изъ нихъ находится приписка съ обозначеніемъ 1477 года. Весьма вѣроятно, что извлеченія изъ „Началъ" и „Альмагеста" принадлежатъ самому Авиценнѣ.

**) *F. Woepcke*, Mémoire sur la propagation des chiffres Indiens. Paris. 1857. in-8 pag. 168—171.

***) Слѣдовало-бы еще добавить: или нуль.

т. е. повѣрка, употребляемая при этомъ счисленіи, есть: одинъ, или восемь, или девять. Если это есть одинъ, то единицы числа, которое возвышается въ кубъ, будутъ одинъ, или четыре, или семь; если это есть восемь, то онѣ будутъ восемь, или два, или пять; если же это девять, то онѣ будутъ три, или шесть, или девять". Иначе это можно выразить слѣдующимъ образомъ: если число, дѣленное на 9, даетъ въ остаткѣ 1, 4 или 7, то его кубъ, дѣленный на 9, даетъ въ остаткѣ 1; если число, дѣленное на 9, даетъ въ остаткѣ 2, 5 или 8, то его кубъ, дѣленный на 9, даетъ въ остаткѣ 8; и если число, дѣленное на 9, даетъ въ остаткѣ 3, 6 или 9, то его кубъ, дѣленный на 9, даетъ въ остаткѣ 9 *).

Приведенныя поясненія двухъ отрывковъ „Ариѳметики" Авиценны показываютъ, что арабскимъ математикамъ была извѣстна повѣрка при посредствѣ числа девять ариѳметическихъ дѣйствій возвышенія чиселъ въ квадратъ и кубъ. Правила свои Авиценна называетъ индусскими—*hindaci*. Въ настоящее время вопросы подобнаго рода входятъ въ область теоріи чиселъ и извѣстны подъ названіемъ квадратичныхъ и кубическихъ вычетовъ. Подобные вопросы легко рѣшаются при помощи сравненій. Правила, данныя Авиценной, Канторъ **) выразилъ слѣдующими алгебраическими выраженіями:

$$(9n \pm 1)^2 \equiv 1$$
$$(9n \pm 2)^2 \equiv 4$$
$$(9n \pm 3)^2 \equiv (9n + 9)^2 \equiv 9$$
$$(9n \pm 4)^2 \equiv 7$$

Второе правило онъ выражаетъ въ видѣ формулъ:

$$(9n + 1)^3 \equiv (9n + 4)^3 \equiv (9n + 7)^3 \equiv 1$$
$$(9n + 8)^3 \equiv (9n + 2)^3 \equiv (9n + 5)^3 \equiv 8$$
$$(9n + 3)^3 \equiv (9n + 6)^3 \equiv (9n + 9)^3 \equiv 9$$

Приведенныя двѣ системы выраженій суть ничто иное какъ сравненія, написанныя по модулю 9.

По мнѣнію Венке приведенные два отрывка, изъ сочиненія Авиценны, заслуживаютъ особеннаго вниманія въ историческомъ отношеніи, такъ какъ они указываютъ, что повѣрка ариѳметическихъ дѣйствій при посредствѣ числа 9, была заимствована арабскими математиками у индусовъ. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что ни въ одномъ изъ извѣстныхъ въ настоящее время

*) Слѣдовало-бы еще добавить: или нуль.

**) *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I, Leipzig, 1880. in-8. pag. 650.

сочиненій индусовъ, повѣрки при посредствѣ 9 они себѣ не приписываютъ. Отъ арабовъ, вѣроятно, повѣрка при посредствѣ числа 9, перешла на Западъ*). Пріемъ этотъ встрѣчается въ сочиненіи византійскаго монаха Максима Плануда, жившаго въ первой половинѣ XIV-го вѣка**).

Албируни. Къ числу самыхъ замѣчательныхъ арабскихъ писателей, жившихъ въ началѣ XI вѣка, принадлежитъ *Абулъ-Рихинъ-Магометъ*, болѣе извѣстный подъ именемъ *Албируни*; послѣднее имя онъ получилъ вѣроятно отъ названія города Бируна, лежащаго на берегахъ Инда, откуда онъ былъ родомъ. Мы уже выше упоминали, что Албируни сопровождалъ калифа Махмуда во время его похода на Индостанъ. Абульфарагъ, въ своей хроникѣ***), говоритъ, что Албируни оставался въ Индостанѣ много лѣтъ и что онъ былъ однимъ изъ самыхъ свѣдущихъ людей не только своего, но и прошедшихъ временъ. Албируни былъ знакомъ почти со всѣми отраслями человѣческихъ знаній; будучи основательно знакомъ съ санскритскимъ языкомъ, онъ также зналъ греческій и есть указанія, на основаніи которыхъ можно думать, что сочиненія древнихъ греческихъ философовъ онъ изучалъ въ подлинникахъ. Онъ написалъ нѣсколько сочиненій на арабскомъ языкѣ, которыя имъ были потомъ переведены на санскритскій, для ознакомленія индусовъ съ науками Запада.

Свѣдѣній о жизни Албируни и о его трудахъ, къ сожалѣнію, существуетъ очень мало. Мы знаемъ только, что большую часть своей жизни онъ провелъ при дворѣ Махмуда, въ Газнѣ. Умеръ онъ въ 1038 г. Извѣстно также, что онъ производилъ астрономическія наблюденія въ Газнѣ, Кабулѣ, Пешаварѣ и др. городахъ. Современники прозвали Албируни *mohakkik*, т. е. проницательный, за его необыкновенную точность выводовъ при различнаго рода разсужденіяхъ. Никто изъ современныхъ ему ученыхъ не избѣгалъ его строгой критики, не исключая и его друга Авиценны. Также славился Албируни какъ поэтъ.

Изъ числа многочисленныхъ сочиненій, написанныхъ Албируни, до насъ дошло только сочиненіе, въ которомъ онъ описываетъ состояніе наукъ и литературы у индусовъ во время завоеванія Индостана арабами. Сочиненіе это написано въ Индостанѣ въ 1031 г.; оно заключаетъ множество лю-

---

*) Нѣкоторыя изъ сочиненій Авиценны были переведены на латинскій языкъ Герардомъ Кремонскимъ. Изъ числа этихъ сочиненій Бонкомпаньи упоминаетъ слѣдующія: Canon avicenn tractatus V, Avicenn alboali fecit canonem. (См. *Boncompagni*, Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese ect. pag. 5—6.

**) *H. Waschke*, Das Rechenbuch des Maximus Planudes, aus dem Griechischen über. Halle, 1878, in 8.

***) Historia dynastiarum authore *Greg. Abul Pharajio*, historiam complectens universalem ect.; arabice ed. et latine versa ab *Ed. Pocockio*. Oxoniae, 1663—72, 2 vol. in-4.

бопытныхъ данныхъ, но къ сожалѣнію до настоящаго времени неиздано. Нѣкоторые отрывки напечатаны Рено въ его замѣчательномъ мемуарѣ объ Индостанѣ *). Сочиненіе Албируни заключаетъ 80 главъ. Въ своемъ сочиненіи онъ касается различныхъ литературныхъ произведеній индусовъ, ихъ философіи, астрономіи, касается ихъ методовъ счисленія, способовъ считать дни, мѣсяцы, годы и вообще различныхъ цикловъ. Кромѣ этого сочиненія до насъ дошли еще указанія на сочиненіе, написанное Албируни, по Геометріи. Относительно этого сочиненія мы ничего не знаемъ, кромѣ того, что оно вѣроятно было довольно обширно, такъ какъ до насъ дошло одно изъ предложеній IV-й книги этого сочиненія. Также занимался Албируни рѣшеніемъ задачи трисекціи угла. До насъ дошли нѣкоторые вопросы, предложенные Албируни другимъ ученымъ, относящіеся къ этой задачѣ **). Вопросы эти показываютъ, что Албируни былъ основательно знакомъ съ коническими сѣченіями.

Особеннаго вниманія заслуживаютъ попытки Албируни познакомить индусскихъ ученыхъ съ математическими произведеніями греческихъ геометровъ. Для этой цѣли онъ перевелъ на санскритскій языкъ отрывки изъ „Началъ" Евклида и „Альмагеста" Птоломея, а также составилъ сочиненіе объ астролябіи, для ознакомленія индусовъ съ методами измѣреній арабовъ. Брамины, которымъ сообщалъ Албируни свои переводы, немедленно перекладывали ихъ въ стихотворную форму, которая была такъ своеобразна и странна, что самъ Албируни съ трудомъ могъ узнать, что содержаніе предмета, изложеннаго въ стихахъ, заимствовано изъ его же отрывковъ.

Въ своемъ описаніи современнаго ему состоянія наукъ въ Индостанѣ, Албируни касается различныхъ способовъ счисленія, которые были въ употребленіи у индусовъ. Такихъ способовъ, по его словамъ, было три, именно: при посредствѣ индусскихъ цифръ, при помощи шестидесятичной системы счисленія и наконецъ при помощи буквъ алфавита, которымъ даны извѣстныя числовыя значенія ***). Въ этомъ же сочиненіи Албируни даетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, члены которой суть числа, написанныя въ клѣткахъ шахматной доски, начиная отъ единицы, изъ которыхъ каж-

---

*) *Reinaud*, Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde, antérieurement au milieu du XI siècle de l'ère chrétienne, d'après les écrivains arabes, persans et chinois. Помѣщено въ Mémoires de l'Institut National de France. Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. T. XVIII, Paris 1849. in-4. pag. 1—400.

На сочиненіе Албируни обращаетъ особенное вниманіе Бонкомпаньи въ своей статьѣ: *Boncompagni*, Intorno all' opera d'Albiruni sull' India. См. Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, T. II. 1869. Aprile. pag. 153—206.

**) См. *Woepcke*, l'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi. pag. 119—125.

***) Система эта носила названіе *hisâb aldschummal*.

дое въ двое больше предъидущаго *). Въ другомъ сочинении, заглавіе котораго „Книга цифръ“, Албируни показываетъ и даетъ правила для нахожденія суммы членовъ геометрическихъ прогрессій, а также для выраженія очень большихъ чиселъ. Искусственный пріемъ, изобрѣтенный Албируни, для выраженія очень большихъ чиселъ, по мнѣнію Гюнтера **), напоминаетъ методъ Архимеда, изложенный имъ въ сочинении „О числѣ песчинокъ“. Правила данныя Албируни для нахожденія членовъ геометрической прогрессіи приведены Канторомъ въ его „Исторіи математики“ ***).

Алнасави. Арабскій математикъ *Абулъ Гассанъ Али ибнъ Ахмедъ*, прозванный *Алнасави*, былъ родомъ изъ Наса въ Хорассанѣ. Онъ жилъ въ началѣ XI-го вѣка. Изъ его сочиненій извѣстно сочиненіе по практической ариѳметикѣ, составленное на персидскомъ языкѣ для чиновниковъ, завѣдывающихъ финансами государства. Впослѣдствіи сочиненіе это Алнасави переработалъ и исправилъ, по повелѣнію калифа, и издалъ снова на арабскомъ языкѣ въ 1030 г. Трудъ свой Алнасави назвалъ *удовлетворяющій трактатъ* ****), такъ какъ онъ хотѣлъ имъ угодить калифу. Сочиненіе Алнасави состоитъ изъ четырехъ книгъ, изъ которыхъ каждая содержитъ нѣсколько главъ. Содержаніе книгъ слѣдующее: книга первая—дѣйствія надъ цѣлыми числами; вторая—дѣйствія надъ дробями; третья—дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами; и наконецъ четвертая—дѣйствія надъ градусами и минутами. Въ предисловіи къ своему сочиненію Алнасави говоритъ, что „содержаніе своего сочиненія онъ изложилъ въ формѣ удобной для людей при различныхъ практическихъ примѣненіяхъ и въ формѣ удобной для астрономовъ въ ихъ искусствѣ“. Въ концѣ предисловія Алнасави замѣчаетъ, что „имъ опущены геометрическія доказательства различныхъ правилъ, чтобы не сдѣлать свое сочиненіе слишкомъ обширнымъ“. Въ первой главѣ, первой книги, приведены девять знаковъ при помощи которыхъ пишутся всѣ числа. Знаки эти представляютъ весьма мало сходства съ настоящими цифрами. Сочиненіе Алнасави до насъ не дошло, сохранилась только въ Лейденской библіотекѣ рукопись, въ которой находиться введеніе и содержаніе всѣхъ главъ этого сочиненія. Рукопись эта издана Вепке *****).

*) *Ed. Sachau*, Algebraisches über das Schach bei Biruni. (см. Zeitschrift der Deutschen Morgenländ. Gesellsch. T. XXIX, 1876, pag. 148—156.

**) *S. Günther*, Zeitschrift für Mathematik und Physik. T. XXI. Historisch literar. Abtheilung, pag. 57—61.

***) *M. Cantor*, Geschichte der Mathematik. Bd. I pag. 650—651.

****) Заглавіе этого сочиненія Вепке переводитъ *Traité satisfaisant*, а Канторъ *Befriedigendes Traktat*.

*****) *F. Woepcke*, Mémoire sur la propagation des chiffres Indiens. Paris, 1863, in-8. pag. 157—167.

Въ предисловіи къ своему сочиненію Алнасави упоминаетъ о другихъ сочиненіяхъ по тому же предмету, но сочиненія эти, по его словамъ, всѣ заключаютъ недостатки.

Алмоджетаби. Въ числѣ писателей, составившихъ сочиненія по практической ариѳметикѣ, Алнасави упоминаетъ *Алвальаки Алмоалеви*, извѣстнаго болѣе подъ именемъ *Али бенъ Алмега* или *Алмоджетаби*; онъ былъ родомъ изъ Антіохіи и умеръ въ Багдадѣ въ 987 г. По словамъ арабскихъ писателей Алмоджетаби былъ основательно знакомъ съ трудами древнихъ, глубоко изучилъ науку о числахъ и Геометріи, кромѣ того онъ былъ извѣстенъ, какъ ораторъ и опытный толкователь. Изъ числа его сочиненій извѣстны: „Комментаріи на Евклида", „Сочиненіе объ повѣркѣ дѣйствій"; „Сочиненіе объ способѣ выбирать среди переводчиковъ"; „Объясненіе ариѳметики", Вепке полагаетъ, что въ этомъ сочиненіи находятся поясненія къ „Ариѳметикѣ" Никомаха. Кромѣ этихъ сочиненій Алмоджетаби написалъ еще сочиненіе ариѳметическаго содержанія подъ заглавіемъ: „Большая таблица, относящаяся къ индусскому счисленію", „Трактатъ о счисленіи, произведенномъ на таблицѣ, ничего не стирая" и „Сочиненіе о счисленіи безъ помощи таблицы". Объ ариѳметическихъ сочиненіяхъ Алмоджетаби, Алнасави отзывается, какъ о сочиненіяхъ слишкомъ обширныхъ и неясно изложенныхъ.

Алкалвадзани жилъ въ концѣ X-го вѣка. Онъ принадлежалъ къ багдадскимъ математикамъ. По словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей Алкалвадзани принадлежалъ къ числу свѣдущихъ геометровъ и астрономовъ. Онъ написалъ сочиненіе по ариѳметикѣ, въ которомъ указаны правила для рѣшенія самыхъ сложныхъ вопросовъ. По мнѣнію Вепке, вопросы эти относятся къ различнымъ коммерческимъ операціямъ, къ практической геометріи, къ финансовымъ оборотамъ и т. д. Алнасави отзывается объ этомъ сочиненіи, какъ объ очень трудномъ для читающихъ его.

Абулъ Ганифа Алдайнавари, по словамъ Гаджи Халфа, автора біографическаго словаря, написалъ сочиненія по алгебрѣ, о наслѣдствахъ, сборникъ астрономическихъ наблюденій, произведенныхъ въ 848 г. въ Испаганѣ, астрономическія таблицы и трактатъ по метеорологіи. Также написалъ Алдайнавари сочиненіе по практической ариѳметикѣ, которое по словамъ Алнасави, относилось къ производству астрономическихъ вычисленій. Кромѣ математическихъ сочиненій Алдайнавари написалъ еще нѣсколько другихъ сочиненій не математическаго содержанія.

Кушіаръ, жившій въ концѣ X-го вѣка, также авторъ сочиненія по практической ариѳметикѣ, которое по словамъ Алнасави относилось не только къ производству астрономическихъ вычисленій, но всякихъ вычисленій

вообще. Гаджи Халфа упоминаетъ еще „Введеніе въ астрономію" и „Астрономическія таблицы", написанныя Куширомъ. Послѣднее сочиненіе было написано въ 970 г. Кромѣ этихъ сочиненій нѣкоторые авторы упоминаютъ еще сочиненіе Куширя объ шестидесятичномъ счисленіи. По предположенію Вепке, послѣднее сочиненіе есть трактатъ по практической ариѳметикѣ, о которомъ упоминаетъ Алнасави.

Алкинди. Знаменитый арабскій философъ Алкинди *) жилъ при дворѣ калифа Алмамуна. Онъ умеръ въ концѣ IX вѣка. Современники называли его *философомъ*. Познанія его были громадны: онъ славился, какъ математикъ, врачъ, астрономъ и вообще былъ знакомъ почти со всѣми отраслями человѣческихъ знаній. Алкинди написалъ болѣе 200 сочиненій, списокъ которыхъ приведенъ въ каталогѣ Кассири **). Изъ числа этихъ сочиненій нѣкоторыя заключаютъ переводы на арабскій языкъ сочиненій ученыхъ александрійской и аѳинской школъ. По повелѣнію калифа Алмамуна Алкинди исправилъ переводъ сочиненій Гипсикла, сдѣланный до него Коста-бенъ-Лукой.

Въ одномъ изъ своихъ сочиненій Алкинди упоминаетъ теорему Птоломея. Объ этомъ сочиненіи мы уже говорили выше (см. стр. 235). Сочиненіе это было извѣстно Кардану ***). Также было написано Алкинди сочиненіе по практической ариѳметикѣ, заглавіе котораго: „О способѣ примѣнять индусское счисленіе". Сочиненіе это состояло изъ четырехъ книгъ, оно было посвящено авторомъ внуку Алмамуна. По словамъ Алнасави, сочиненіе по ариѳметикѣ, написанное Алкинди, было слишкомъ обширно и изложено довольно темно.

Абулъ Джафаръ Алхазинъ жилъ въ концѣ IX в. Онъ былъ родомъ персъ. Алхазинъ одинъ изъ первыхъ показалъ, что при помощи коническихъ сѣченій могутъ быть рѣшены такіе вопросы, рѣшеніе которыхъ при помощи вычисленій считалось невозможнымъ. По словамъ Алкаями, Алхазинъ

---

*) Полное имя его Jacub ben Isaac Abn Jussuf Al-chindi Al-Basri.

**) Нѣкоторыя изъ сочиненій Алкинди были переведены съ арабскаго языка на латинскій и пользовались извѣстностью въ Средніе Вѣка. Переводы эти были сдѣланы въ XII-мъ вѣкѣ извѣстнымъ переводчикомъ Герардомъ Кремонскимъ. Указанія на эти переводы можно найти въ сочиненіи: *B. Boncompagni*, Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimoterzo. Roma. 1851. in-4. pag. 5—6, 64—65. Изъ сочиненій Алкинди, переведенныхъ Герардомъ Кремонскимъ, извѣстны слѣдующія: Liber alchindi de aspectibus tractatus, Liber alkindi de quinque essentiis, Liber iacob alkindi de somno et visione, Liber alkindi de gradibus tractatus.

***) De quantitate relativa sive de algebra. Сочиненіе это написано въ Бассорѣ, около 850 г. Алкинди умеръ въ 899 г.

былъ весьма свѣдущъ въ Геометріи, ариѳметикѣ и астрономіи. Также славился онъ какъ искусстный дѣлатель астрономическихъ инструментовъ. Изъ числа сочиненій Алхазина наиболѣе извѣстно „Комментаріи на X-ю книгу „Началъ" Евклида, рукопись котораго хранится въ Лейденской библіотекѣ. Кромѣ того Алхазинъ написалъ задачникъ по ариѳметикѣ и астрономическія таблицы.

Алмагани. Къ числу геометровъ конца IX в. принадлежитъ также *Магометъ-бенъ-Иса Абулъ Абдалла Алмагани*, принадлежавшій къ ученымъ багдадской школы. По словамъ Алкгаіями, онъ былъ весьма свѣдущъ въ Геометріи и ариѳметикѣ. Алмагани первому принадлежитъ мысль алгебраическаго рѣшенія вопроса о раздѣленіи шара въ данномъ отношеніи. Рѣшеніе этого вопроса Алмагани свелъ на рѣшеніе уравненія третьей степени, или какъ выражается Алкгаіями, на „рѣшеніе уравненія содержащаго кубы, квадраты и числа". Не смотря на всѣ усилія рѣшить это уравненіе Алмагани не съумѣлъ. Соображенія Алмагани по этому предмету были помѣщены имъ въ его комментаріяхъ на вторую книгу сочиненія Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ" *).

Изъ другихъ сочиненій Алмагани извѣстны: „Трактатъ о широтахъ звѣздъ", „Объ отношеніяхъ" и сочиненіе подъ заглавіемъ: „Объ двадцати шести предложеніяхъ первой книги „Началъ" Евклида, въ доказательствѣ которыхъ не требуется примѣненіе предположенія противнаго (т. е. примѣненіе метода приведенія къ нелѣпости)" **).

Абулъ-Джудъ. Современникъ Албируни математикъ Абулъ-Джудъ ***) пользовался извѣстностью, какъ свѣдущій геометръ. Сочиненія его до насъ не дошли, мы знаемъ только, что ему была предложена для рѣшенія Албируни слѣдующая задача: изъ данной точки A провести къ данной прямой BC прямую AD такимъ образомъ, чтобы существовало соотношеніе:

$$AD \, . \, BC + BD^2 = BC^2$$

Вопросъ этотъ рѣшенъ Абулъ-Джудомъ при помощи параболы и равносторонней гиперболы ****). Рѣшеніе этого вопроса было необходимо Албируни,

*) См. *Woepcke,* l'Algèbre d'Omar Alkhayyami. pag. 2, 96—97.

**) Предложенія о которыхъ упоминаетъ Алмагани, доказательство которыхъ не требуетъ примѣненія метода доказательства отъ противнаго, суть слѣдующія двадцать шесть предложеній I-й книги „Началъ" Евклида: 5, 8, 9, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 47, 48.

***) Полное имя его Abûl Dschûd Muhammed ibn Allait Alschâni.

****) Рѣшеніе это находиться въ сочиненіи. *Woepcke,* l'Algèbre d'Omar Alkhayyami. Paris. 1851. pag. 114—115.

такъ какъ къ нему онъ сводитъ рѣшеніе задачи трисекціи угла. Также занимался съ успѣхомъ Абулъ-Джудъ, по словамъ Алхайями *), геометрическимъ построеніемъ уравненій третьей степени при помощи коническихъ сѣченій. Къ сожалѣнію приемы, употребленные Абулъ-Джудомъ неизвѣстны; хотя они были изложены въ одномъ изъ его сочиненій.

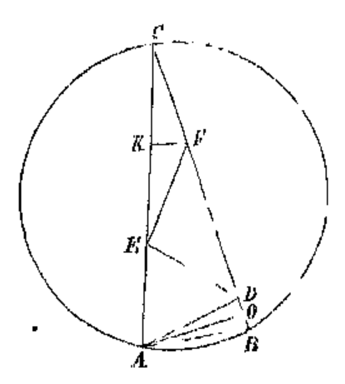
Абулъ-Джудъ первый рѣшилъ вопросъ о раздѣленіи числа 10 на такія двѣ части, чтобы сумма, составленная изъ суммы квадратовъ этихъ частей и частнаго отъ дѣленія большей части на меньшую, равнялась 72. Надъ вопросомъ этимъ, какъ мы уже замѣтили выше, трудился Алкуги, но рѣшенія онъ не съумѣлъ найти. Задача эта сводиться на рѣшеніе кубическаго уравненія вида:

$$x^3+13\frac{1}{2}x+5=10x^2$$

Уравненіе это впервые было рѣшено Абулъ-Джудомъ.

Изъ другихъ изслѣдованій Абулъ-Джуда сохранилось построеніе данное имъ для нахожденія стороны правильнаго, вписаннаго въ кругъ, девятиугольника. Албируни первый, въ седьмомъ предложеніи, седьмой главы, IV й книги своей Геометріи, высказалъ мнѣніе, что построеніе стороны, вписаннаго въ кругъ, девятиугольника, зависитъ отъ рѣшенія уравненія третьей степени, т. е. отъ уравненія, представляющаго зависимость между неизвѣстнымъ, съ одной стороны, и его кубомъ и какимъ нибудь числомъ, съ другой. Предложенія этого Албируни не доказалъ, а предложилъ Абулъ-Джуду.

Фиг. 42.



Рѣшеніе, данное Абулъ-Джудомъ, состоитъ въ слѣдующемъ построе-

*) Алхайями говоритъ, что онъ видѣлъ сочиненіе, въ которомъ находились эти методы. Сочиненіе это была копія съ сочиненія Абулъ-Джуда. См. *Woepcke*, l'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi. pag. 81—83.

нія: Пусть хорда AB будетъ сторона требуемаго девятиугольника (фиг. 42), вписаннаго въ кругъ. На этой сторонѣ построимъ равнобедренный треугольникъ ABC, коего вершина C лежитъ на окружности круга. Отложимъ $AB = AD = DE = EF$, проведемъ $AO \perp$ къ BC и $FK \perp$ къ AC. Уголъ при вершинѣ C будетъ равенъ $\frac{360^0}{18^0} = 20^0$, углы при A и B будутъ каждый $= 80^0$. Изъ этого слѣдуетъ, что $\angle DAE = 80^0 - 20^0 = 60^0$, $\angle DEA$ также $= 60^0$, а потому и $\angle ADE = 60^0$, а слѣдовательно треугольникъ ADE равносторонній. Въ слѣдующемъ треугольникѣ DEF, уголъ $EDF = 180^0 - 60^0 - 80^0 = 40^0$, уголъ EFD также $= 40^0$ и уголъ $DEF = 180^0 - 2 . 40^0 = 100^0$. А потому $\angle FEC = 180^0 - 100^0 - 60^0 = 20^0 = \angle FCE$, а слѣдовательно треугольникъ CFE равнобедренный, изъ чего слѣдуетъ, что $CF = FE = ED = DA = AB = AE$. Изъ подобія треугольниковъ CFK и CAO слѣдуетъ, что:

$$CF : CK = CA : CO$$

откуда:

$$CF : 2CK = CA : 2CO$$

или:

$$AB : CE = CA : (CD + CB)$$

а также:

$$AB : (AB + CE) = CA : (CA + CD + CB)$$

или:

$$AB : AC = AC : (CD + 2AC)$$

Прямыя $AC = BC$ Абулъ-Джудъ принимаетъ равными единицѣ, прямую AB за неизвѣстную, т. е. x; на основаніи этихъ обозначеній, послѣдняя формула напишется:

$$1 = x(2 + CD)$$

Изъ подобія треугольниковъ ABC и BDA находимъ, что:

$$AC : AB = AB : BD$$

или:

$$BD = x^2$$

слѣдовательно:

$$CD = BC - BD = 1 - x^2$$

а уравненіе изъ котораго находиться x имѣетъ форму:

$$1 = x(3 - x^2)$$

или:

$$x^3 + 1 = 3x$$

Это уравненіе рѣшаетъ предложенный вопросъ о нахожденіи стороны, вписаннаго въ кругъ, девятиугольника; оно представляется именно въ той формѣ, въ которой полагалъ Албируни *).

*) Построеніе это дано въ сочиненіи: *Woepcke*, l'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 125—127.

Абулъ Джафаръ. Въ дошедшемъ до насъ сборникѣ Алсиджи, о которомъ мы упоминали выше*), въ числѣ многихъ другихъ сочиненій математическаго содержанія, находиться два сочиненія, предметъ которыхъ относиться въ составленію прямоугольныхъ треугольниковъ. Первое изъ этихъ сочиненій озаглавлено: „Отрывокъ сочиненія неизвѣстнаго автора, относящійся къ образованію прямоугольныхъ треугольниковъ, которыхъ стороны выражаются раціональными или цѣлыми числами“. Второе сочиненіе носитъ заглавіе: „Письмо шейха Абулъ Джафара Магомета бенъ Алгозейна къ Абулу Магомету Абдаллѣ бенъ Али, извѣстнаго подъ именемъ вычислителя, объ составленіи прямоугольныхъ треугольниковъ, которыхъ стороны раціональны и объ пользѣ знанія ихъ“**). Оба эти сочиненія были изданы благодаря неутомимымъ трудамъ Вепке***). Къ своему переводу онъ сдѣлалъ весьма цѣнные комментаріи и объясненія. Первое изъ вышепоименованныхъ сочиненій дошло до насъ въ неполномъ видѣ, начало его утеряно. Также неизвѣстно кто былъ его авторъ и когда именно оно написано. Есть основанія предполагать, что оно составлено въ началѣ X-го вѣка. Второе изъ упомянутыхъ нами сочиненій написано Абулъ Джафаромъ, жившимъ вѣроятно въ концѣ X-го или началѣ XI-го вѣковъ. Единственное указаніе на время, когда жилъ Абулъ Джафаръ видно изъ его словъ, гдѣ онъ упоминаетъ математика Алходшанди и говоритъ о немъ, какъ объ лицѣ умершемъ. Алходшанди же, какъ извѣстно, жилъ въ концѣ X-го вѣка. Свѣдѣній объ жизни и ученой дѣятельности Абулъ Джафара также не существуетъ положительно никакихъ. Познакомимся вкратцѣ съ содержаніемъ поименованныхъ двухъ сочиненій, предметъ которыхъ ознакомитъ насъ съ изслѣдованіями арабскихъ математиковъ въ области теоріи чиселъ.

Изъ сохранившейся части сочиненія анонимнаго автора можно заключить, что въ недошедшемъ до насъ началѣ этого сочиненія была объяснена

---

*) Заглавія сочиненій, помѣщенныхъ въ сборникѣ, мы привели на стр. 348—[illegible]. Описаніе этой замѣчательной рукописи находится въ статьѣ *F. Woepcke*, Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe. Помѣщено въ Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut Impérial de France. Sciences mathématiques et physiques T. XIV. 1856. Paris. pag. 658—720.

**) Письмо это помѣщено въ сборникѣ Алсиджи, изданнымъ Вепке. Оно есть двадцатая статья вписанная въ сборникѣ.

***) *F. Woepcke*, Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, etc. III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Abou Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn. Помѣщено въ Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Vol. XIV, 1861, pag. 211—227, 241—269, 301—324, 343—356.

разница между *первообразными* прямоугольными треугольниками и *производными* прямоугольными треугольниками, которые получаются умножая всѣ стороны первыхъ на одно и тоже число. Какъ примѣръ производныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ анонимный авторъ указываетъ на треугольники, которыхъ стороны 6, 8, 10 и $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, которые получаются соотвѣтственнымъ умноженiемъ на 2 и $\frac{1}{2}$ сторонъ первообразнаго треугольника, коего стороны 3, 4 и 5. Послѣ этихъ опредѣленiй треугольниковъ, авторъ выражаетъ слѣдующiя предложенiя: *a)* что гипотенуза первообразнаго треугольника всегда можетъ быть разложена на два квадрата, *b)* что всегда она представляется подъ одной изъ двухъ формъ: $12m+1$ и $12m+5$; и *c)* что всѣ числа формы $12m+1$ и $12m+5$ не всегда могутъ быть гипотенузами первообразныхъ треугольниковъ.

Показавъ, и пояснивъ на примѣрахъ, что числа формы $12m+1$ и $12m+5$ заключаютъ также числа, которыя не могутъ быть разложены на два квадрата, авторъ замѣчаетъ, что въ этой формѣ заключаются также числа, которыя могутъ быть разложены на два квадрата, болѣе чѣмъ однимъ способомъ. Авторъ упоминаетъ только *два* способа разложенiя чиселъ формъ $12m+1$ и $12m+5$ на два квадрата, вѣроятно потому, что онъ имѣлъ передъ собой только небольшой рядъ чиселъ этихъ формъ.

Найдя рядъ гипотенузъ, выраженныхъ числами формы $h=a^2+b^2$, анонимный авторъ получаетъ полный рядъ первообразныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, въ которыхъ стороны суть числа цѣлыя, образуя для всякаго h и для всякаго разложенiя h, въ которомъ a и b числа первыя между собою, выраженiя $2ab$ и $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. При этомъ авторъ, совершенно справедливо замѣчаетъ, что первое изъ этихъ произведенiй всегда четное, а второе всегда нечетное.

Далѣе, анонимный авторъ замѣчаетъ, что для того, чтобы треугольникъ былъ первообразнымъ нужно чтобы $a+b=2n+1$ и кромѣ того необходимо, чтобы числа a и b были первыми между собой. Это онъ поясняетъ на слѣдующемъ примѣрѣ: пусть нечетныя числа будутъ 3 и 5, тогда

$$2n+1=3 \quad a=2\ ,\ b=1\ ,\ 2ab=4\ ,\ (a+b)(a-b)=3\ ,\ a^2+b^2=5$$

$$2n+1=5\begin{cases} a=3\ ,\ b=2\ ,\ 2ab=12\ ,\ (a+b)(a-b)=5\ ,\ a^2+b^2=13 \\ a=4\ ,\ b=1\ ,\ 2ab=8\ ,\ (a+b)(a-b)=15\ ,\ a^2+b^2=17 \end{cases}$$

Также извѣстна анонимному автору формула.

$$[(a+b)(a-b)]^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

которая постоянно примѣняется въ VI-й книгѣ „Ариѳметики" Дiофанта. При этомъ необходимо замѣтить, что это рѣшенiе уравненiя $x^2+y^2=z^2$

есть болѣе частный случай общаго рѣшенія даннаго еще раньше Евклидомъ въ своихъ „Началахъ" *).

Отъ вниманія анонимнаго автора не ускользнуло также то обстоятельство, что если разлагать нечетныя числа по порядку на двѣ части a и b, и если изъ каждой изъ этихъ паръ a и b составлять прямоугольные треугольники, то гипотенузы (a^2+b^2) этихъ треугольниковъ, начиная съ извѣстнаго мѣста, не слѣдуютъ одна за другой по своей относительной величинѣ. Первый случай такого рода представляется для числа 9, которое для разложенія 8+1 имѣетъ гипотенузу равную 65, между тѣмъ число 11, для разложенія 6+5 даетъ гипотенузу 61.

Также извѣстна анонимному автору формула:

$$[m+(m+1)]^2+[2m(m+1)]^2=[2m(m+1)+1]^2$$

гдѣ m и $m+1$ два послѣдовательныхъ числа. Выраженіе это есть ничто иное, какъ формула данная Прокломъ, въ своихъ комментаріяхъ на первую книгу „Началъ" Евклида, и которую онъ приписываетъ Пиѳагору. Обозначая черезъ $2m+1$ данное нечетное число, мы имѣемъ:

$$2m+1=m+(m+1)$$

$$\frac{(2m+1)^2-1}{2}=2m(m+1)$$

$$\frac{(2m+1)^2-1}{2}+1=2m(m+1)+1$$

Выраженія эти показываютъ, что вышенаписанная формула даетъ всегда первообразные треугольники, такъ какъ $2m+1$ есть число первое съ числами $(2m+1)^2-1$ и $(2m+1)^2+1$; и кромѣ того $\frac{(2m+1)^2-1}{2}$, $\frac{(2m+1)^2+1}{2}$ суть числа первыя между собою, какъ имѣющія разность равную единицѣ.

Послѣ этого анонимный авторъ даетъ правило, которое есть ничто иное, какъ правило, которое Проклъ приписываетъ Платону. Правило это заключается въ слѣдующемъ: если $m-1$, m, $m+1$ будутъ три послѣдовательныхъ числа, то:

$$[(m-1)(m+1)]^2+[2m]^2=[m^2+1]^2$$

или иначе:

$$(m^2-1)^2+(2m)^2=(m^2+1)^2$$

Очевидно, что если m есть число нечетное формы $2\mu+1$,

---

*) См. „Начала" Евклида, книга X, пред. 29, лемм. 1.

не будетъ первообразнымъ, такъ какъ всѣ три стороны могутъ быть раздѣлены на 2. Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$m^2-1=2(2\mu^2+2\mu)\quad,\quad 2m=2(2\mu+1)\quad,\quad m^2+1=2(2\mu^2+2\mu+1)$$

Въ противномъ же случаѣ, если m число четное, то m^2-1 и m^2+1 будутъ числа нечетныя, а поэтому первыя между собою; это слѣдуетъ изъ того, что имѣя разность 2, общимъ множителемъ ихъ можетъ быть только число 2. Кромѣ того, такъ какъ для этого случая $2m$ первое съ m^2+1 и m^2-1, которыя не суть четныя числа, а также не дѣлятся на m, то слѣдовательно, если m четное, полученный треугольникъ можетъ быть только первообразнымъ.

Изъ другихъ правилъ для образованія треугольниковъ анонимный авторъ предлагаетъ слѣдующее: пусть будетъ дано три послѣдовательныхъ нечетныхъ числа:

$$2m-1\qquad,\qquad 2m+1\qquad,\qquad 2m+3$$

то очевидно будетъ существовать равенство:

$$[4(2m+1)]^2+[(2m-1)(2m+3)]^2=[(2m+1)^2+4]^2$$

Выраженіе это очевидно представитъ формулу для построенія первообразнаго треугольника, такъ какъ числа $2m-1$, $2m+1$, $2m+3$ нечетныя и первыя между собой, а потому стороны $4(2m+1)$ и $(2m-1)(2m+3)$ также первыя между собой.

Формула эта можетъ быть упрощена, если за данныя числа принять три числа.

$$bm+c-b\qquad,\qquad bm+c\qquad,\qquad bm+c+b$$

которыя образуютъ треугольникъ:

$$[2b(bm+c)]^2+[(bm+c-b)(bm+c+b)]^2=[(bm+c)^2+b^2]^2$$

Послѣдняя формула легко сводиться къ предъидущей, при положеніяхъ $b=2$, $c=1$. Изъ нея легко получить формулу Платона, полагая $b=1$, $c=0$.

Взявъ четыре послѣдовательныхъ нечетныхъ числа:

$$2m-3\quad,\quad 2m-1\quad,\quad 2m+1\quad,\quad 2m+3$$

имѣемъ

$$[(2m-1)(2m+1)]^2+[(2m-3)+(2m+3)]^2=[(2m)^2-1]^2+[2(2m)]^2=[(2m)^2+1]^2$$

Всѣ прямоугольные треугольники, выраженные этой формулой, подходятъ подъ правило, данное Платономъ.

Въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ своего сочиненія анонимный авторъ рѣшаетъ слѣдующій вопросъ, который впрочемъ изложенъ весьма темно: пусть x, y, z будутъ стороны прямоугольнаго треугольника, означимъ черезъ A и P соотвѣтственно его площадь и периметръ; пусть A' и P' будутъ соотвѣтственно площадь и периметръ треугольника, коего стороны суть:

$$x' = x + \frac{m}{n}x \qquad y' = y + \frac{m}{n}y \qquad z' = z + \frac{m}{n}z$$

очевидно мы имѣемъ:

$$A' = \left(\frac{n+m}{n}\right)^2 \cdot A \qquad P' = \left(\frac{n+m}{n}\right) \cdot P$$

откуда:

$$\frac{A'}{P'} = \frac{n+m}{n} \cdot \frac{A}{P}$$

слѣдовательно:

$$\frac{A'}{A} : \frac{P'}{P} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Для частнаго случая:

$$x' = 2x \quad , \quad y' = 2y \quad , \quad z' = 2z$$

будемъ имѣть:

$$A' = 4A \quad , \quad P' = 2P \quad , \quad \frac{A'}{P'} = 2\frac{A}{P}$$

слѣдовательно:

$$A' = 2P', \text{ если } A = P, \text{ и } A' = P', \text{ если } A = \frac{1}{2}P$$

По мнѣнію Вепке *), изъ нѣкоторыхъ выраженій анонимнаго автора можно думать, что онъ занимался нахожденіемъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ не первообразныхъ, въ которыхъ отношеніе площади къ периметру было одинаково, въ первообразныхъ же треугольникахъ, отъ которыхъ первые произошли, отношенія эти неодинаковы. Кромѣ того эти треугольники должны были удовлетворять и другимъ условіямъ, которыя измѣнялись съ измѣненіемъ задачи.

Въ одномъ изъ параграфовъ своего сочиненія анонимный авторъ весьма ясно выражаетъ „задачу сравнимыхъ чиселъ", т. е. вопросъ объ одновременномъ существованіи двухъ неопредѣленныхъ уравненій:

$$s^2 + k = u^2$$
$$s^2 - k = v^2 \qquad (1)$$

*) F. Woepcke, Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise. III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles etc. pag. 17.

въ которыхъ k число данное. Вопросъ этотъ представляетъ особенный интересъ, такъ какъ онъ тѣсно связанъ съ нѣкоторыми трудными и вмѣстѣ съ тѣмъ основными вопросами неопредѣленнаго анализа, надъ которыми трудились Ферма, Эйлеръ, Лагранжъ и Лежандръ. Въ особенности на этотъ вопросъ обратили вниманіе ученые съ тѣхъ поръ, какъ слѣды его были найдены въ сочиненіяхъ Фибоначчи и Луки Пачіоли. Надъ изслѣдованіемъ этого вопроса много трудился извѣстный Коссали *). Въ послѣднее время вопросъ этотъ пріобрѣлъ особенный интересъ, такъ какъ Бонкомпани указалъ на рѣшеніе этого вопроса, найденное имъ въ отысканномъ имъ сочиненіи Фибоначчи „О квадратныхъ числахъ" **). Съ теоретической точки зрѣнія вопросъ этотъ былъ обстоятельно изслѣдованъ Генокки ***).

Вопросъ этотъ сталъ занимать арабскихъ математиковъ вѣроятно еще ранѣе X-го вѣка, такъ какъ вопросъ объ рѣшеніи двухъ совмѣстныхъ неопредѣленныхъ уравненій:

$$s^2+w^2=u^2$$

$$s^2-w^2=v^2$$

находится уже въ „Ариѳметикахъ" Діофанта ****), который замѣтилъ, что всякій прямоугольный треугольникъ въ раціональныхъ числахъ даетъ рѣшеніе этой задачи. Арабскій математикъ изслѣдуетъ тотъ же вопросъ съ иной точки зрѣнія, онъ неизвѣстную величину u замѣняетъ даннымъ числомъ k. При такой замѣнѣ неизвѣстный авторъ изслѣдуетъ вопросъ, построивъ таблицу рѣшеній, которыя даютъ прямоугольные треугольники, выраженные въ раціональныхъ числахъ. Въ подобной таблицѣ можно найти само число k, или же это число умноженное на квадратъ, и само рѣшеніе, или соотвѣтствующія рѣшенія. Такой методъ есть самый простой. Впослѣдствіи, вопросы неопредѣленнаго анализа Ферма сводилъ на задачи такой же формы, но удовлетворяющіяся меньшими числами; а также были найдены другіе пріемы, какъ напр. методы Ферма и Лагранжа, примѣнимые ими при рѣшеніи биквадратныхъ уравненій, рѣшеніе которыхъ приводитъ къ рѣшенію совмѣстной системы уравненій (1).

*) *Cossali*, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra, Vol. I, pag. 115—145.

**) Intorno alla risoluzione delle equazioni simultanee $x^2+h=y^2$, $x^2-h=z^2$. Nota di *Baldassarre Boncompagni*. Roma. 1855, in 8.

***) Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni note analitiche di *Angelo Genocchi*. Roma. 1855, in 8.

****) Вопросъ этотъ изслѣдованъ въ кн. V, 9, кн. III, 22, а также кн. III, 9, кн. II, 20, кн. IV, 45.

Неизвѣстный авторъ замѣтилъ, что для устройства таблицы такихъ чиселъ, достаточно образовать прямоугольные первообразные треугольники; но съ другой стороны онъ не упускаетъ изъ виду дробныхъ значеній, такъ какъ онъ даетъ опредѣленіе производныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, которые выражаются формулой:

$$\left(\frac{p}{q}x\right)^2+\left(\frac{p}{q}y\right)^2=\left(\frac{p}{q}z\right)^2$$

если только положить, что $x^2+y^2=z^2$ есть выраженіе для первообразнаго треугольника.

Особеннаго вниманія, въ разсматриваемомъ сочиненіи неизвѣстнаго автора, заслуживаютъ попытки, сдѣланныя имъ, для нахожденія различныхъ признаковъ чиселъ, удовлетворяющихъ извѣстнымъ условіямъ неопредѣленнаго анализа. Признаки эти заключаются въ выраженіи условій, что числа эти должны представляться въ такомъ-то видѣ относительно такого-то модуля; подобныя признаки, въ настоящее время, составляютъ предметъ Теоріи Чиселъ. Изъ числа подобныхъ признаковъ укажемъ на замѣчаніе автора, что гипотенузы первообразныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ всегда представляются въ одной изъ двухъ формъ $12m+1$ или $12m+5$; что если требуется разложить данное число $10m+r$ на два квадрата $10m'+r'$ и $10m''+r''$, то r' и r'' не могутъ имѣть, исключая двухъ случаевъ, болѣе одного или двухъ опредѣленныхъ значеній; что квадраты u^2 и v^2 уравненій (1), представляются всегда въ формѣ $10m+1$ или $10m+9$, если рѣшеніе уравненій (1) дано прямоугольными первообразными треугольниками.

Въ концѣ сочиненія приведены таблицы для образованія прямоугольныхъ треугольниковъ на основаніи правилъ, изложенныхъ въ предъидущемъ.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію втораго изъ поименованныхъ нами сочиненій, написанныхъ по одному и тому же предмету, къ сочиненію написанному Абулъ Джафаромъ Алховейномъ. Сочиненіе свое авторъ начинаетъ съ того, что говоритъ: „я уже объяснилъ, что доказательства, предложенныя Абулъ Магометомъ Алходжанди, да будетъ надъ нимъ милосердіе Бога *), въ своемъ доказательствѣ предложенія, что сумма двухъ кубовъ не даетъ числа кубическаго, неудовлетворительны и неточны, и что правило, данное имъ, для знакомства съ прямоугольными треугольниками, коихъ стороны раціональны, частное, а не общее". Въ предлагаемомъ письмѣ авторъ желаетъ познакомить читателя съ методомъ распознаванія и образованія раціональныхъ треугольниковъ **).

*) Такъ выражаются всегда арабскіе писатели объ лицѣ умершемъ.

**) Анонимный авторъ и Абулъ Джафаръ употребляютъ неодинаковые термины для

Въ началѣ своего сочиненія Абулъ Джафаръ доказываетъ нѣсколько вспомогательныхъ предложеній, доказательство которыхъ онъ основываетъ на нѣкоторыхъ изъ предложеній „Началъ“ Евклида. Одно изъ предложеній Абулъ Джафара заключается въ слѣдующемъ: всякое нечетное число, которое можетъ быть разложено на два квадрата, т. е. на двѣ такія части, изъ которыхъ можно извлечь корень, имѣетъ свойство, что его квадратъ можетъ быть разложенъ на два квадратныхъ числа. Доказательство этого предложенія авторъ основываетъ на пред. 24, VIII-й книги „Началъ“ Евклида. Послѣ этого Абулъ Джафаръ выражаетъ предложеніе, что прямоугольные треугольники, въ которыхъ гипотенуза есть число четное, не суть первообразные.

Далѣе авторъ даетъ таблицу чиселъ, состоящихъ изъ двухъ квадратныхъ чиселъ, т. е. таблицу чиселъ, которыя могутъ быть разложены на сумму двухъ чиселъ, изъ которыхъ можно извлечь корень. Пріемъ, употребленный Абулъ Джафаромъ для отысканія чиселъ, которыя разлагаются на два квадрата, весьма простой, именно онъ прибавляетъ къ квадрату каждаго числа, снова квадратъ этого числа и квадраты всѣхъ остальныхъ чиселъ. При помощи такого пріема построена таблица. Хотя этотъ методъ крайне топорный, но тѣмъ не менѣе онъ ведетъ къ требуемой цѣли и для небольшаго числа чиселъ вполнѣ пригоденъ. Указанная таблица имѣетъ также свои несомнѣнныя достоинства, такъ какъ въ ней находятся только тѣ числа, которыя состоятъ изъ суммы двухъ квадратныхъ чиселъ, кромѣ того если для извѣстнаго числа существуетъ нѣсколько различныхъ такихъ разложеній, то онѣ представляются каждое въ своемъ мѣстѣ. Къ числу недостатковъ таблицы принадлежитъ также то, что числа расположены не въ послѣдовательномъ порядкѣ.

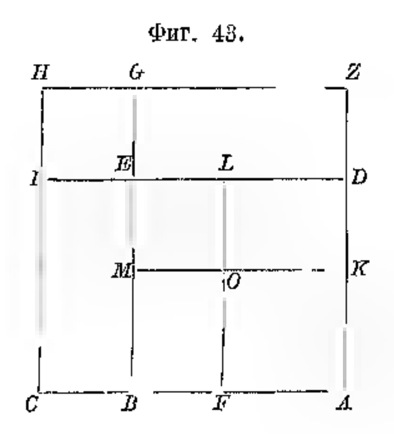
Далѣе Абулъ Джафаръ даетъ правила для составленія прямоугольныхъ треугольниковъ при помощи четырехъ, шести или восьми послѣдовательныхъ чиселъ. Правила эти сходны съ правиломъ Пиѳагора. Нѣкоторыя изъ правилъ, данныхъ Абулъ Джафаромъ, тождественны съ правилами, данными анонимнымъ авторомъ, другія же предложенія невѣрны, что указываетъ на отсутствіе строгой послѣдовательности въ выводахъ автора разсматриваемаго сочиненія.

Въ одномъ изъ послѣднихъ параграфовъ своего сочиненія Абулъ Джафаръ говоритъ, что „цѣль познанія этихъ треугольниковъ, это рѣшеніе

обозначенія первообразныхъ и производныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Анонимный авторъ первообразный треугольникъ выражаетъ терминомъ *aṣl—основной*, а производный терминами *far'on* или *mafroû'on—производный*. Абулъ Джафаръ тѣже понятія выражаетъ терминами: *awwali первообразный* и *tâli'—слѣдующій*.

вопроса о нахожденіи числа, имѣющаго корень, такого, чтобы если къ нему прибавить извѣстное число, сумма имѣла бы корень, если же отъ него отнять тоже число, то разность также имѣла бы корень". Изъ послѣднихъ словъ автора видно, что цѣль всѣхъ его разысканій надъ составленіемъ раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ приводиться къ рѣшенію вопроса о нахожденіи квадрата, который будучи увеличенъ или уменьшенъ на извѣстное число, снова оставался квадратомъ. Вопросъ этотъ Абулъ Джафаръ рѣшаетъ геометрически. Рѣшеніе его заключается въ слѣдующемъ геометрическомъ построеніи: на неопредѣленной прямой отложимъ катеты $AB = c_1$ и $BC = c_2$ прямоугольнаго раціональнаго треугольника, коего гипотенуза h (фиг. 43). На суммѣ этихъ двухъ катетовъ, т. е. на прямой

Фиг. 43.



$AC = c_1 + c_2$, построимъ квадратъ $ACHZ$; на большемъ изъ катетовъ $AB = c_1$ построимъ также квадратъ $ABED$, стороны котораго BE и ED продолжимъ до пересѣченія со сторонами большаго квадрата въ точкахъ I и G. Такимъ образомъ мы видимъ, что квадратъ $ACHZ$, или квадратъ $(c_1 + c_2)^2$ состоитъ изъ слѣдующихъ четырехъ частей: квадрата c_1^2, квадрата c_2^2 и двухъ равныхъ прямоугольниковъ $c_1 c_2$. Обозначимъ $2c_1 c_2 = k$, а такъ какъ $c_1^2 + c_2^2 = h^2$, то слѣдовательно $(c_1 + c_2)^2 = h^2 + k$. Итакъ мы видимъ, что $h^2 + k$ есть квадратъ; докажемъ теперь, что и $h^2 - k$ есть также квадратъ. На сторонахъ AB и AD квадрата $ABED$ отложимъ части $BF = DK = c_2$, чрезъ точки K и F проведемъ прямыя KM и FL, параллельныя сторонамъ квадрата. Сдѣлавъ такое построеніе мы видимъ, что квадратъ $ABED$ разложенъ на квадратъ $AFOK$ и на два равные прямоугольника $DKME$ и $BELF$, отъ которыхъ нужно отнять маленькій квадратъ $MOLE$; или иными словами $ABED + MOLE - 2BELF = AFOK$, или вводя сюда наши обозначенія, получимъ: $c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 = (c_1 - c_2)^2$ или $(c_1 - c_2)^2 = (c_1^2 + c_2^2) - 2c_1 c_2 = h^2 - k$. Такимъ образомъ найдены числа требуемыхъ свойствъ, такъ какъ

авторъ доказываетъ геометрическимъ построеніемъ, что если существуетъ зависимость между раціональными числами, удовлетворяющая уравненію:

$$x^2+y^2=z^2$$

то будутъ всегда существовать уравненія:

$$z^2+2xy=(x+y)^2$$

$$z^2-2xy=(x-y)^2$$

въ которыхъ $x+y$ и $x-y$ также числа раціональныя. На нашемъ чертежѣ $x=AB$ и $y=BC$.

Приведенное геометрическое построеніе заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ оно основано не на разсужденіяхъ, а прямо слѣдуетъ изъ фигуры. Справедливость его вытекаетъ прямо изъ сравненія частей фигуры. Подобный методъ, какъ извѣстно, примѣнялся съ успѣхомъ индусскими геометрами. Мы уже выше указали (см. стр. 537) на подобныя же построенія, встрѣчаемыя въ сочиненіи Абулъ Вефы. Весьма вѣроятно, что приведенное построеніе получило свое начало у индусовъ, а отъ нихъ перешло къ арабамъ. Такое предположеніе еще тѣмъ вѣроятно, что извѣстно, что индусскіе математики весьма много занимались построеніемъ фигуръ, коихъ части выражаются раціональными числами; много такихъ построеній встрѣчается въ сочиненіи Брамагупты. Въ концѣ своего сочиненія Абулъ Джафаръ даетъ двѣ таблицы, въ которыхъ находятся числа, изъ которыхъ составляются прямоугольные треугольники. Въ первой таблицѣ приведены числа, изъ которыхъ составляются *нечетные* треугольники, т. е. такіе, гипотенуза и большій катетъ которыхъ выражаются двумя послѣдовательными числами; примѣромъ такихъ прямоугольныхъ треугольниковъ служатъ треугольники: 3, 4, 5; 5, 12, 13 и т. д. Во второй таблицѣ приведены числа, изъ которыхъ составляются *четные* прямоугольные треугольники, т. е. такіе, въ которыхъ гипотенуза и большій изъ катетовъ выражаются числами, разнящимися на единицу; примѣромъ четныхъ треугольниковъ могутъ служить треугольники, которые выражаются числами: 8, 15, 17; 12, 35, 37; и т. д.

Познакомившись съ содержаніемъ сочиненій анонимнаго автора и Абулъ Джафара, предметъ которыхъ относиться къ составленію раціональныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, мы можемъ прослѣдить первые шаги арабскихъ математиковъ въ области теоріи чиселъ. Когда именно начали заниматься арабскіе математики изслѣдованіемъ вопросовъ подобнаго рода, нельзя сказать утвердительно за недостаткомъ какихъ либо положительныхъ указаній. Разсмотрѣнныя нами сочиненія, на сколько извѣстно въ настоя-

щее время, суть однѣ изъ первыхъ сочиненій, написанныхъ по этому предмету. Также неизвѣстно подъ вліяніемъ какихъ сочиненій, греческихъ-ли или индусскихъ, стали заниматься арабы изслѣдованіями въ теоріи чиселъ. Вепке полагаетъ, что на изслѣдованія арабскихъ математиковъ могли имѣть съ одной стороны вліяніе сочиненія Діофанта, а съ другой индусскія сочиненія. Съ сочиненіями Діофанта, какъ извѣстно познакомились арабы въ IX в. Сочиненіе анонимнаго автора, по мнѣнію Вепке, написано въ началѣ X вѣка, т. е. незадолго до сочиненія Абулъ Джафара. Особенное вниманіе анонимный авторъ, а также Абулъ Джафаръ, обратили на рѣшеніе вопроса: „найти квадраты, которые будучи увеличены, или уменьшены, на одно и тоже число, дали бы два числа изъ которыхъ можно извлечь корень квадратный".

Вопросъ этотъ впослѣдствіи занималъ многихъ математиковъ Запада, которые вѣроятно заимствовали его изъ сочиненій арабовъ. Рѣшеніе его для отдѣльныхъ случаевъ считалось весьма труднымъ, такъ какъ извѣстно, что вопросы подобнаго рода предлагались для рѣшенія на научныхъ турнирахъ между математиками среднихъ вѣковъ. Вопросъ о нахожденіи квадратнаго числа, которое будучи увеличено или уменьшено на извѣстное число, давало бы число квадратное, встрѣчается въ знаменитомъ сочиненіи Фибоначчи о квадратныхъ числахъ—„Liber Quadratorum". Вопросъ этотъ находится въ числѣ задачъ, предложенныхъ Фибоначчи, императорскимъ философомъ Іоанномъ Палермскимъ. Задача, заданная для рѣшенія Фибоначчи, состояла въ слѣдующемъ: „найти квадратное число, которое будучи увеличено, или уменьшено на 5, оставалось бы постоянно числомъ квадратнымъ". Фибоначчи далъ рѣшеніе $^{41}/_{12}$ *). Рѣшеніе это удовлетворяетъ предложенному вопросу, такъ какъ:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2$$

Рѣшивъ этотъ вопросъ и найдя еще много другихъ интересныхъ свойствъ, принадлежащихъ квадратнымъ числамъ, Фибоначчи рѣшилъ еще вопросъ: „найти три квадрата и число, которые имѣли бы такое свойство, что если придать это число къ меньшему изъ трехъ квадратовъ, получился средній квадратъ, а прибавивъ это число къ среднему квадрату, получился

*) *Boncompagni*, Opuscoli di Leonardo Pisano pubblicati da Baldass. Boncompagni, Seconda edizione. Firenze. 1856. in-8. pag. 96—115.

большій квадратъ". Вопросъ этотъ есть ничто иное, какъ вопросъ, предложенный Іоанномъ Палермскимъ, только въ болѣе общей формѣ.

Весьма можетъ быть, что основную мысль своего трактата о квадратныхъ числахъ, а равно и нѣкоторые другіе вопросы, Фибоначчи заимствовалъ изъ сочиненій арабскихъ математиковъ, съ которыми онъ могъ познакомиться во время своихъ дальнихъ странствованій.

Гассанъ-бенъ-Гайтемъ. Однимъ изъ самыхъ плодовитыхъ арабскихъ математиковъ былъ безспорно *Гассанъ-бенъ-Гайтемъ,* извѣстный также подъ именемъ *Алгазена.* Онъ принадлежалъ къ ученымъ каирской школы; дѣятельность его относиться къ началу XI-го вѣка. Умеръ онъ въ Каиро, въ 1038 г. Гассанъ-бенъ-Гайтемъ авторъ многочисленныхъ сочиненій, изъ числа которыхъ, къ сожалѣнію, дошли до насъ только немногія. До насъ дошли заглавія около ста-двадцати сочиненій, написанныхъ Гассаномъ по самымъ различнымъ отраслямъ математическихъ наукъ. Многія изъ этихъ сочиненій относятся къ астрономіи.

Особенное вниманіе было обращено математиками на геометрическое сочиненіе Гассана-бенъ-Гайтема, озаглавленное „Трактатъ о геометрическихъ извѣстныхъ". Объ этомъ сочиненіи мы имѣли уже случай говорить подробно, когда коснулись развитія Геометріи у арабовъ *). Первый обратившій вниманіе на это замѣчательное сочиненіе былъ Седильо **). Сочиненіе это состоитъ изъ двухъ частей. Съ содержаніемъ и съ нѣкоторыми изъ предложеній этого сочиненія мы уже знакомы, напомнимъ здѣсь только, что вопросы, разсмотрѣнные Гассанъ-бенъ-Гайтемомъ, относятся къ числу вопросовъ, извѣстныхъ у древнихъ греческихъ геометровъ подъ именемъ *данныхъ.* Подъ общимъ названіемъ *данныхъ* греческіе геометры понимали три различные вида предложеній, именно: *данныя, мѣста* и *поризмы.* Вопросами подобнаго рода, какъ извѣстно, много занимались Евклидъ и Аполлоній, написавшіе сочиненія, въ которыхъ разсматривались эти вопросы. Въ сочиненіи Гассанъ-бенъ-Гайтема разсмотрѣны именно предложенія, относящіяся къ этимъ тремъ видамъ *данныхъ.* Предложенія эти арабскій геометръ называлъ *геометрическими извѣстными.* Сочиненіе Гассанъ-бенъ-Гайтема весьма интересно еще въ томъ отношеніи, что указываетъ на знакомство арабскихъ математиковъ съ недошедшими до насъ сочиненіями греческихъ геометровъ. Къ числу такихъ сочиненій, какъ извѣстно принадлежатъ также „Поризмы" Евклида, которые служили предметомъ изслѣдованій многихъ ученыхъ, пы-

---

*) См. стр. 237—240.

**) Сочиненіе это было издано Седильо и напечатано въ Nouveau Journal Asiatique, Mai, 183. См. также *L. Am. Sédillot,* Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux. Paris, 1845. T. I, pag. 379—400.

тавшихся ихъ возстановить. Изъ числа геометровъ, занимавшихся этимъ вопросомъ болѣе извѣстны попытки Ферма *), Галлея, Симсона **), Плайфаера ***), Бретона ****) и Шаля *****). Послѣднему изъ нихъ удалось, наконецъ, возстановить утерянное сочиненіе Евклида и тѣмъ окончательно рѣшить вопросъ. Въ нѣкоторыхъ предложеніяхъ сочиненія Гассанъ-бенъ-Гайтема Шаль узналъ поризмы Евклида, изъ чего онъ заключаетъ, что „Поризмы" Евклида были извѣстны арабскому геометру. На связь, существующую между *поризмами* Евклида и *извѣстными* Гассанъ-бенъ-Гайтема, обратилъ вниманіе еще ранѣе Бретонъ.

Изъ другихъ сочиненій, написанныхъ Гассанъ-бенъ-Гайтемомъ, до насъ дошли слѣдующія: „Комментаріи на опредѣленія, находящіяся въ „Началахъ" Евклида"; „Трактатъ о дѣленіи линіи"; въ этомъ сочиненіи Гассанъ-бенъ-Гайтемъ показываетъ какимъ образомъ получается отношеніе, примѣненное Архимедомъ въ 4-мъ предложеніи второй книги сочиненія „О шарѣ и цилиндрѣ". Построеніе, данное Гассанъ-бенъ-Гайтемомъ, воспроизвелъ Венке ******). Также дошло до насъ сочиненіе по „Оптикѣ" въ семи книгахъ; сочиненіе это было переведено на латинскій языкъ Герардомъ Кремонскимъ *******). Изъ этого сочиненія были сдѣланы извлеченія Вителіемъ въ XIII в., написавшимъ также сочиненіе по Оптикѣ. „Оптика" Альгазена была также переведена на италіанскій языкъ въ XIV вѣкѣ ********). Рукописи

---

*) *D. Petri de Fermat*, Varia Opera Mathematica. Porismatum Euclidaeorum Renovata Doctrina, et sub formâ Isagoges recentioribus Geometris exhibita. pag. 116—119. Tolosae. 1679. in-fol.

**) *Robert Simson*, Opera quaedam reliqua. Glasgow. 1776. in-4. pag. 315—594. (См. De Porismatibus).

***) *Playfair*, On the origin and investigation of Porisms. Edinb. 1792 in-4.

****) *P. Breton (de Champ)*, Recherches nouvelles sur les porismes d'Euclide. Помѣщено въ Journal de Mathématiques pures et appliquées. T. XX. 1855. pag. 209—304.

*****) *M. Chasles*, Les trois livres des Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions. Paris. 1860. in-8. pag 44 45 51—52.

******) *F. Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 91—98.

*******) Такое предположеніе высказалъ Журденъ (см. Jourdain, Recherches critiques sur l'age et l'origine des traductions latines d'Aristote, Paris 1843. in-8. pag. 123, 389). „Оптика" Альгазена была напечатана въ первый разъ въ сборникѣ „Opticae Thesaurus" подъ заглавіемъ: Alhazeni Arabis libri septem, nunc primum editi, eiusdem liber de Crepusculis et Nubium ascentionibus. Basileae. 1572. in-fol. Въ этомъ сборникѣ помѣщена также „Оптика" Вителія. По мнѣнію извѣстнаго Рожера Бекона, Альгазенъ и Альвинди, вмѣстѣ съ Птоломеемъ, принадлежатъ къ ученымъ наиболѣе свѣдущимъ въ перспективѣ; трудамъ Альгазена онъ придаетъ особенное значеніе.

********) *Narducci*, Intorno ad una traduzione italiana fatta nel secolo decimoquarto del trattato d'ottica d'Alhazen, matematico del secolo undecimo ed ad altri lavori di questo

поименованныхъ сочиненій хранятся въ Лейденской библіотекѣ. Въ Ватиканской библіотекѣ хранится также рукопись сочиненія Гассана-бенъ-Гайтема „О квадратурѣ круга“, но это сочиненіе до сихъ поръ не издано и не было предметомъ изслѣдованій ученыхъ. Кромѣ того извѣстны еще четыре рукописи сочиненій астрономическаго содержанія.

Весьма жаль, что нѣтъ болѣе подробныхъ указаній на утерянныя сочиненія Альгазена; заглавія ихъ показываютъ, что авторъ занимался весьма разнообразными и интересными вопросами. Особенное вниманіе имъ было обращено на изслѣдованіе основныхъ геометрическихъ понятій, что видно по дошедшему до насъ сочиненію, въ которомъ онъ комментируетъ „Начала“ Евклида. Нѣсколько сочиненій Гассанъ-бенъ-Гайтемъ написалъ по Геометріи; сочиненія эти заключали извлеченія изъ „Началъ“ Евклида. Также были имъ сдѣланы извлеченія изъ „Коническихъ сѣченій“ Аполлонія и изъ „Альмагеста“ Птоломея. На основаніи заглавія одного сочиненія, написаннаго Альгазеномъ, Вепке полагаетъ, что онъ также занимался геометрическимъ построеніемъ уравненій третьей степени. Въ заглавіяхъ нѣкоторыхъ другихъ сочиненій сказано, что ариѳметическія вопросы авторъ рѣшаетъ алгебраическимъ путемъ. Другія изъ сочиненій относятся къ индусскому счисленію, къ производству различныхъ вычисленій, къ свойствамъ параболы, гиперболы и эллипса, къ трисекціи угла, къ гармоническимъ числомъ, къ правилу двухъ ложныхъ положеній, къ измѣренію круга, къ свойствамъ круговъ, къ построенію семиугольника, вписаннаго въ кругъ; въ одномъ изъ своихъ сочиненій Гассанъ-бенъ-Гайтемъ доказываетъ, что между всѣми изопериметрическими тѣлами, шаръ есть наибольшее, а также между всѣми изопериметрическими плоскими фигурами—кругъ есть также наибольшая. Къ сожалѣнію сочиненіе это также пропало безслѣдно *). Также написалъ Гассанъ-бенъ-Гайтемъ „Введеніе въ Геометрію“, сочиненія: объ атомѣ, объ пространствѣ, о построеніи сферическихъ зеркалъ, объ устройствѣ вселенной, о свѣтѣ звѣздъ, о построеніи водяныхъ часовъ, о лунѣ, объ радугѣ и кругахъ около солнца, о коническомъ циркулѣ, трактатъ о политикѣ и множество другихъ **). Кромѣ того есть указанія на алгебраическое сочиненіе Гассанъ-бенъ-Гайтема, предметъ котораго относился къ вопросамъ, находящимся въ „Ариѳметикахъ“ Діофанта. На сочиненіе это были написаны схоліи египетскимъ врачемъ Исгакъ-бенъ-Юнисомъ.

---

scienziato, помѣщено въ Bulletino di Storia et di Bibliografia pubblicato da B. Boncompagni. T. IV, 1871, pag. 1—48.

*) Весьма интересно было-бы знать содержаніе недошедшаго до насъ сочиненія Гассанъ-бенъ-Гайтема, заглавіе котораго „О геометрическихъ задачахъ, необходимыхъ при религіозныхъ обрядахъ“.

**) См. *F. Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 73—76.

Альгазенъ принадлежитъ къ самымъ виднымъ представителямъ каирской школы, въ которой въ XI в. особенно славились астрономы. Во время Гассанъ-бенъ-Гайтема въ Каиро существовала громадная библіотека, въ которой хранилось болѣе 6000 рукописей математическаго содержанія.

Омаръ Алкгаіями. Къ числу самыхъ замѣчательныхъ арабскихъ математиковъ принадлежитъ *Абулъ-Фатъ Омаръ-бенъ-Ибрагимъ Алкгаіями* *), жившій во второй половинѣ XI-го вѣка. Съ его именемъ тѣсно связанъ вопросъ объ геометрическомъ построеніи уравненій третьей степени, а потому мы познакомимся болѣе подробно съ его трудами и съ методами его изслѣдованій.

Свѣдѣній о жизни и ученой дѣятельности Алкгаіями существуетъ не много **), неизвѣстно даже когда онъ родился и когда умеръ. Онъ былъ родомъ изъ персидскаго города Нишапура. Алкгаіями занималъ видное мѣсто между астрономами султана Маликъ-Шаха и принималъ дѣятельное участіе въ исправленіи календаря, произведенномъ по повелѣнію этого султана въ 1079 г. ***). Также неизвѣстно съ достовѣрностью точно имя Алкгаіями, такъ какъ въ рукописяхъ его сочиненій безразлично пишутъ **Alkhyyâmî** и **Alkhayyâm**. Послѣднее названіе на арабскомъ языкѣ значитъ „дѣлатель палатокъ"; весьма вѣроятно, что этимъ ремесломъ занимался отецъ математика. Первоначальное воспитаніе Алкгаіями получилъ совмѣстно съ двумя другими молодыми людьми, которые впослѣдствіи занимали видныя мѣста и пользовались большою извѣстностью ****). Не смотря на всѣ предложенія одного изъ этихъ сотоварищей, бывшаго великимъ визиромъ, Алкгаіями постоянно отказывался отъ предлагаемыхъ ему должностей, предпочитая заниматься науками и писаніемъ сочиненій. Алкгаіями былъ

---

*) Имя *Алкгаіями* мы писали также *Омаръ-аль-Гайами*. Полное имя его Ghiyâth Eddin Aboûl Fath Omar Ben Ibrâhîm Alkhayyâmî.

**) Годы рожденія и смерти Алкгаіями неизвѣстны. Свѣдѣнія о жизни Алкгаіями можно найти въ статьѣ Reinaud, помѣщенной въ „Notices et extraits des Manuscrits" T. IX, pag. 143—145.

***) См. *R. Wolf*, Geschichte der Astronomie. München. 1877. in-8 pag. 331. Алкгаіями Вольфъ неправильно называетъ *Omar-Cheïam*.

****) Въ молодости Алкгаіями воспитывался съ Низамомъ Алмулкомъ (*Nishâm Almoulq*) и Гасаномъ-ибнъ-Сабба (*Haçan ibn Sabbah*), первый изъ нихъ впослѣдствіи занималъ мѣсто великаго визира при Сельджукскихъ султанахъ Алпъ-Арсланѣ и Маликъ-Шахѣ (1073—1097 гг.), а второй основалъ около 1090 г., знаменитый орденъ *потребителей гашиша—haschischin*. Члены этого ордена подъ вліяніемъ принимаемаго гашиша производили самыя ужасныя звѣрства по повелѣнію своего предводителя. Впослѣдствіи названіе ордена *haschischin* сдѣлалось синонимомъ убійства и перешло на Западъ въ видѣ слова *assassin*, что на французскомъ языкѣ значитъ *убійца*.

не только математикъ, а занимался также поэзіей. Стихи свои онъ писалъ на персидскомъ языкѣ. По словамъ одного арабскаго писателя, стихотворенія Алкгаиями „изобличали въ немъ человѣка безбожнаго и распутнаго". Отдавая полную справедливость его обширной учености, его глубокимъ познаніямъ въ астрономіи и философіи, онъ отзывается объ немъ, какъ объ интриганѣ и человѣкѣ двуличномъ. Весьма можетъ быть, что подобное мнѣніе объ Алкгаіями, несправедливо и распространялось его врагами. Позднѣйшіе писатели, какъ напримѣръ Ибнъ-Халдунъ, отзываются объ немъ, какъ о величайшемъ геометрѣ всего Востока, а Хаджи-Хальфа въ своемъ біографическомъ трудѣ *), приводитъ цѣлый отрывокъ изъ сочиненія Алкгаиями.

Алкгаиями авторъ нѣсколькихъ сочиненій, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстно сочиненіе алгебраическаго содержанія, въ которомъ даны методы геометрическаго построенія уравненій третьей степени. Сочиненіе это въ рукописи озаглавлено: „Мемуаръ Омара Алкгаиями объ алгебраическихъ доказательствахъ". Первыя указанія на это замѣчательное сочиненіе находятся въ трудѣ Меермана **), который говоря объ изслѣдованіяхъ арабскихъ ученыхъ въ математическихъ наукахъ, упоминаетъ арабскую рукопись сочиненія Алкгаиями, завѣщанную Варнеромъ Лейденской библіотекѣ. Меерманъ ошибочно предполагаетъ, что въ рукописи этой заключается алгебраическое рѣшеніе уравненій третьей степени. Вслѣдствіи неправильный взглядъ Меермана раздѣляли также извѣстный Монтукла***) и Гартцъ****). Въ тридцатыхъ годахъ настоящаго столѣтія Седильо отыскалъ въ Парижской Національной библіотекѣ отрывокъ сочиненія Алкгаиями, который онъ вскорѣ издалъ *****). Сочиненіемъ Алкгаиями также интересовался извѣстный

---

*) *Хаджи Хальфа* турецкій ученый, жившій въ XVII вѣкѣ (1600—1658 гг), былъ секретаремъ при султанѣ Амуратѣ IV. Онъ авторъ многихъ сочиненій по исторіи, изъ которыхъ наиболѣе извѣстенъ обширный энциклопедическій и біографическій лексиконъ, изданный Флюгелемъ подъ заглавіемъ Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum a Mustafa ben Abdallah, Katib Jelebi dicto et nomine Haji Khalfa celebrato compositum. T. I—VII. Leipzig. 1835—58.

**) *Gérard Meerman*, Specimen calculis fluxionalis. Leiden. 1742. pag. X.

***) *Montucla*, Histoire des Mathematiques Paris. 1758 in-4. T. I. pag. 368—369

****) *Gartz*, De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis Halae, 1823, in-4. pag. 14.

*****) *Sédillot*, Matériaux pour servir a l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux. Paris. T. I, 1845. pag. 367—376. Отрывокъ этотъ былъ напечатанъ раньше въ Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale T. XIII. 1838, pag 130—136. О нахожденіи этого отрывка Седильо заявилъ въ Nouveau Journal Asiatique, Mai, 1834.

Либри, предполагавшій его издать *) но намѣреніе это привелъ въ исполненіи только Вепке **). Арабскій текстъ сочиненія Алкгаіями Вепке перевелъ и дополнилъ комментаріями и отрывками изъ рукописей другихъ арабскихъ сочиненій, относящихся къ тому же предмету. При своемъ изданіи Вепке пользовался отрывкомъ рукописи сочиненія Алкгаіями, найденнымъ Седильо, другимъ полнымъ экземпляромъ этого сочиненія, найденнымъ Либри, также въ Парижской Національной библіотекѣ, и наконецъ полнымъ экземпляромъ, принадлежащимъ Лейденской библіотекѣ. Послѣдняя рукопись есть копія съ арабскаго оригинала, привезеннаго Голіусомъ съ Востока ***). Мы упомянули о различныхъ рукописяхъ сочиненія Алкгаіями, чтобы показать, что оно было весьма распространено между арабскими математиками, иначе оно не могло-бы дойти въ Европу въ трехъ различныхъ спискахъ.

Кромѣ приведеннаго сочиненія Алкгаіями написалъ еще сочиненіе, въ которомъ объясняетъ затрудненія, представляемыя опредѣленіями, помѣщенными въ началѣ „Началъ" Евклида ****). Въ своемъ алгебраическомъ трактатѣ Алкгаіями упоминаетъ сочиненіе, которое онъ написалъ объ извлеченіи корней высшихъ степеней, но трудъ этотъ до насъ не дошелъ. Свой переводъ алгебраическаго трактата Алкгаіями Вепке озаглавилъ „Ал-

---

*) *G. Libri,* Histoire des sciences mathématiques en Italie. Paris. 1838. T. I. pag. 300—303.

**) Первыя указанія на содержаніе сочиненія Алкгаіями далъ Вепке въ статьѣ: *Woepcke,* Notice sur un manuscrit Arabe d'un traité d'algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahim Alkhayâmi, contenant la construction géométrique des équations cubiques. Помѣщено въ Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. XL. 1850. pag. 160—172. Вскорѣ послѣ того онъ издалъ самую рукопись подъ заглавіемъ: *Woepcke,* L'Algèbre d'Omar Alkhayyamî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits. Paris. 1851. in-8.

***) *Голіусъ* (Jacques Golius) знаменитый оріенталистъ, родился въ 1596 г. въ Гаагѣ, умеръ въ 1667 г. Первоначально онъ былъ профессоромъ арабскаго языка въ Лейденѣ, а впослѣдствіи преподавалъ также математическія науки. Въ 1625 г. онъ предпринялъ путешествіе на Востокъ съ цѣлью собрать различныя рукописи; въ 1629 г. онъ возвратился. Съ многихъ рукописей сняты были имъ только копіи, такъ какъ владѣльцы не хотѣли ихъ продать; такія рукописи по снятіи точныхъ копій онъ отсылалъ владѣльцамъ на Востокъ. Къ числу такихъ рукописей принадлежитъ и рукопись сочиненія Алкгаіями, принадлежащая Лейденской библіотекѣ. Рукопись эта есть копія, снятая въ Амстердамѣ, вѣроятно какимъ нибудь арабомъ. Изъ многочисленныхъ сочиненій Голіуса наиболѣе извѣстны слѣдующія: „Lexicon arabico-latinum, Lugd. Bat. 1653. in-fol.", „Alfergani elementa astronomica. Amstelod. 1669, in 4°.

****) Рукопись, содержащая это сочиненіе принадлежитъ Лейденской библіотекѣ; къ сожалѣнію это интересное сочиненіе до настоящаго времени неиздано

гебра". Не смотря на все значеніе этого сочиненія въ исторіи развитія вопроса объ геометрическомъ построеніи уравненій, на него было обращено мало вниманія *). Въ сочиненіи арабскаго математика мы, впервые, находимъ систематическую теорію уравненій третьей степени.

Прежде чѣмъ мы перейдемъ къ дальнѣйшему разсмотрѣнію математическихъ сочиненій написанныхъ арабами, мы считаемъ необходимымъ сказать нѣсколько словъ объ геометрическомъ построеніи корней алгебраическихъ уравненій.

Аналитическому методу рѣшенія уравненій предшествовалъ геометрическій, заключающійся въ построеніи корней при помощи пересѣченія прямыхъ линій, или прямой и круга, или же коническихъ сѣченій и вообще кривыхъ высшаго порядка. Мы уже выше видѣли, какъ въ сочиненіяхъ древнихъ греческихъ геометровъ, а еще раньше у китайцевъ, рѣшались геометрически вопросы, зависящіе отъ уравненій второй степени. Самымъ лучшимъ подтвержденіемъ этому можетъ служить II-я и VI-я книги „Началъ" и „Данныя" Евклида. При рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, которые мы въ настоящее время рѣшаемъ при посредствѣ уравненій, т. е. алгебраически, греческіе геометры пользовались методомъ геометрическихъ построеній. Они разсматривали поверхности, линіи и углы дѣйствительно существующіе, мы же ограничиваемся только размѣрами этихъ послѣднихъ, значенія которыхъ выражаются буквами. Подобнымъ же образомъ они рѣшали также вопросы, которые сводятся на рѣшеніе уравненій третьей и высшихъ степеней, но это удавалось имъ весьма рѣдко и было сопряжено съ большими трудностями. Напротивъ, вопросы, зависящіе отъ рѣшенія уравненій второй степени, древніе рѣшали съ замѣчательнымъ умѣніемъ, и въ настоящее время насъ нерѣдко поражаетъ и удивляетъ умѣніе и остроуміе съ которымъ они приступали къ рѣшенію извѣстнаго геометрическаго вопроса построеніемъ. Десятая книга „Началъ" Евклида, сочиненія Аполлонія, Архимеда и другихъ, могутъ служить лучшимъ примѣромъ необыкновенной тонкости изслѣдованій древнихъ греческихъ геометровъ. Геометрическій методъ, которымъ пользовались съ такимъ успѣхомъ древніе, имѣетъ то несомнѣнное преимущество и превосходство передъ другими методами,

*) Замѣчательныя изслѣдованія Алкаяями до настоящаго времени мало извѣстны, такъ напр. Сутеръ, авторъ „Исторіи математики", упоминаетъ объ немъ только, какъ объ астрономѣ, называя его Омаръ Хеямъ (*Omar Cheyam*) и причисляетъ его къ персидскимъ ученымъ. Также, повидимому, совершенно неизвѣстна Сутеру „Алгебра" Алкаяями, изданная Вепке, такъ какъ объ этомъ сочиненіи онъ говоритъ, какъ объ неизданномъ до сихъ поръ (см. *Suter*, Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. 2 Aufl., I Theil. Zürich. 1873. pag. 138—139).

что въ немъ происхожденіе и внутренняя связь между величинами остается во все время изслѣдованія на глазахъ изслѣдователя. Всякое измѣненіе величинъ всегда доступно изслѣдователю, и всякое преобразованіе онъ можетъ прослѣдить отъ непосредственно предшествующаго, методъ же новѣйшихъ математиковъ—алгебраическій, подобнаго преимущества не имѣетъ, здѣсь все производиться вычисленіемъ, результатъ получается изъ уравненія и весьма часто полученное рѣшеніе остается не вполнѣ понятымъ и является для насъ въ видѣ формулы, полученной рядомъ алгебраическихъ преобразованій.

Діофантъ былъ первый, на сколько извѣстно, положившій первыя основы синтетическому алгебраическому рѣшенію уравненій. Впослѣдствіи методу этому стали также слѣдовать индусскіе математики. Историческое развитіе метода Діофанта совершенно неизвѣстно, но во всякомъ случаѣ онъ не могъ появиться сразу въ томъ видѣ, въ какомъ онъ встрѣчается въ „Ариѳметикахъ". По мнѣнію Коссали *) методъ этотъ выработался постепенно, въ промежутокъ времени отдѣляющій Евклида отъ Діофанта. Такое мнѣніе заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ извѣстно, что еще ранѣе Діофанта, Тимаридъ предложилъ пріемъ для рѣшенія уравненій, извѣстный подъ именемъ *эпантемы* **). Къ сожалѣнію о трудахъ Тимарида мы ничего не знаемъ, равно какъ и о самомъ Тимаридѣ. Другія указанія находятся въ арабскихъ сочиненіяхъ, въ которыхъ говориться, что Гиппархъ написалъ сочиненіе алгебраическаго содержанія, но отъ этого сочиненія неосталось никакихъ слѣдовъ ***). Замѣчательное сочиненіе Діофанта было также почти забыто, такъ какъ методы въ немъ изложенные были совершенно чужди геометрическимъ представленіямъ и казались слишкомъ абстрактными для ума привыкшаго все уяснять себѣ на чертежахъ. Только шагъ за шагомъ, въ теченіи длиннаго промежутка времени, Алгебра стала наукой самостоятельной, независящей отъ геометрическихъ поясненій и толкованій; это видно изъ того, что по справедливому замѣчанію Маттисена, еще до сихъ поръ сохранились въ Алгебрѣ нѣкоторые термины, указывающіе на геометрическое происхожденіе, какъ напримѣръ термины *квадратъ* и *кубъ* въ примѣненіи ко второй и третьей степени неизвѣстной x. Подобныя же воззрѣнія на алгебраическія выраженія существовали также у араб-

*) *Cossali*, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra, Vol. I. pag. 87—91.

**) Объ эпантемѣ мы говорили выше, см. стр. 135—136, 405.

***) Объ ариѳметическихъ трудахъ Гиппарха упоминаетъ также Плутархъ, который говоритъ. Χρύσιππον δὲ πάντες ἐλέγχουσιν οἱ ἀριθμητικοί, ὧν καὶ Ἵππαρχός ἐστι. (См. Opp. omnia. Paris. 1624. fol., T. II, p. 1047; cf. p. 732.

скихъ математиковъ, которымъ было извѣстно построеніе корней квадратныхъ и кубическихъ уравненій, но дальше этихъ уравненій они, за исключеніемъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ случаевъ, не пошли. Построить корень уравненія четвертой степени казалось для нихъ невозможнымъ, такъ какъ четвертая степень не принадлежитъ къ понятіямъ, которыя можно выразить геометрически. Знакомство съ сочиненіями Діофанта и индусскихъ математиковъ прошло почти безслѣдно у арабовъ, не смотря на то, что въ этихъ сочиненіяхъ находится нѣсколько отдѣльныхъ примѣровъ рѣшеній уравненій третьей и четвертой степеней, чисто алгебраическимъ путемъ. Общій методъ алгебраическаго рѣшенія уравненій былъ найденъ только въ XVI столѣтіи италіанскими математиками, которые находясь подъ вліяніемъ знакомства съ математическими изслѣдованіями арабовъ, рѣшали уравненія алгебраически, но слѣдуя синтетически-геометрическому пути.

Разсмотримъ теперь въ послѣдовательномъ порядкѣ геометрическое построеніе корней уравненій первой, второй и третьей степеней, а также укажемъ отдѣльные случаи построенія корней уравненій четвертой степени. Начнемъ съ уравненій первой степени.

Геометрическое построеніе корней уравненій первой степени не встрѣчается явно*) въ сочиненіяхъ древнихъ грековъ, но нѣкоторыя изъ предложеній I-й и VI-й книгъ „Началъ“ Евклида заключаютъ въ неявной формѣ это рѣшеніе**). На сколько извѣстно такое построеніе впервые начали производить арабскіе математики, но кѣмъ оно было найдено неизвѣстно. Построеніе это встрѣчается въ сочиненіяхъ Аврама-бенъ-Езры (1130 г.)***), Ибнъ-Албанна (1222 г.), Алкалзади (1486 г.) и Бега-Еддина (1557 г.), подъ названіемъ правила *ложнаго положенія — regula falsi*, а также подъ именемъ метода *чашекъ вѣсовъ* ****). Способъ этотъ основанъ на слѣдующихъ началахъ:

*) Указанія на геометрическіе методы древнихъ греческихъ геометровъ можно найти въ интересной статьѣ: *August*, Zur Kenntniss der geometrischen Methode der Alten. Berlin. 1829. in-4.

**) См. „Начала“ Евклида, пред. 44 и 45, кн. I; пред. 12, кн. VI.

***) См. *Libri*, Histoire des sciences mathématiques. T. I. pag. 304—372. На этихъ страницахъ помѣщенъ рукопись извѣстнаго сочиненія Аврама-бенъ-Езры заглавіе которой: Liber augmenti et diminutionis vocatus est. Объ этомъ сочиненіи мы уже упоминали выше (см. стр. 472).

****) Способъ чашекъ вѣсовъ былъ также извѣстенъ у арабскихъ математиковъ подъ названіемъ „правила увеличенія и уменьшенія“. Подъ такимъ названіемъ онъ встрѣчается также въ извѣстной рукописи Аврама-бенъ-Езры, которую издалъ Либри. Въ Средніе Вѣка способъ чашекъ вѣсовъ былъ извѣстенъ подъ названіемъ: *regula duorum falsorum*; италіанскіе математики называли этотъ способъ *regula el chataym* или *chata ym*, или *el kataym*. Терминъ этотъ производятъ отъ арабскаго слова *al hataan*, которое есть двойственное число слова *al hata*, т. е. *погрѣшность*. Были также предлагаемы другія объясненія этого термина.

Пусть требуется рѣшить уравненіе вида $f(x) = ax + b = 0$, подставимъ въ это уравненіе два произвольныхъ значенія z_1 и z_2 вмѣсто x, тогда получимъ для $f(x)$ два значенія отличныхъ отъ нуля. Выраженіе $az_1 + b = \varphi_1$ и $az_2 + b = \varphi_2$ называются *погрѣшностями уравненія*. Итакъ мы имѣемъ систему уравненій:

$$f(x) = ax + b = 0$$

$$f(z_1) = az_1 + b = \varphi_1$$

$$f(z_2) = az_2 + b = \varphi_2$$

вычитая изъ даннаго уравненія обѣ погрѣшности, находимъ

$$a(x - z_1) = -\varphi_1$$

$$a(x - z_2) = -\varphi_2$$

откуда:

$$a = \frac{\varphi_1}{z_1 - x} = \frac{\varphi_2}{z_2 - x}$$

или:

$$\frac{x - z_1}{x - z_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

Отступленія $x - z_1$ и $x - z_2$, произвольно выбранныхъ значеній z_1 и z_2, отъ корня называются *погрѣшностями подстановокъ*. Полученное уравненіе показываетъ, что отношеніе погрѣшностей подстановокъ равно отношенію погрѣшностей уравненія. Изъ выше написанной пропорціи слѣдуетъ, что.

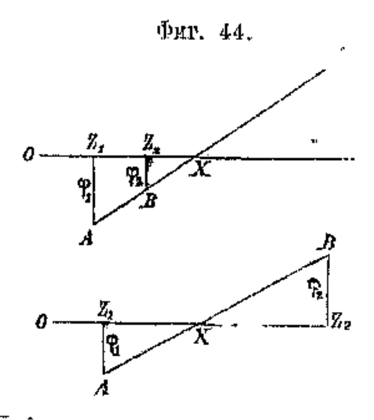
$$\varphi_1(z_2 - x) = \varphi_2(z_1 - x)$$

откуда:

$$x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Приведенное объясненіе дано Маттисеномъ *). Методъ этотъ, какъ видно

Фиг. 44.



*) L. Matthiessen, Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878. u.-8. pag. 281—282.

изъ вышенаписанныхъ выраженій, основанъ на опредѣленіи неизвѣстной величины въ уравненіи, при помощи геометрической пропорціи. Выраженіе неизвѣстнаго можетъ быть найдено изъ слѣдующихъ геометрическихъ соображеній: если линія $OX = x$, $OZ_1 = z_1$, $OZ_2 = z_2$, а $AZ_1 = \varphi_1$, $BZ_2 = \varphi_2$, то очевидно изъ подобныхъ треугольниковъ XZ_1A и XZ_2B (фиг. 44) слѣдуетъ, что:

$$Z_1A : OZ_1 - OX = Z_2B : OZ_2 - OX$$

или,

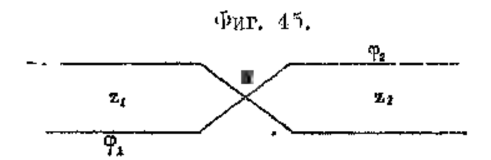
$$\frac{\varphi_1}{z_1 - x} = \frac{\varphi_2}{z_2 - x}$$

откуда очевидно:

$$x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Методъ этотъ встрѣчается въ сочиненіяхъ арабскихъ математиковъ въ видѣ эмпирическаго правила, безъ всякихъ доказательствъ. Названіе „пріема чашекъ вѣсовъ“, методъ это получилъ вѣроятно отъ схемы, при посредствѣ которой производили вычисленіе для нахожденія неизвѣстной величины. Схема эта состоитъ въ слѣдующемъ (фиг. 45) рисункѣ

Фиг. 45.



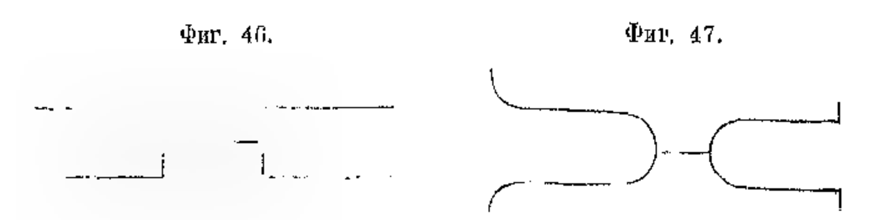
въ которомъ, написанныя буквы z_1, z_2, b, φ_1 и φ_2 соотвѣтствуютъ буквамъ выраженія:

$$x = \frac{z_2\varphi_1 - z_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Методъ ложнаго положенія былъ выраженъ Ибнъ-Албанной въ видѣ слѣдующаго правила, которое находиться въ его сочиненіи „Талькисъ“ *). Онъ говоритъ: „Методъ чашекъ вѣсовъ геометрическій, онъ состоитъ въ слѣдующемъ: ты берешь вѣсы слѣдующей формы (фиг. 45, и кладешь извѣстную и данную величину надъ точкой опоры (b); на одну изъ чашекъ кладешь произвольное число, прибавляешь къ нему остальное, что дано тебѣ прибавить, вычесть или иное; полученный результатъ сравни съ тѣмъ, что находиться надъ точкой опоры. Если ты попалъ правильно, то чашка вѣсовъ дастъ извѣстную величину. Если же ты не попалъ, то замѣть погрѣш-

*) Le *Talkhys* d'Ibn Albannâ publ. et trad. par *Aristide Marre*, Rome, 1865 in-4 pag. 26—27.

ность надъ чашкой, если результатъ слишкомъ великъ, и подъ чашкой если результатъ слишкомъ малъ. Затѣмъ положи на другую чашку другое произвольно выбранное число и поступай подобнымъ образомъ, какъ выше. Послѣ этого умножь погрѣшность каждой изъ чашекъ на число положенное на другую чашку. Если обѣ погрѣшности положительны, или обѣ отрицательны, то вычитай меньшую изъ большей, а также меньшее произведение изъ большаго и раздѣли разность произведеній на разность погрѣшностей. Если же одна погрѣшность положительна, а другая отрицательна, то раздѣли сумму произведеній на сумму погрѣшностей". Кромѣ того Ибнъ-Албанна вводитъ еще нѣкоторыя измѣненія въ приведенное правило. Въ сочиненіяхъ позднѣйшихъ арабскихъ математиковъ выше приведенная схема встрѣчается въ иномъ видѣ; такъ напр. въ комментаріяхъ Алкалзади *) она представляется въ видѣ нижеслѣдующихъ фигуръ (фиг. 46 и 47):



Фиг. 46. Фиг. 47.

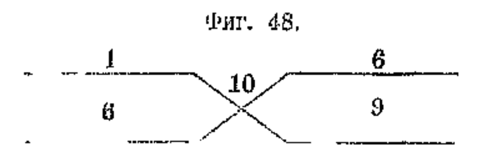
Методъ арабскихъ математиковъ мы поясним на нѣсколькихъ примѣрахъ, заимствованныхъ изъ арабскихъ сочиненій.

Примѣръ 1. Найти число, которое будучи увеличено на двѣ трети самаго себя и на единицу, равнялось бы десяти? Вопросъ этотъ сводиться на рѣшеніе уравненія:

$$x + \frac{1}{3}x + 1 = 10$$

Задачу эту Бега-Еддинъ **) рѣшаетъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 48):

Фиг. 48.



Первая—правая чашка 9, $9 + \frac{2}{3}9 + 1 = 10 + 6$

первая погрѣшность $+6$

*) *Woepcke*, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. Paris. 1863. pag. 178.

**) *Nesselmann*, Beha-Eddin's Essenz der Rechenkunst. Berlin. 1843. in-8, pag. 26.

Вторая—лѣвая чашка 6, $6+\frac{2}{3}6+1=10+1$

вторая погрѣшность $+1$

Слѣдовательно по правилу:

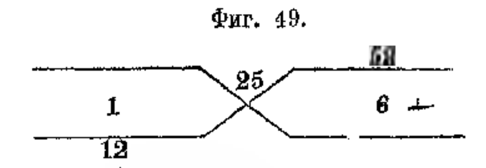
$$x=\frac{6\times6-1\times9}{6-1}=5\frac{2}{5}$$

Примѣръ 2. Найти число, которое будучи взято семь разъ и сложено съ шесть разъ взятымъ этимъ числомъ, равнялось бы 25? Задача эта сводиться на рѣшеніе уравненія:

$$6x+7x=25$$

Вотъ какъ рѣшаетъ этотъ вопросъ Алкалзади въ своихъ комментаріяхъ*) на „Талкгисъ" Ибнъ-Албанны (фиг. 49):

Фиг. 49.



Первая чашка 6, $6\times6+6\times7=25+53$

первая погрѣшность $+53$

Вторая чашка 1, $1\times6+1\times7=25-12$

вторая погрѣшность -12

а потому по правилу:

$$x=\frac{53\times1+12\times6}{53+12}=1\frac{12}{13}$$

Примѣръ 3. Найти число, коего треть и четверть равны 21? Вопросъ этотъ состоитъ въ рѣшеніи уравненія:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=21$$

Вопросъ этотъ рѣшенъ въ „Ариѳметикѣ" Алкалзади **) слѣдующимъ образомъ (фиг. 50):

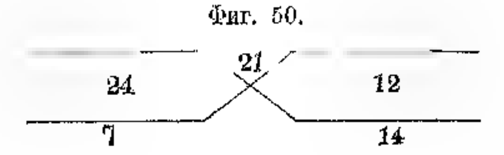
---

*) Le *Talkhys* d'Ibn Albanâ, pag. 27.

**) *Woepcke*, Recherches sur plusieur ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par le prince B. Boncompagni ect. II. Traduction du Traité d'arithmétique d'Aboul Haçan Alî Ben Mohammed Alkalçadî. Rome. 1859, in-4, pag. 50.

Первая чашка 12, результатъ 21 —14; первая погрѣшность—14
Вторая чашка 24, результатъ 21 — 7; вторая погрѣшность — 7

Фиг. 50.

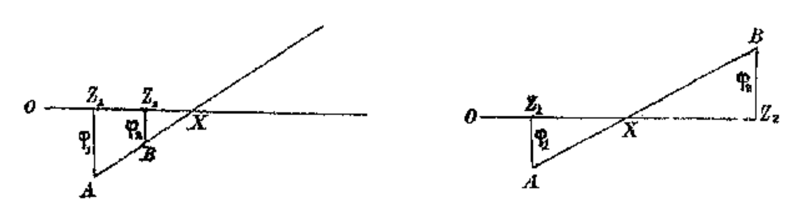


Слѣдовательно по правилу:

$$x = \frac{14 \times 24 - 7 \times 12}{14 - 7} = 36.$$

Геометрическое построеніе корней уравненія первой степени въ пріемѣ чашекъ вѣсовъ заключается въ слѣдующемъ: на произвольной прямой OX, неопредѣленной длины, отъ произвольной точки O (фиг. 51) откладываютъ

Фиг. 51.



сначала первое, а потомъ второе изъ принятыхъ значеній неизвѣстнаго, т. е. z_1 и z_2. Изъ концевъ Z_1 и Z_2, прямыхъ OZ_1 и OZ_2, возставляютъ перпендикуляры къ прямой OX вверхъ, если погрѣшности φ_1 и φ_2 положительны, и внизъ если онѣ отрицательны. На этихъ перпендикулярахъ откладываютъ величины погрѣшностей, напримѣръ до точекъ A и B. Затѣмъ соединяютъ точки A и B прямою AB. Прямыя AB и OX пересѣкутся въ точкѣ X; величина разстоянія точки O отъ точки X выразитъ собою корень уравненія первой степени.

Перейдемъ теперь къ геометрическому построенію корней уравненій второй, третьей и отдѣльныхъ случаевъ уравненій четвертой степени. Построенія эти находятся въ алгебраическомъ трактатѣ Алкганями съ содержаніемъ котораго мы теперь познакомимся болѣе подробно и обратимъ особенное вниманіе на примѣняемые имъ методы построенія уравненій.

По своему содержанію сочиненіе Алкганями естественно распадается на слѣдующіе пять отдѣловъ: 1) введеніе, опредѣленіе основныхъ началъ Алгебры, и наконецъ перечисленіе уравненій, которыя предполагаетъ разсмотрѣть авторъ; 2) рѣшеніе уравненій первыхъ двухъ степеней; 3) построеніе уравненій третьей степени; 4) изслѣдованіе уравненій съ дробными чле-

нами, въ которыхъ знаменатели суть степени неизвѣстнаго; и 5) дополнительныя замѣчанія.

Въ началѣ своего сочиненія Алкгаиями послѣ обыкновенныхъ славословій и обращеній къ Богу, прямо приступаетъ къ опредѣленію предмета Алгебры. Онъ говоритъ: „Одна изъ математическихъ теорій, которая прилагается въ отдѣлѣ философскихъ наукъ, извѣстныхъ подъ именемъ математика, есть искусство Алгебры, цѣль которой опредѣленіе неизвѣстныхъ, какъ численныхъ, такъ и геометрическихъ. Въ наукѣ этой встрѣчаются вопросы, зависящіе отъ нѣкоторыхъ весьма трудныхъ основныхъ предложеній, рѣшеніе которыхъ неудавалось большей части ученыхъ, занимавшихся этимъ предметомъ. Что же касается древнихъ, то до насъ не дошли сочиненія, въ которыхъ разбираются подобнаго рода вопросы; весьма можетъ быть, что они искали рѣшеніе и занимались этимъ вопросомъ, но преодолѣть трудностей не съумѣли; или же, ихъ изслѣдованія не требовали разсмотрѣнія подобныхъ вопросовъ; или же наконецъ, сочиненія ихъ по этому предмету не были переведены на нашъ языкъ. Что же касается новѣйшихъ математиковъ, то Алмагани принадлежитъ первому мысль алгебраическаго рѣшенія вспомогательнаго предложенія, употребленнаго Архимедомъ въ четвертомъ предложеніи, второй книги его сочиненія „О шарѣ и цилиндрѣ“; онъ былъ приведенъ къ уравненію, содержащему кубы, квадраты и числа, которое ему неудалось рѣшить, не смотря на то, что этому вопросу онъ посвятилъ много времени. Въ виду этого заявили, что рѣшеніе это невозможно, пока не было дано рѣшенія Абулъ Джафаромъ Алгозейномъ, рѣшившимъ уравненіе при помощи коническихъ сѣченій. Послѣ него всѣ геометры нуждались въ различныхъ родахъ подобныхъ предложеній; нѣкоторыя изъ этихъ предложеній были рѣшены одними учеными, другія—другими. Но никто изъ нихъ ничего не говорилъ объ перечисленіи всѣхъ этихъ родовъ, ни о различныхъ частныхъ случаяхъ этихъ родовъ, ни о ихъ доказательствѣ; они коснулись только двухъ родовъ, на которые я обращу также вниманіе. Я же, напротивъ, стремился всегда съ точностью указать на всѣ эти роды, а также показать на различіе въ различныхъ случаяхъ этихъ родовъ, когда они возможны и когда невозможны, при чемъ я основываюсь на доказательствахъ“.

Далѣе Алкгаиями продолжаетъ: „Алгебра есть наука. Предметъ ея есть абсолютное число и измѣримыя (геометрически) величины, которыя будучи неизвѣстны, но выражены чрезъ величину извѣстную, могутъ быть вычислены. Извѣстная величина есть величина или опредѣленное отношеніе, что видно при внимательномъ ихъ разсмотрѣніи. Въ этой наукѣ ищутъ соотношенія, существующія между данными величинами и величинами, составляющими предметъ Алгебры, о которыхъ мы говорили выше. Превосход-

ство этого искусства заключается въ знаніи математическихъ методовъ, при помощи которыхъ возможно производить вышеупомянутое опредѣленіе неизвѣстныхъ, какъ численныхъ, такъ и геометрическихъ".

„Подъ именемъ измѣримыхъ величинъ я понимаю непрерывныя величины, которыхъ существуетъ четыре рода: линія, поверхность, тѣло и время, какъ это изложено въ категоріяхъ, а еще болѣе обстоятельно въ метафизикѣ *). Неизвѣстную величину, которую желаютъ опредѣлить, алгебраисты обыкновенно называютъ *вещь*, ея произведеніе само на себя—*квадратъ*, ея произведеніе на квадратъ—*кубъ;* произведеніе квадрата на квадратъ —*квадрато-квадратомъ* или *биквадратомъ* и т. д. Изъ „Началъ" Евклида извѣстно, что всѣ эти величины находятся въ непрерывной пропорціи, т. е. что единица такъ относиться къ корню, какъ корень къ квадрату, какъ квадратъ къ кубу; а слѣдовательно: число относиться къ корнямъ, какъ корни къ квадратамъ, какъ квадраты къ кубамъ и т. д.". „Настоящее сочиненіе можетъ быть понято только тѣми, которые основательно знакомы съ „Началами" и „Данными" Евклида, а также съ двумя первыми книгами „Коническихъ сѣченій" Аполлонія. Незнакомые съ этими тремя сочиненіями не поймутъ содержанія моего сочиненія. Мнѣ стоило многихъ трудовъ ограничиться исключительно только ссылками на эти три сочиненія".

„Алгебраическія рѣшенія, какъ извѣстно, производятся только при помощи уравненій, т. е. приравнивая однѣ степени другимъ. Когда алгебраистъ употребляетъ биквадратъ въ вопросахъ, предметъ которыхъ измѣреніе величинъ, то это слѣдуетъ понимать не въ прямомъ, а въ метафорическомъ смыслѣ, такъ какъ было-бы нелѣпо причислить биквадратъ къ числу измѣримыхъ (геометрическихъ) величинъ. Къ числу измѣримыхъ величинъ

---

*) Здѣсь вѣроятно Алхаямми ссылается на сочиненія Аристотеля. Извѣстно, что Аристотель въ своей „Метафизикѣ" и въ сочиненіи „О категоріяхъ" занимался подобными вопросами. Въ „Метафизикѣ" (I, 5, 6) Аристотель приводитъ десять паръ основныхъ понятій, извѣстныхъ подъ названіемъ *пиѳагорейской таблицы категорій*, понятія эти принадлежатъ пиѳагорейской школѣ. Десять паръ основныхъ понятій заключали слѣдующія начала: 1) ограниченное и безграничное; 2) четное и нечетное; 3) единственное и множественное; 4) прямое и кривое; 5) правое и лѣвое, 6) мужеское и женское, 7) покой и движеніе; 8) свѣтлое и темное; 9) доброе и злое; и наконецъ 10) квадратъ и гетеромекія. По мнѣнію, высказанному Ганкелемъ (*Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, pag. 110, Anmerkung), подъ понятіями *квадратъ* и *гетеромекія* слѣдуетъ понимать представленіе о величинахъ раціональныхъ и ирраціональныхъ.

Вообще необходимо замѣтить, что многія изъ своихъ философскихъ опредѣленій и воззрѣній, арабскіе ученые заимствовали прямо изъ сочиненій Аристотеля, съ которыми они были основательно знакомы. Изученію и толкованію этихъ сочиненій они придавали особенное значеніе.

принадлежатъ: во вервыхъ, величины одного измѣреня, т. е. корень, или по отношенію къ квадрату сторона; во вторыхъ, величины двухъ измѣреній, т. е. поверхность; квадратъ принадлежитъ также къ измѣримымъ величинамъ, такъ какъ онъ есть квадратная поверхность. Наконецъ, величины трехъ измѣреній, къ числу ихъ принадлежатъ параллелепипедъ и кубъ, ограниченный шестью четыреугольниками. Такъ какъ другихъ измѣреній не существуетъ, то къ числу измѣримыхъ величинъ не могутъ принадлежать ни биквадратъ, ни высшія степени. Если же говорятъ, что биквадратъ входитъ въ число измѣримыхъ величинъ, то это говориться по отношенію къ его обратному значенію, употребленному въ вопросахъ мѣры *), а не потому чтобы биквадратъ принадлежалъ къ числу величинъ, которыя могутъ быть измѣрены, что составляетъ разницу. Биквадратъ ни внутренне, ни внѣшне, не принадлежитъ къ числу измѣримыхъ величинъ, его нельзя сравнивать, ни съ четнымъ, ни съ нечетнымъ, которыя принадлежатъ къ наружнымъ свойствамъ чиселъ, при посредствѣ которыхъ послѣдовательность измѣримыхъ величинъ представляется непрерывной".

„Все то, что находятъ въ сочиненіяхъ алгебраистовъ, относящагося къ четыремъ геометрическимъ величинамъ, изъ которыхъ составляются уравненія, т. е. абсолютныя числа, стороны, квадраты и кубы, ограничивается тремя уравненіями, содержащими число, стороны и квадраты. Мы же напротивъ хотимъ развить методы, при помощи которыхъ можно опредѣлить неизвѣстную величину изъ уравненія, содержащаго четыре степени, о которыхъ мы выше сказали, что онѣ исключительно принадлежатъ къ измѣримымъ величинамъ, именно: число, вещь, квадратъ и кубъ".

„Методы рѣшеній уравненій, доказательство которыхъ основано на свойствахъ круга, т. е. на предложеніяхъ, заключающихся въ „Началахъ" и „Данныхъ" Евклида, весьма просты. Методы же рѣшеній уравненій, которыя доказываются при помощи свойствъ коническихъ сѣченій, основаны на предложеніяхъ первыхъ двухъ книгъ „Коническихъ сѣченій" Аполлонія. Когда предметъ вопроса есть абсолютное число, то ни мнѣ, ни кому либо другому изъ математиковъ, не удалось найти рѣшеніе подобныхъ уравненій (можетъ быть послѣ насъ, кто другой пополнитъ этотъ пробѣлъ), исключая, когда онѣ содержатъ первыя три степени, именно: числo, вещь и квадратъ. Для этихъ родовъ, доказательство которыхъ основано на сочинени Евклида, я укажу численное доказательство. Также необходимо замѣтить,

*) Какъ примѣръ подобнаго рода вопроса Вепке указываетъ на слѣдующій: пусть, на примѣръ, дѣло идетъ о шарѣ, коего объемъ относиться къ единицѣ объема, какъ данная линія a къ его радіусу; означая чрезъ r радіусъ, очевидно будемъ имѣть $\frac{a}{r^4} = \frac{4\pi}{3}$.

что геометрическое доказательство этихъ методовъ, не исключаетъ и не дѣлаетъ лишнимъ численныхъ доказательствъ, когда предметъ вопроса есть число, а не измѣримая величина. Это видно также у Евклида, который послѣ доказательствъ, данныхъ нѣкоторымъ предложеніямъ, относящимся къ пропорціональности геометрическихъ величинъ, въ пятой книгѣ своего сочиненія, снова даетъ доказательство тѣхъ же предложеній пропорціональности, когда предметъ ихъ есть число, въ седьмой книгѣ".

„Уравненія, которыя существуютъ между этими четырьмя степенями могутъ быть или *простыя*, или *сложныя*. Простыхъ уравненій существуетъ шесть видовъ, именно:

1) $a = x$ 2) $a = x^2$ 3) $a = x^3$

4) $bx = x^2$ 5) $bx = x^3$ 6) $bx^2 = x^3$

Три изъ этихъ видовъ упоминаются въ сочиненіяхъ алгебраистовъ *), именно:

$a = x$, $a = x^2$, $bx = x^2$

Что же касается уравненія $a = x^3$, то сторону куба можно найти только тогда, когда извѣстны кубическія числа,—это для случая, когда вопросъ численный. Если же вопросъ геометрическій, то онъ можетъ быть рѣшенъ только при помощи коническихъ сѣченій". „*Сложныя* уравненія состоятъ изъ *трехчленныхъ* и *четырехчленныхъ*. Трехчленныхъ уравненій существуетъ всего двѣнадцать видовъ:

1) $x^2 + bx = a$ 2) $x^2 + a = bx$ 3) $bx + a = x^2$

Эти три вида уравненій даны въ сочиненіяхъ алгебраистовъ **), при чемъ рѣшены геометрически, но не численно. Слѣдующіе виды трехчленныхъ уравненій суть:

4) $x^3 + cx^2 = bx$ 5) $x^3 + bx = cx^2$ 6) $cx^2 + bx = x^3$

7) $x^3 + bx = a$ 8) $x^3 + a = bx$ 9) $bx + a = x^3$

10) $x^3 + cx^2 = a$ 11) $x^3 + a = cx^2$ 12) $cx^2 + a = x^3$

О послѣднихъ шести видахъ уравненій ничего до сихъ поръ не было говорено въ сочиненіяхъ по Алгебрѣ, кромѣ одного изъ нихъ. Я ихъ разсмотрю всѣ, и докажу ихъ геометрически, а не численно. Доказательство

*) Различные виды этихъ уравненій Алкгайями выражаетъ словами. Онъ говоритъ: число равно корню, число равно квадрату, число равно кубу, корни равны квадрату и т. д.

**) Алкгайями говоритъ: квадратъ и корни равны числу, квадратъ и число равны корнямъ, корни и число равны квадрату и т. д.

послѣднихъ шести видовъ возможно только при помощи свойствъ коническихъ сѣченій".

„Сложныя четырехчленныя уравненія распадаются на два класса: первый, въ которомъ три степени равны одной степени, и второй, въ которомъ двѣ степени равны двумъ степенямъ. Къ нимъ принадлежатъ:

$$1)\ x^3+cx^2+bx=a \quad , \quad 2)\ x^3+cx^2+a=bx$$

$$3)\ x^3+bx+a=cx^2 \quad , \quad 4)\ cx^2+bx+a=x^3$$

и

$$1)\ x^3+cx^2=bx+a \quad , \quad 2)\ x^3+bx=cx^2+a \quad , \quad x^3+a=cx^2+bx$$

Это суть семь видовъ четырехчленныхъ уравненій. Намъ удалось рѣшить ихъ только геометрически. Доказательство этихъ видовъ уравненій возможно только при помощи коническихъ сѣченій".

„Теперь я приступлю къ послѣдовательному разсмотрѣнію и доказательству всѣхъ этихъ двадцати пяти видовъ уравненій; при этомъ я прибѣгаю къ помощи Бога, который руководитъ всякимъ уповающимъ на него, и этого достаточно".

Послѣ приведенныхъ опредѣленій и вступленія Алкгайями переходитъ къ самому рѣшенію уравненій, при чемъ начинаетъ съ рѣшенія первыхъ шести видовъ уравненій, т. е. съ двучленныхъ. Онъ даетъ сначала ариѳметическое рѣшеніе, а затѣмъ и геометрическое. При рѣшеніи третьей изъ простыхъ формъ, т. е. уравненій типа $a=x^3$, Алкгайями замѣчаетъ, что построеніе куба возможно только при помощи коническихъ сѣченій. Для примѣра покажемъ геометрическое построеніе данное Алкгайями для простого уравненія вида $a=x^2$. Объ этой формѣ онъ говоритъ слѣдующее *):

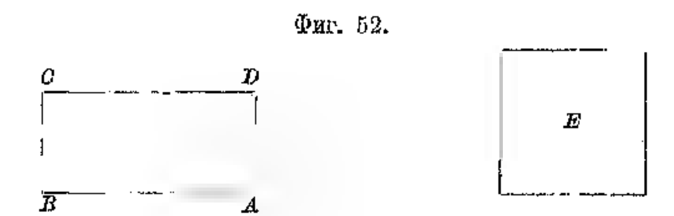
„Вторая форма. Число равно квадрату. Численный квадратъ будетъ извѣстенъ, такъ какъ онъ равенъ извѣстному числу, корень его ариѳметически можетъ быть найденъ только зная предварительно рядъ квадратныхъ чиселъ, такъ какъ только подобнымъ способомъ извѣстно, что, напримѣръ, корень двадцати пяти есть пять, а не способомъ алгебраическимъ. По отношенію къ этому предмету мы не будемъ обращать вниманія на то, что говорятъ объ этомъ алгебраисты, придерживающіеся иного мнѣнія. У индусовъ существуютъ методы для нахожденія квадратовъ и кубовъ, основанные на подобномъ знаніи небольшаго ряда чиселъ, т. е. на знаніи квадратовъ девяти цифръ, а именно квадрата: одного, двухъ, трехъ и т. д., а также произведеній, составленныхъ изъ умноженія одного изъ нихъ на другое, а именно, изъ произведенія двухъ на три и т. д. Мною составлено

*) См. Woepcke, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi. pag. 13—14.

сочинение объ справедливости доказательствъ этихъ методовъ, и я доказалъ, что они дѣйствительно приводятъ къ искомому предмету. Кромѣ того я увеличилъ число видовъ, т. е. я показалъ, какъ находить стороны биквадратовъ, квадрато-кубовъ, бикубовъ и т. д., до какой угодно степени, что до меня не было извѣстно. Доказательства, данныя мною, по этому предмету суть ни что иное, какъ ариѳметическія доказательства, основанныя на ариѳметическихъ отдѣлахъ „Началъ" Евклида".

„Геометрическое доказательство втораго вида состоитъ въ слѣдующемъ. Предположимъ, что прямая AB (фиг. 52) дана и что она равна данному числу; пусть AD равна единицѣ и перпендикулярна къ AB. Построимъ прямоугольникъ $ABCD$. Извѣстно, что мѣра прямоугольника $ABCD$ есть данное число. Затѣмъ построимъ квадратъ равный прямоугольнику $ABCD$,

Фиг. 52.



пусть этотъ квадратъ будетъ E, какъ это доказано въ четырнадцатомъ предложеніи второй книги, „Началъ" Евклида. Слѣдовательно квадратъ E будетъ равенъ данному и извѣстному числу, и его сторона будетъ также извѣстна, какъ это доказано у Евклида. А это именно и требовалось доказать. Каждый разъ, когда мы будемъ говорить въ настоящемъ сочиненіи: число равно прямоугольнику, то мы будемъ понимать подъ числомъ четыреугольникъ съ прямыми углами, одна изъ сторонъ котораго равна единицѣ, а другая прямая, по длинѣ равная данному числу, такимъ образомъ каждая изъ частей его мѣры равна второй сторонѣ, т. е. той, которая принята за единицу".

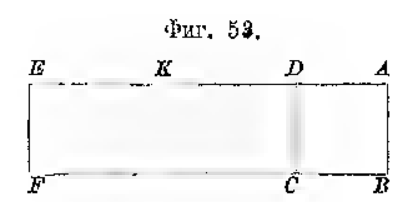
Показавъ рѣшеніе двучленныхъ уравненій, Алкгаями переходитъ къ трехчленнымъ. Приведемъ нѣкоторыя изъ его рѣшеній.

Уравненія вида $x^2+bx=a$, онъ рѣшаетъ для частнаго случая $x^2+10x=39$. Рѣшеніе состоитъ въ слѣдующемъ: „Квадратъ и десять корней равны тридцати девяти. Умножь половину корней саму на себя; произведеніе это придай къ числу, изъ корня квадратнаго вычти половину числа корней. Остатокъ будетъ равенъ корню квадрата. Если вопросъ ариѳметическій, то необходимо выполненіе двухъ условій: чтобы число корней было четное, для полученія половины (цѣлой); во вторыхъ: чтобы квадратъ половины и число составляли въ суммѣ полный квадратъ, въ противномъ

случаѣ вопросъ ариѳметически невозможенъ. Геометрически случай этотъ не представляетъ никакихъ затрудненій".

„Алгебраическое доказательство весьма легко и соотвѣтствуетъ геометрическому. Послѣднее состоитъ въ слѣдующемъ: Пусть квадратъ будетъ $ABCD$ (фиг. 53), увеличенный на десять корней, онъ равенъ тридцати девяти. Пусть десять корней представятся въ видѣ прямоугольника $CDEF$. Прямая DE равна десяти. Раздѣлимъ ее въ точкѣ K пополамъ. Такъ какъ

Фиг. 53.



линія DE раздѣлена въ точкѣ K пополамъ, и къ ней приложена линія AD, то произведенія EA на AD, равное прямоугольнику $ABFE$, прибавленное къ квадрату DK, будетъ равно квадрату AK. Но квадратъ DK, которое есть половина числа корней, извѣстенъ, а также извѣстенъ прямоугольникъ $ABFE$, который выражаетъ данное число. Слѣдовательно, квадратъ AK и линія AK будутъ извѣстны, и когда мы вычтемъ DK изъ AK, то остатокъ AD будетъ извѣстенъ".

Разсужденія Алкгаіями, какъ видно изъ приведеннаго, основаны на шестомъ предложеніи, второй книги, „Началъ" Евклида. Предложеніе это выражаетъ ничто иное, какъ равенство:

$$(p+x)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2$$

но:

$$(p+x)x=x^2+px=q$$

а потому:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2$$

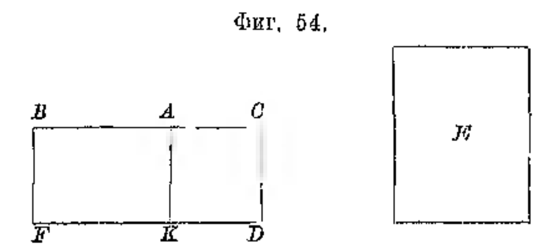
или:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}=x$$

Послѣ этого доказательства Алкгаіями приводитъ еще другое рѣшеніе, которое есть ничто иное, какъ геометрическое построеніе, извѣстное еще Магомету-бенъ-Музы и находящееся въ его „Алгебрѣ". Построеніе сдѣлано для того же частнаго случая $x^2+10x=39$. Весьма можетъ быть, что уравненіе это было заимствовано Омаромъ Алкгаіями у Магомета-бенъ-Музы. На построеніе это мы уже указывали выше (см. стр. 457, фиг. 25).

Кромѣ этихъ двухъ построеній Алкгаіями даетъ еще третье, состоящее въ слѣдующемъ: „Пусть дана прямая AB равная десяти (фиг. 54), и требуется найти квадратъ, который будучи прибавленъ къ произведенію его

Фиг. 54.



стороны на прямую AB, равнялся-бы данному числу. Данное число представимъ въ видѣ фигуры E, которая пусть будетъ параллелограмъ съ прямыми углами, какъ мы уже говорили выше. На прямой AE построимъ параллелограммъ, равный параллелограмму E, и превосходящій его на квадратъ, какъ это показано въ шестой книгѣ сочиненія Евклида *). Пусть прямоугольникъ будетъ $DCBF$, а квадратъ $DCAK$; сторона квадрата будетъ извѣстна, какъ это показано въ „Данныхъ" **).

Послѣ приведенныхъ построеній Омаръ Алкгаіями переходитъ ко второму типу трехчленныхъ уравненій, именно къ уравненіямъ формы:

$$x^2+a=bx$$

или, какъ онъ говоритъ: „квадратъ и число равны корнямъ". Для этого случая Алкгаіями указываетъ условія возможности рѣшенія уравненія; онъ говоритъ: „Въ этомъ случаѣ необходимо, чтобы число небыло больше квадрата половины числа корней. Въ противномъ случаѣ, вопросъ невозможенъ. Когда число равно квадрату изъ половины числа корней, то половина числа корней сама есть корень квадрата. Когда число меньше, то его вычитаютъ изъ квадрата половины числа корней, берутъ корень остатка и прибавляютъ его къ половинѣ числа корней, или вычитаютъ его изъ нея. Полученный результатъ, какъ отъ сложенія, такъ и отъ вычитанія, есть корень квадрата".

Условія эти переведенныя на нынѣшній алгебраическій языкъ суть ничто иное какъ условія:

$$a=\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad a<\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

*) См. „Начала" кн. VI, пред. 29. Построеніе Евклида даетъ опредѣленіе прямой AC, такой, чтобы $BD=AC^2+AC.AB=E$; слѣдовательно $x=AC$. Для даннаго численнаго примѣра $AB=10$ и $E=39$.

**) См. „Данные" Евклида пред. 59.

если эти условія несуществуютъ, то необходимо x будетъ мнимымъ. При вышенаписанныхъ условіяхъ будутъ, какъ извѣстно, существовать уравненія:

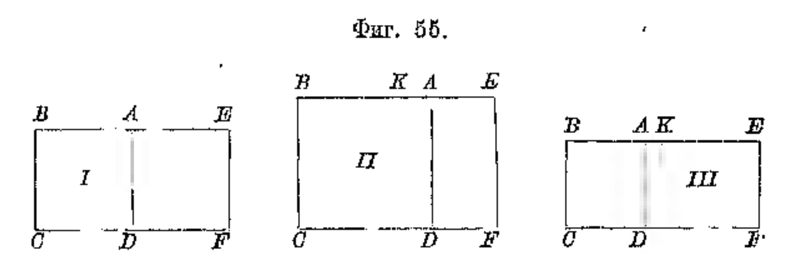
$$a = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{b}{2}$$

$$a < \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a}$$

эти рѣшенія и даны въ правилѣ указанномъ Алкгаили.

Показавъ алгебраическое рѣшеніе, Алкгаили переходитъ къ соотвѣтствующему ему геометрическому, которое дано для частнаго случая, именно для уравненія $x^2 + 21 = 10x$. Геометрическое построеніе состоитъ въ слѣдующемъ: „Пусть квадратъ будетъ $ABCD$ (фиг. 55), а прямоугольникъ $EADF$, приложенный къ квадрату, пусть выразитъ собою число. Полученный прямоугольникъ $EBCF$ будетъ равенъ десяти сторонамъ квадрата $ABCD$, а слѣдовательно EB будетъ равна десяти. Положимъ, что AB

Фиг. 55.



равна половинѣ EB (чертежъ I), затѣмъ положимъ AB больше половины EB (чертежъ II), и наконецъ пусть AB меньше половины EB (чертежъ III). Тогда очевидно на первомъ чертежѣ AB равна пяти. Во второмъ же и въ третьемъ раздѣлимъ EB въ точкѣ K пополамъ, а въ точкѣ A на двѣ неравныя части. Слѣдовательно прямоугольникъ, построенный на EA и AB, прибавленный къ квадрату KA, будетъ равенъ квадрату, построенному на KB, какъ это объяснено во второй книгѣ „Началъ" *). Прямоугольникъ, построенный на EA и AB, равный числу, извѣстенъ; слѣдовательно если его отнять отъ квадрата KB, который есть половина числа корней, то остающійся квадратъ KA будетъ извѣстенъ. Отнимая въ третьемъ чертежѣ KA отъ KB, а во второмъ—прибавляя KA къ KB, получимъ разность или сумму въ видѣ прямой AB. Это и требовалось отыскать".

*) См. „Начала" Евклида, кн. II, пред. 5.

Разсужденія Алкаліями очевидно основаны на слѣдующихъ соображеніяхъ: изъ „Началъ" Евклида извѣстно, что если $AB > \frac{1}{2} EB$, то существуетъ соотношеніе:

$$x(p-x)+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

но:

$$px-x^2=q$$

слѣдовательно:

$$x-\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

отвуда:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Для случая $AB < \frac{1}{2} EB$, на основаніи пред. 5, кн. II „Началъ", существуетъ соотношеніе:

$$x(p-x)+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{p}{2}-x=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

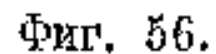
и

$$x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\quad .$$

Уравненіе, разсматриваемаго вида Алкгаліями рѣшаетъ еще инымъ построеніемъ, которое состоитъ въ слѣдующемъ: „Предположимъ, что дана прямая AB, равная десяти, и требуется отъ этой прямой отнять такую линію, чтобы произведеніе изъ ея длины и прямой AB равнялось бы квадрату этой линіи, сложенному съ другимъ прямоугольникомъ, который не больше квадрата половины AB, т. е. увеличенному на данное число, которое выражено прямоугольникомъ E. Итакъ мы рѣшаемъ вопросъ: отъ AB отрѣзать такую линію, чтобы квадратъ, построенный на ней, увеличенный на прямоугольникъ E (фиг. 56), равнялись произведенію изъ этой линіи на AB. Приложимъ къ линіи AB прямоугольникъ, равный извѣстному прямоугольнику E, но такъ, чтобы недоставало еще квадрата; это всегда возможно, такъ какъ прямоугольникъ E не больше квадрата, построеннаго на $\frac{1}{2} AB$. Пусть этотъ прямоугольникъ будетъ прямоугольникъ $ACKF$, а недостающій квадратъ $CBDK$, какъ это показано въ шестой книгѣ „Началъ" Евклида *). Сторона

*) См. „Начала" Евклида, кн. VI, пред. 27, 28.

CB будетъ извѣстна, какъ это показано въ „Данныхъ“ *). Это и требовалось доказать. Очевидно, что уравненія этого вида заключаютъ нѣсколько


Фиг. 56.



случаевъ и что они приводятъ также къ невозможнымъ вопросамъ. Что же касается условій возможности рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ, то онѣ могутъ быть выведены изъ того, что мы говорили по этому предмету по поводу уравненій перваго вида“.

Случаи о которыхъ упоминаетъ Алкгаиями суть очевидно:

$$x=\frac{b}{2}\quad,\quad x>\frac{b}{2}\qquad x<\frac{b}{2}$$

а уравненіе невозможно при условіи $a>\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Кромѣ приведенныхъ двухъ геометрическихъ построеній Алкгаиями упоминаетъ, что ему извѣстны еще и другія, но что онъ ихъ не приводитъ, чтобы не утомлять читателей.

Далѣе Алкгаиями переходитъ къ рѣшенію третьяго вида трехчленныхъ уравненій. Къ этой группѣ принадлежатъ уравненія вида.

$$bx+a=x^2$$

геометрическое построеніе онъ даетъ для частнаго случая, именно для уравненія: $5x+6=x^2$.

Алкгаиями говоритъ: „Число и корни равны квадрату. Къ числу придаютъ квадратъ половины числа корней, изъ суммы извлекаютъ корень и придаютъ его къ половинѣ числа корней. Полученный результатъ есть корень квадрата“. Приведенное правило есть, очевидно ничто иное, какъ формула:

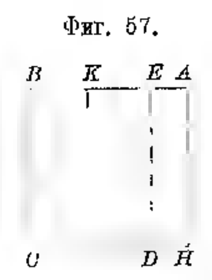
$$x=\frac{b}{2}+\sqrt{a+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

„Доказательство. Пусть квадратъ *ABCH* (фиг. 57) равенъ пяти корнямъ, увеличеннымъ на шесть единицъ. Отымемъ отъ него число, которое пусть

*) См. „Данные“ Евклида пред. 58.

представится въ видѣ прямоугольника $AEDH$. Въ остаткѣ получимъ прямоугольникъ $EBCD$, равный числу корней, которое есть пять. Слѣдова-

Фиг. 57.



тельно линія EB равна пяти. Раздѣлимъ ее пополамъ въ точкѣ K. Итакъ линія EB раздѣлена въ точкѣ K пополамъ, но въ то же время къ ней приложена часть EA, откуда слѣдуетъ, что прямоугольникъ, построенный на AB и AE, т. е. извѣстный прямоугольникъ $AEDH$, сложенный съ извѣстнымъ квадратомъ EK, равенъ квадрату KA. Итакъ квадратъ построенный на AK и прямая AK будутъ извѣстны. Но KB извѣстно, слѣдовательно и AB извѣстна".

Разсужденія свои очевидно Алкгаиями основываетъ на пред. 6, кн. II, „Началъ" Евклида. Изъ этого предложенія слѣдуетъ соотношеніе

$$x(x-p)+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

но:

$$x(x-p)=q$$

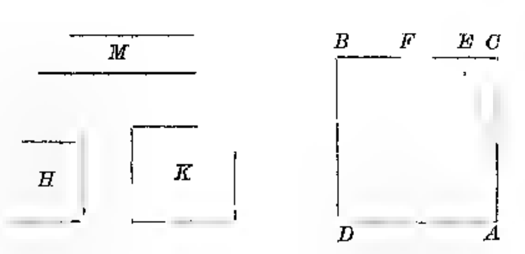
слѣдовательно:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

Далѣе Алкгаиями замѣчаетъ, что существуютъ еще и другія доказательства только что приведеннаго рѣшенія. Нахожденіе этихъ доказательствъ онъ предоставляетъ читателямъ въ видѣ упражненій. Въ чемъ состояли эти доказательства положительно неизвѣстно, такъ какъ несуществуетъ никакихъ указаній. Кромѣ приведеннаго геометрическаго рѣшенія Алкгаиями показываетъ еще, какъ могутъ быть геометрически построены корни уравненія этой формы. Онъ говоритъ: „Предположимъ, что линія BE (фиг. 58) равна числу корней, и что требуется найти квадратъ и его сторону, такого свойства, чтобы этотъ квадратъ былъ равенъ данному числу его сторонъ, сложенному съ даннымъ числомъ. Пусть данное число представлено въ видѣ прямоугольника M, и пусть H будетъ квадратъ, равный этому прямоугольнику.

Построимъ квадратъ, равный суммѣ квадрата H и квадрата EF, построеннаго на прямой равной половинѣ числа корней. Пусть построенный квад-

Фиг. 58.



ратъ будетъ K. Отложимъ FC равнымъ сторонѣ квадрата K и дополнимъ квадратъ $ACED$. Квадратъ этотъ будетъ искомый".

Въ заключеніе Алкгаміи замѣчаетъ: „очевидно, что ни третья форма, ни первая, не заключаютъ ничего невозможнаго, между тѣмъ, какъ для второй подобная невозможность существуетъ. Вторая форма заключаетъ нѣсколько различныхъ случаевъ, чего не существуетъ для двухъ другихъ разсмотрѣнныхъ формъ".

Разсмотрѣнныя нами три вида уравненій второй степени и рѣшенія данныя Алкгаміи весьма интересно сравнить съ построеніями данными Магометомъ-бенъ-Музой въ своей „Алгебрѣ". Подробное сравненіе этихъ построеній было сдѣлано Матисеномъ, сравнившимъ эти построенія съ нѣкоторыми изъ построеній, данныхъ Евклидомъ *).

Послѣ разсмотрѣнныхъ трехъ видовъ трехчленныхъ уравненій второй степени Алкгаміи разсматриваетъ слѣдующія три вида, именно:

$$x^3 + cx^2 = bx \quad , \quad x^3 + bx = cx^2 \quad , \quad cx^2 + bx = x^3$$

Онъ показываетъ, что уравненія этихъ трехъ видовъ пропорціональны уравненіямъ трехъ предъидущихъ видовъ **). На разсмотрѣніи этихъ уравненій мы не остановимся, а перейдемъ къ слѣдующимъ видамъ уравненій, т. е. къ построенію уравненій третьей степени. Но прежде чѣмъ мы перейдемъ къ разсмотрѣнію методовъ построенія уравненій третьей степени, данныхъ Алкгаміи, мы считаемъ необходимымъ сказать нѣсколько словъ объ историческомъ происхожденіи рѣшенія подобнаго рода вопросовъ.

---

*) *L. Matthiessen*, Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig. 1878. in-4.

**) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayâmi pag. 25—28.

Методы геометрическаго построенія уравненій третьей степени обыкновенно приписываютъ древнимъ греческимъ геометрамъ, но такое мнѣніе не совсѣмъ основательно. Греческіе геометры только рѣшили нѣкоторые геометрическіе вопросы, которые будучи представлены въ алгебраической формѣ, приводятъ къ уравненіямъ третьей степени. Изъ сказаннаго ясно видно, что между геометрическимъ рѣшеніемъ подобныхъ вопросовъ и знаніемъ, что эти вопросы зависятъ отъ рѣшенія уравненій третьей степени, существуетъ большая разница. Первый рѣшившій вопросъ подобнаго рода былъ греческій геометръ Менайхмъ, жившій въ IV в. до Р. Х. Онъ первый далъ рѣшеніе кубическаго уравненія вида.

$$x^3 = c$$

уравненіе это онъ рѣшилъ геометрически, пересѣченіемъ двухъ коническихъ сѣченій. Задача эта, представленная въ формѣ уравненія:

$$x^3 = 2a^3$$

была извѣстна въ платоновской школѣ подъ именемъ задачи „удвоенія куба" *). Въ теченіи многихъ столѣтій математики пытались рѣшить этотъ вопросъ непосредственно, безъ помощи коническихъ сѣченій **), хотя уже Платону было извѣстно, что задача „удвоенія куба" зависитъ отъ рѣшенія вопроса о нахожденіи къ двумъ даннымъ линіямъ двухъ средне-пропорціональныхъ ***). По словамъ Прокла, Гиппократу Хіосскому принадлежитъ первому нахожденіе связи между двумя приведенными вопросами. Вопросъ о нахожденіи двухъ средне-пропорціональныхъ зависитъ отъ рѣшенія пропорціи:

$$a : x = x : y = y : b$$

или отъ рѣшенія уравненій:

$$x^2 = ay \quad , \quad y^2 = bx$$

или отъ уравненій:

$$x^2 = ay \quad , \quad xy = ab$$

исключая изъ этихъ двухъ уравненій y, найдемъ:

$$x^3 = a^2b$$

---

*) Duplicatio cubi, διπλασιασμὸς τοῦ στερεοῦ.

**) Историческое развитіе этого вопроса можно найти въ сочиненіи *Reimer*, Historia problematis de cubi duplicatione. Gottingae. 1798. In-8.

***) τὰς δύο μέσας.

полагая $b = 2a$, для этого частнаго случая получимъ:

$$x^3 = 2a^3$$

Итакъ вопросъ объ удвоеніи куба можетъ быть рѣшенъ, коль скоро возможно было найти двѣ средне-пропорціональныя между a и $2a$ *). Почти всѣ геометры древности занимались рѣшеніемъ задачи „удвоенія куба“. Удовлетворительныя рѣшенія были даны многими греческими геометрами и въ томъ числѣ два рѣшенія были даны Менэхмомъ **). Также есть указанія, что этой задачей занимались и китайскіе математики ***).

Историческое развитіе вопроса о построеніи уравненій третьей степени неполнаго вида получило начало еще у древнихъ геометровъ александрійской школы. Исходною точкою подобнаго рода вопросовъ служитъ задача, предложенная Архимедомъ, въ четвертомъ предложеніи, второй книги сочиненія „О шарѣ и цилиндрѣ“, о раздѣленіи шара плоскостью на двѣ такія части, чтобы отношеніе между ними равнялось данному отношенію. Архимедъ показалъ, что рѣшеніе этого вопроса зависитъ отъ слѣдующаго построенія: Пусть дана линія DZ (фиг. 59) и на ней двѣ точки B и O

Фиг. 59.

D X B O Z

такъ что B лежитъ между D и O. Найти на этой линіи точку X такого свойства, чтобы существовало соотношеніе:

$$XZ : ZO = BD^2 : DX^2$$

*) Мы уже выше упоминали (см. стр. 160), что въ древности было извѣстно одиннадцать рѣшеній этой задачи, предложенныхъ различными математиками. Рѣшенія эти помѣщены въ комментаріяхъ Евтокія на 3-е предложеніе второй книги сочиненія „О шарѣ и цилиндрѣ“ Архимеда. Въ настоящее время извѣстенъ арабскій переводъ этого комментарія, сдѣланный Табитъ-бенъ-Корра.

**) При рѣшеніи задачи удвоенія куба греческіе геометры пользовались различными механическими построеніями. Для этой цѣли были отысканы различными геометрами различныя кривыя; такъ напр. Никомедъ нашелъ *конхоиду*, Діоклесъ—*циссоиду*. Подобныя же механическія построенія даны были Герономъ Старшимъ и Платономъ. Построенія ихъ также сводятся на алгебраическія кривыя высшихъ степеней. Построеніе Платона основано на геометрическомъ рѣшеніи вопроса о двухъ средне-пропорціональныхъ.

***) Объ этомъ мы упоминали уже выше, говоря о математикѣ китайцевъ. См. стр. 371—372, примѣч.

Для приведенія этого вопроса къ алгебраическому рѣшенію сдѣлаемъ слѣдующія обозначенія:

$$BD = a \quad , \quad ZO = b \quad , \quad ZD = c \quad , \quad DX = x$$

тогда получимъ очевидно:

$$(c-x) : b = a^2 : x^2$$

т. е. вопросъ нашъ сводиться къ рѣшенію кубическаго уравненія формы:

$$x^3 - cx^2 + a^2b = 0$$

Рѣшенія только что приведенной леммы Архимедъ, на сколько извѣстно въ настоящее время, не далъ, хотя Евтокій въ своихъ комментаріяхъ *) говоритъ, что Архимедомъ было найдено рѣшеніе этого вопроса при помощи параболы и равносторонней гиперболы, т. е. при посредствѣ уравненій:

$$x^2 = y\frac{a^2}{c} \qquad \text{и} \qquad y(c-x) = bx$$

На эту лемму обратили особенное вниманіе арабскіе геометры и весьма вѣроятно, что ихъ сильно интересовало рѣшеніе вопроса, который по видимому не съумѣлъ рѣшить такой великій математикъ, какъ Архимедъ. Впослѣдствіи ими были даны различныя рѣшенія этого вопроса.

Арабскимъ геометрамъ принадлежитъ первымъ честь геометрическаго построенія уравненій третьей степени не для отдѣльныхъ только случаевъ, а на основаніи извѣстныхъ предложеній они дали полную теорію ихъ рѣшенія. Алкганями первый далъ полную—систематическую теорію построенія уравненій третьей степени, причемъ подробно разсмотрѣлъ всѣ случаи и методы свои изложилъ систематически. Ни въ одномъ изъ сочиненій древнихъ греческихъ математиковъ мы не находимъ слѣдовъ подобной теоріи. Единственное, дошедшее до насъ сочиненіе алгебраическаго содержанія, написанное греческими математиками, именно „Ариѳметики" Діофанта относится къ сравнительно болѣе позднему періоду. Въ сочиненіи этомъ находимъ примѣръ рѣшенія одного кубическаго уравненія, при чемъ рѣшеніе это дано безъ всякихъ правилъ, а было вѣроятно найдено ощупью **). Изъ всего вышесказаннаго видно, что несправедливо приписывать греческимъ

*) См. Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustrauit *J. L. Heiberg*. Vol. III. Eutocii Commentarium in librum II de Sphaera et Cylindro, pag. 151—155.

**) См. кн. VI, пред. 19 „Ариѳметики". На уравненіе это мы указывали выше (стр. 144) говоря о трудахъ Діофанта.

геометрамъ и видѣть въ ихъ трудахъ первую мысль построенія уравненій третьей степени. Арабскимъ математикамъ принадлежитъ заслуга приложенія алгебры къ геометріи, и обратно, геометріи къ алгебрѣ. Они первые положили начало, той тѣсной связи между вычисленіемъ и геометріей, которая, впослѣдствіи, способствовала столь быстрому развитію математическихъ наукъ.

Въ своемъ сочиненіи Алкгаіями указываетъ на историческое развитіе вопроса о построеніи уравненія третьей степени. Онъ указываетъ на попытки, сдѣланныя Алмагани, и на ихъ неуспѣшность и говоритъ, что удовлетворительное рѣшеніе впервые дано было Абулъ Джафаромъ Алгозейномъ, рѣшившимъ вопросъ при помощи коническихъ сѣченій. Впослѣдствіи также другимъ геометрамъ удалось построить нѣкоторые частные виды уравненій третьей степени для отдѣльныхъ частныхъ случаевъ. Построенія эти навели Алкгаіями на мысль дать систематическую и полную теорію построенія уравненій третьей степени.

Мы вкратцѣ укажемъ на методы примѣняемые Алкгаіями при рѣшеніи уравненій третьей степени. Онъ начинаетъ съ того, что всегда дѣлаетъ однороднымъ предложенное уравненіе и для этой цѣли вводитъ два вспомогательныхъ предложенія. При преобразованіяхъ уравненій къ однородной формѣ онъ пользуется уравненіемъ $x^3 = a$, когда требуется извѣстный членъ уравненія замѣнить кубомъ. Затѣмъ Алкгаіями находитъ, при помощи преобразованныхъ коэфиціентовъ уравненія, два коническія сѣченія, пересѣченіе которыхъ даетъ равенство между двумя объемами. Разлагая эти два объема, или же прибавляя къ нимъ, или отнимая отъ нихъ, извѣстные объемы, онъ наконецъ находитъ требуемое уравненіе.

Показавъ методы геометрическаго рѣшенія уравненій второй степени, о которыхъ мы говорили подробно выше, Алкгаіями переходитъ къ построенію уравненій третьей степени *). Разсмотрѣнію этихъ уравненія посвящена третья часть его труда **). Алкгаіями начинаетъ съ того, что говоритъ: „Разсмотрѣвъ въ предъидущемъ виды уравненій, которыя могутъ быть доказаны при помощи свойствъ круга, т. е. при посредствѣ сочиненія Евклида, займемся теперь разсмотрѣніемъ тѣхъ видовъ, которыхъ доказательство можетъ быть дано только при посредствѣ коническихъ сѣченій. Такихъ ви-

*) Методы геометрическаго построенія уравненій третьей степени, примѣняемые Омаромъ, были разсмотрѣны Вэпке въ статьѣ: *Woepcke*, Notice sur un manuscrit arabe d'un traité d'Algèbre etc., помѣщенной въ Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. XL, 1850.

**) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 28—68.

довъ есть числомъ четырнадцать; они заключаютъ: a) одно простое уравненіе, а именно уравненіе—„число равно кубу"; b) шесть трехчленныхъ уравненій изъ числа двѣнадцати, о которыхъ мы упоминали выше; и c) семь четырехчленныхъ уравненій".

„Но прежде чѣмъ мы перейдемъ къ разсмотрѣнію этихъ уравненій займемся нѣсколькими предложеніями, основанными на сочиненіи „О коническихъ сѣченіяхъ", чтобы представить учащемуся систематическое изложеніе, а также, чтобы мы могли въ настоящемъ сочиненіи ограничиться ссылками на три упомянутыя выше сочиненія, именно на два сочиненія Евклида: „Начала" и „Данные", и на двѣ первыя книги „Коническихъ Сѣченій".

Первое изъ упомянутыхъ предложеній есть ничто иное, какъ рѣшеніе вопроса „О нахожденіи между двумя данными линіями AB и BC двухъ средне-пропорціональныхъ x и y", или иными словами рѣшеніе пропорціи:

$$AB : x = x : y = y : BC$$

Рѣшеніе этого вопроса данное Алкгаіями есть ничто иное какъ второе изъ рѣшеній, предложенныхъ еще греческимъ геометромъ Менайхмомъ *). Свое рѣшеніе Алкгаіями нашелъ самостоятельно, такъ какъ, повидимому ему неизвѣстны рѣшенія, данныя греческимъ геометромъ. Рѣшеніе Алкгаіями состоитъ въ слѣдующемъ: Пусть AB и BC будутъ данныя прямыя, которыя составляютъ прямой уголъ B (фиг. 60). Положимъ $AB = a$ и $BC = b$.

Фиг. 60.

Построимъ параболы BDE и BDF, которыхъ вершины въ точкѣ B, а оси

*) Другое изъ рѣшеній, данныхъ Менайхмомъ, состоитъ въ нахожденіи точки D при помощи пересѣченія одной изъ параболъ BDE и BDF съ гиперболой $xy = ab$, коей асимптоты суть прямыя BX и BY (фиг. 60).

соотвѣтственно BX и BY, а параметры $BC=b$ и $BA=a$. Параболы эти пересѣкаются въ точкѣ D, координаты которой суть $DO=x$ и $DH=y$. Прямыя x и y будутъ искомыя, такъ какъ существуетъ равенство:

$$a:x=x:y=y:b$$

Справедливость этого легко доказать. Въ самомъ дѣлѣ для параболы BDE мы имѣемъ равенство:

$$y^2=bx$$

т. е. пропорцію:

$$b:y=y:x$$

для параболы BDF—равенство:

$$x^2=ay$$

т. е. соотношеніе:

$$y:x=x:a$$

Изъ полученныхъ двухъ пропорцій легко получить непрерывную пропорцію и уравненіе:

$$x^3=a^2b$$

Затѣмъ Алкгаіями переходитъ къ доказательству слѣдующихъ двухъ предложеній: 1) по данному квадратному основанію прямоугольнаго параллелепипеда и другому квадрату MN, построить на MN, какъ на основаніи, прямоугольный параллелепипедъ равный данному параллелепипеду; и 2) по данному прямоугольному параллелепипеду, коего основаніе есть квадратъ, построить прямоугольный параллелепипедъ, коего основаніе было-бы квадратъ, высота равнялась бы данной линіи ST, и который былъ-бы равенъ данному параллелепипеду *).

Доказавъ эти три вспомогательныхъ предложенія, Алкгаіями даетъ построеніе третьяго вида изъ системы простыхъ уравненій, т. е. показываетъ какъ рѣшается вопросъ: „кубъ равенъ числу", или равенство $x^3=a$. Для нахожденія корня этого уравненія, т. е. для его построенія, Алкгаіями полагаетъ, что число a представляется въ видѣ прямоугольнаго параллелепипеда, котораго основаніе квадратъ, коего сторона равна единицѣ. Очевидно высота его представится чрезъ a и тогда требуется рѣшить уравненіе:

$$x^3=1^2.a$$

т. е. построить кубъ равный этому параллелепипеду. Для этого ищутъ между линіями 1 и a двѣ среднія-пропорціональныя, что возможно на осно-

*) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 30—31.

ваніи доказанныхъ предложеній, пусть эти средне-пропорціональныя будутъ x и y, то первая изъ нихъ x будетъ ребромъ куба, котораго объемъ равенъ объему даннаго параллелепипеда.

Послѣ этого Алкгаями переходитъ къ построенію шести трехчленныхъ уравненій. Онъ начинаетъ съ уравненія:

$$x^3+bx=a$$

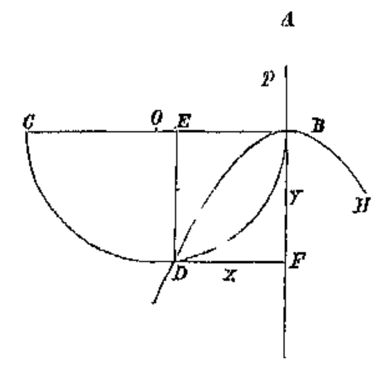
которое представляетъ собою неполное кубическое уравненіе. Уравненіе это Алкгаями выражаетъ словами: „кубъ и ребра равны числу". Онъ разсматриваетъ только случай, когда величины a и b имѣютъ положительныя значенія. Въ концѣ рѣшенія Алкгаями замѣчаетъ, что: „видъ этотъ не представляетъ различныхъ случаевъ, а равно не заключаетъ невозможныхъ задачъ. Онъ рѣшенъ при помощи свойствъ круга и параболы". Слова арабскаго математика вполнѣ вѣрны, такъ какъ уравненіе вида:

$$x^3+ax-b=0$$

имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, который всегда положительный *).

Рѣшеніе этого уравненія, данное Алкгаями, состоитъ въ слѣдующемъ геометрическомъ построеніи: Пусть AB (фиг. 61) будетъ сторона квадрата

Фиг. 61.



$p^2=a$. При посредствѣ извѣстнаго способа построимъ параллелепипедъ $p^2r=b$ и отложимъ $BC=r$ перпендикулярно къ AB. Продолжимъ неопредѣленно AB и построимъ параболу DBH, которой параметръ AB, а боль-

*) Woepcke, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, pag. 32–34.

шая ось BF. На BC опишемъ полукругъ CDB, пересѣкающій параболу въ точкѣ D, коей координаты назовемъ чрезъ x и y. Очевидно, что:

$$x^2 = py$$

Кромѣ того изъ свойствъ круга, извѣстно, что:

$$y^2 = x(r - x)$$

Изъ этихъ двухъ уравненій слѣдуетъ, что:

$$x^3 + p^2x = p^2r$$

или:

$$x^3 + ax = b$$

абсцисса $BE = x$ точки D, пересѣченія круга съ параболой, будетъ искомый корень уравненія.

За этимъ Алкгаими переходитъ ко второму виду трехчленныхъ уравненій, именно къ уравненію вида:

$$x^3 + a = bx$$

Рѣшая это уравненіе арабскій математикъ замѣчаетъ, что видъ этотъ заключаетъ невозможные случаи. Къ такимъ случаямъ онъ, очевидно, относитъ случай, когда уравненіе

$$x^3 - bx + a = 0$$

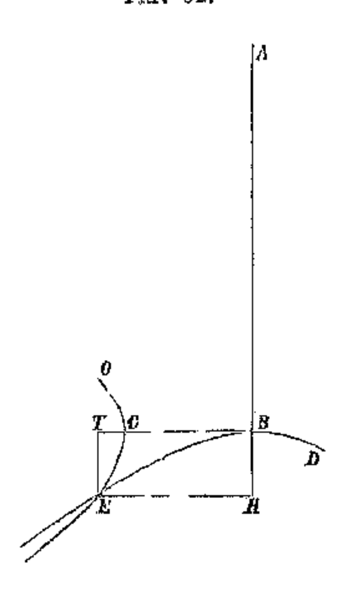
имѣетъ дѣйствительный и отрицательный корень, который не принимается во вниманіе арабскимъ геометромъ. Въ этомъ случаѣ, другіе два корня или мнимые (тогда по выраженію Алкгаими задача невозможна), или же положительны и равные $\left(\text{т. е. } x = \sqrt{\frac{b}{3}}\right)$, или, наконецъ, положительны и неравны, въ чемъ и заключается разнообразіе случаевъ о которыхъ упоминаютъ Алкгаями.

Рѣшеніе этого вида уравненій, данное Алкгаими, состоитъ въ слѣдующемъ;

Прямую AB (фиг. 62) отложимъ равной сторонѣ квадрата, равнаго числу корней, т. е. $AB^2 = b$; построимъ параллелепипедъ $AB^2 . BC = a$. Прямая BC перпендикулярна къ AB. Опишемъ параболу EBD, коей ось по направленію AB, а вершина въ точкѣ B; пусть параметръ ея будетъ AB. Опишемъ гиперболу ECO, коей вершина въ точкѣ C, ось по направленію BC, а параметръ и большая ось пусть равны BC. Положеніе обѣихъ коническихъ сѣченій извѣстно. Проведенныя коническія сѣченія могутъ пере-

сѣчься и не пересѣчься. Если онѣ не пересѣкаются, то задача невозможна. Если же онѣ встрѣчаются, или касаясь, или пересѣкаясь, то положеніе

Фиг. 62.



точки встрѣчи будетъ извѣстно. Пусть оба коническія сѣченія пересѣкаются въ точкѣ E; изъ этой точки опустимъ перпендикуляры ET и EH на прямыя BT и BH. Величина и положеніе этихъ перпендикуляровъ, очевидно, извѣстны. Прямая ET будетъ ординатой гиперболы. Изъ „Коническихъ сѣченій" Аполлонія извѣстно, что для гиперболы существуетъ соотношеніе:

$$ET^2 = BT \cdot CT$$

т. е.

$$BT : ET = ET : CT$$

Но также извѣстно, что.

$$EH^2 = BH \cdot AB \quad , \quad EH = BT \quad , \quad BH = ET$$

слѣдовательно:

$$AB : BT = BT : ET$$

Сравнивая эту пропорцію съ предъидущей, найдемъ:

$$AB^2 : BT^2 = BT : TC$$

или:

$$BT^3 = AB^2 \cdot TC$$

Итакъ мы нашли равенство между кубомъ и параллелепипедомъ. Прибавляя къ обѣимъ частямъ параллелепипедъ $AB^2 . BC$, получимъ:

$$BT^3 + AB^2 . BC = AB^2 . TC + AB^2 . BC$$

или:

$$BT^3 + AB^2 . BC = AB^2 . BT$$

или:

$$BT^3 + a = b . BT$$

откуда:

$$x = BT$$

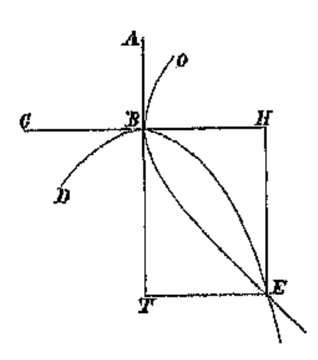
Такимъ образомъ корень уравненія построенъ. Въ заключеніе Алкгаіями замѣчаетъ, что видъ этихъ уравненій рѣшенъ при помощи свойствъ двухъ коническихъ сѣченій, параболы и гиперболы.

Къ третьему виду трехчленныхъ уравненій принадлежатъ уравненія формы:

$$bx + a = x^3$$

т. е. „кубъ равенъ сторонамъ сложеннымъ съ числомъ". Уравненіе это Алкгаіями*) рѣшаетъ при помощи слѣдующаго построенія: Прямую AB онъ дѣлаетъ равной сторонѣ квадрата, равнаго числу сторонъ, т. е. $AB^2 = b$ (фиг. 63); на AB, какъ на основаніи, построимъ параллелепипедъ, коего объемъ равенъ числу, т. е. $AB^2 . BC = a$. Пусть высота этого параллелепипеда будетъ BC и пусть она перпендикулярна къ AB. Прямыя AB и BC

Фиг. 63.



продолжимъ и опишемъ параболу, коей вершина въ точкѣ B, а ось на продолженіе прямой AB; параметръ ея пусть будетъ AB. Проведенная парабола пусть будетъ кривая DBE. Положеніе этой параболы извѣстно и она касается линіи BH, какъ это доказано въ „Коническихъ Сѣченіяхъ"

*) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 36—38.

Аполлонія въ 33-мъ предложеніи, первой книги. Затѣмъ проведемъ точно такимъ же образомъ другое коническое сѣченіе, именно равностороннюю гиперболу OBE, коей вершина въ точкѣ B, а ось на продолженіи BC. Пусть параметръ и большая ось этой гиперболы равны прямой BC. Положеніе этой гиперболы будетъ извѣстно, она коснется прямой AB. Очевидно оба коническія сѣченія взаимно пересѣкаются въ точкѣ E, коей положеніе будетъ извѣстно. Изъ точки E опустимъ два перпендикуляра ET и EH, положеніе и величина которыхъ будутъ извѣстны. Прямая EH будетъ ординатой гиперболы, а потому будетъ существовать равенство:

$$EH^2 = CH \cdot BH$$

Для параболы, коей ордината есть ET, существуетъ также подобное равенство, именно:

$$ET^2 = AB \cdot BT$$

Но $EH = BT$, а $ET = BH$, а потому выше написанныя равенства обратятся въ слѣдующіе два:

$$BH : BT = BT : CH$$

$$AB : BH = BH : BT$$

Изъ этихъ двухъ пропорцій слѣдуетъ, что:

$$AB^2 : BH^2 = BH : CH$$

откуда:

$$BH^3 = AB^2 \cdot CH$$

но $CH = CB + BH$, а потому:

$$BH^3 = AB^2 \cdot BH + AB^2 \cdot BC$$

откуда:

$$BH^3 = b \cdot BH + a$$

слѣдовательно неизвѣстная величина x будетъ равна:

$$x = BH$$

Въ концѣ своего рѣшенія Алкгаями замѣчаетъ, что „уравненія этого вида не заключаютъ различныхъ случаевъ, т. е. что вопросы зависящіе отъ нихъ не представляютъ ничего невозможнаго. Уравненія эти рѣшаются при помощи свойствъ гиперболы и параболы“.

Слова Алкгаями очевидно справедливы въ томъ смыслѣ, что одинъ изъ корней уравненій типа:

$$x^3 - bx - a = 0$$

всегда дѣйствителенъ и положительный. Другіе два корня всегда отрица-

тельны или мнимы, но послѣдніе два корня не принимаются въ соображеніе арабскимъ геометромъ.

Приведенныхъ геометрическихъ построеній корней уравненій третьей степени *простой формы* вполнѣ достаточно, чтобы составить себѣ ясное понятіе о методѣ Алкгаіями. На этихъ примѣрахъ рѣшенія *неполныхъ* кубическихъ уравненій мы и остановимся и перейдемъ къ разсмотрѣнію методовъ геометрическаго построенія корней уравненій третьей степени *полныхъ*, или какъ ихъ называетъ Алкгаіями уравненій *сложной формы*. Мы уже выше замѣтили (см. стр. 583), что полныя кубическія уравненія Алкгаіями дѣлитъ на два класса: къ первому принадлежатъ уравненія, представляющія равенства между тремя членами съ одной стороны и однимъ членомъ съ другой; а ко второму—уравненія, представляющія равенства между двумя членами съ одной стороны и двумя другими съ другой. Покажемъ теперь нѣкоторыя изъ геометрическихъ построеній, примѣняемыхъ Алкгаіями при нахожденіи корней полныхъ кубическихъ уравненій *). Начнемъ съ построеній корней уравненій перваго класса.

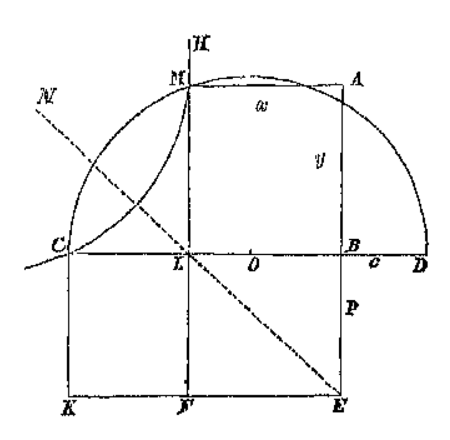
Первый классъ полныхъ кубическихъ уравненій заключаетъ четыре вида четырехчленныхъ уравненій, а второй классъ—три вида.

Къ первому виду уравненій перваго класса принадлежатъ уравненія третьей степени формы:

$$x^3+cx^2+bx=a$$

или какъ Алкгаіями выражается: „кубъ, квадраты и ребра равны числамъ“.

Фиг. 64.



Геометрическое построеніе корней уравненій этого вида состоитъ въ слѣдую-

*) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 45—68.

щемъ: Отложимъ BE равнымъ сторонѣ квадрата, равнаго данному числу сторонъ (фиг. 64), и построимъ тѣло, основаніе котораго квадратъ BE и равное данному числу. Пусть высота этого тѣла будетъ BC, и пусть BC перпендикулярно къ BE. Отложимъ прямую BD, равную данному числу квадратовъ, на продолженіе BC и на DC, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ DMC. Очевидно будутъ существовать равенства:

$$EB^2 = b = p^2 \quad , \quad EB^2 . BC = a = p^2 . s \quad , \quad BD = c.$$

При такихъ обозначеніяхъ наше уравненіе превратится въ уравненіе:

$$x^3 + cx^2 + p^2 x = p^2 s$$

т. е. данное первоначальное уравненіе приведено къ однородному виду. Замѣтимъ еще, что въ первоначальномъ уравненіи величины c, b и a, по условію вопроса, принимаются положительными. На приложенной фигурѣ отрѣзокъ $CB = s$, $BD = c$, а $BE \perp CD$ есть ничто иное какъ p.

Дополнимъ прямоугольникъ $BCKE$ и чрезъ точку C проведемъ равностороннюю гиперболу CMH, коей ассимптоты пусть будутъ прямыя BE и EK. Гипербола эта пересѣчетъ кругъ въ точкѣ C, такъ какъ она пересѣкаетъ касательную CK къ кругу; изъ этого необходимо слѣдуетъ, что гипербола пересѣчетъ кругъ еще въ другой точкѣ. Пусть эта точка будетъ M. Положеніе точки M будетъ извѣстно, такъ какъ извѣстны положенія круга и коническаго сѣченія. Изъ точки M опустимъ перпендикуляры MF и MA на прямыя EK и EA. Прямоугольникъ $MAET$ будетъ равенъ прямоугольнику $BCKE$, слѣдовательно:

$$\text{прям. } MAEF - \text{прям. } BLFE = \text{прям. } BCKE - \text{прям. } BLFE$$

или:

$$\text{прям. } MABL = \text{прям. } CLFK$$

Откуда слѣдуетъ, что:

$$ML : LC = FL : BL = EB : BL$$

или:

$$ML^2 : LC^2 = EB^2 : BL^2$$

но для круга мы имѣемъ также соотношеніе:

$$ML^2 : LC^2 = DL : LC$$

Сравнивая двѣ послѣднія пропорціи найдемъ:

$$EB^2 : BL^2 = DL : LC$$

откуда слѣдуетъ:

$$EB^2 . LC = BL^2 . DL = BL^3 + BL^2 . BD$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства по объему $EB^2 . BL$, найдемъ:

$$BL^3 + BD . BL^2 + EB^2 . BL = EB^2 . LC + EB^2 . BL = EB^2 . BC$$

или подставляя вмѣсто BD, EB^2 и $EB^2 . BC$ принятыя выше обозначенія, получимъ:

$$BL^3 + c . BL^2 + b . BL = a$$

откуда видно, что неизвѣстная x есть ничто иное какъ отрѣзокъ BL, т. е.:

$$x = BL.$$

Приведенное только что разсужденіе Алкгаиями *) очевидно основано на слѣдующихъ соображеніяхъ: если примемъ точку B за начало прямоугольной системы координатъ $AM = x$ и $AB = y$, то при принятыхъ обозначеніяхъ уравненіе гиперболы будетъ:

$$x(y + p) = ps$$

а уравненіе круга:

$$y^2 = (x + a)(s - x)$$

Изъ этихъ двухъ уравненій легко найти:

$$x^2(x + c) = p^2(s - x)$$

или:

$$x^3 + cx^2 + p^2 x = p^2 s$$

или наконецъ:

$$x^3 + cx^2 + bx = a$$

Абсцисса $AM = x$, точки пересѣченія M, будетъ, очевидно, корнемъ предложеннаго уравненія третьей степени.

Въ концѣ своего построенія Алкгаиями говоритъ, что: „видъ этотъ не заключаетъ различныхъ случаевъ, а также не представляетъ невозможныхъ вопросовъ". Слова арабскаго геометра понятны, такъ какъ уравненія разсмотрѣннаго вида имѣютъ всегда положительный дѣйствительный корень; другіе же два корня всегда отрицательны или мнимы, смотря по тому пересѣкаетъ-ли нижняя вѣтвь гиперболы кругъ или же не пересѣкаетъ его. Но послѣдніе два корня не принимаются во вниманіе Алкгаиями.

---

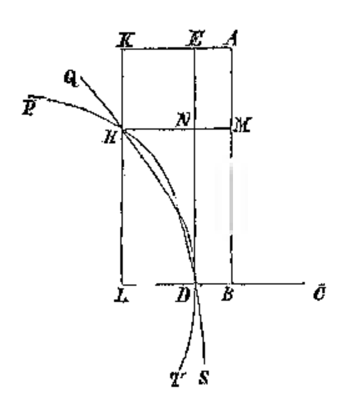
*) *Woepcke*, l'Algèbre d'Omar Alkhayyami, pag. 46—47.

Ко второму виду полныхъ кубическихъ уравненій, перваго класса, принадлежатъ уравненія формы:

$$x^3+cx^2+a=bx$$

или какъ Алкгаими говоритъ: „кубъ, квадраты и числа равны ребрамъ". Геометрическое построеніе корней этого уравненія, данное Алкгаими, заключается въ слѣдующемъ: „Отложимъ AB (фиг. 65) равной сторонѣ квад-

Фиг. 65.



рата, равнаго числу реберъ b, BC равной данному числу квадратовъ c, и проведемъ BC перпендикулярно къ AB. Построимъ тѣло, коего основаніе есть квадратъ AB, равное данному числу a; высоту BD этого объема отложимъ на продолженіи прямой BC. Построимъ прямоугольникъ $BAED$ и чрезъ точку D проведемъ равностороннюю гиперболу $SDHP$, коей ассимптоты суть прямыя AB и AE. Чрезъ ту же точку D проведемъ другую равностороннюю гиперболу $TDHQ$. Пусть вершина этой гиперболѣ будетъ въ точкѣ D, а ось на продолженіи прямой BD. Параметръ и большая ось этой гиперболы соотвѣтственно равны прямой DC. Очевидно оба эти коническія сѣченія пересѣкуться въ точкѣ D. Если оба коническія сѣченія пересѣкутся еще въ одной точкѣ, то вопросъ возможенъ, если же онѣ не пересѣкутся, то вопросъ невозможенъ. Возможность встрѣчи коническихъ сѣченій чрезъ прикосновеніе (въ одной точкѣ), или чрезъ пересѣченіе въ двухъ точкахъ, вполнѣ зависитъ отъ того, что изложено въ четвертой книгѣ „Коническихъ сѣченій". Но, мы выше обѣщали ограничиться только тѣмъ, что изложено въ первыхъ двухъ книгахъ этого сочиненія. Впрочемъ это не касается сказаннаго выше, такъ какъ для насъ совершенно безразлично встрѣчаются ли коническія сѣченія въ видѣ прикосновенія или пересѣченія. Замѣтимъ это. Итакъ встрѣча можетъ быть въ видѣ прикосновенія или пе-

ресѣченія; но если одно изъ коническихъ сѣченій пересѣкаетъ другое въ другой точкѣ D, то очевидно оно пересѣчетъ его въ двухъ точкахъ (кромѣ D)".

„Во всѣхъ случаяхъ опустимъ изъ точки пересѣченія или изъ точки встрѣчи, какая бы она нибыла, напримѣръ изъ точки H два перпендикуляра HM и KHL. Положеніе и величина ихъ будутъ извѣстны, такъ какъ положеніе точки H извѣстно. Очевидно прям. $AMHK =$ прям. $ABDE$; отъ обѣихъ частей этого равенства вычтемъ общій обѣимъ прям. $AMNE$, то останется прям. $ENHK =$ прям. $MBDN$. Къ обѣимъ частямъ этого равенства прибавимъ по прям. $NDLH$, получимъ прям. $EDLK =$ прям. $MBLH$. Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что стороны, а также квадраты сторонъ, этихъ прямоугольниковъ обратно пропорціональны, т. е. будутъ существовать соотношенія:

$$KL^2 : BL^2 = AB^2 : BL^2 = HL^2 : LD^2$$

точно также для гиперболы $TDHQ$, какъ извѣстно, существуетъ равенство $HL^2 = LD . CL$ и

$$HL^2 : LD^2 = CL : LD$$

Сравнивая написанныя двѣ пропорціи, найдемъ:

$$AB^2 : BL^2 = CL : LD$$

откуда слѣдуетъ, что:

$$BL^2 . CL = AB^2 . LD$$

Итакъ мы нашли равенство между двумя объемами: первый въ которомъ основаніе квадратъ BL, а высота CL, а второй основаніе квадратъ AB, а высота LD. Но объемъ $BL^2 . CL$ равенъ суммѣ объемовъ BL^3 и $BL^2 . BC$, т. е.:

$$BL^2 . CL = BL^3 + BL^2 . BC$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по объему $AB^2 . BD$, найдемъ:

$$BL^3 + BL^2 . BC + AB^2 . BD = AB^2 . LD + AB^2 . BD = AB^2 . BL$$

Вводя обозначенія о которыхъ мы говорили въ началѣ, т. е.:

$$AB^2 = b \quad , \quad BC = c \quad , \quad AB^2 . BD = a$$

найдемъ:

$$BL^3 + c . BL^2 + a = b . BL$$

откуда очевидно, что

$$BL = x$$

Итакъ коренъ предложеннаго уравненія третьей степени построенъ". Видъ этотъ, по словамъ Алкгаіями, допускаетъ нѣсколько различныхъ случаевъ: „иногда въ вопросахъ сводимыхъ на этотъ видъ будутъ найдены два ребра, соотвѣтствующія двумъ кубамъ, иногда же вопросы, зависящіе отъ этого вида, не будутъ имѣть рѣшеній. Видъ этотъ рѣшенъ при помощи свойствъ двухъ гиперболъ".

Слова Алкгаіями требуютъ дополнительныхъ объясненій. Уравненіе типа:

$$x^3+cx^2-bx+a=0$$

допускаетъ всегда корень дѣйствительный и отрицательный, о которомъ Алкгаіями не упоминаетъ. Другія два корня этого уравненія или мнимые, т. е. тогда вопросъ „невозможенъ"; или же положительные и равные, т. е.:

$$x=-\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}\sqrt{3b+c^2}$$

это въ случаѣ касанія двухъ гиперболъ; или же оба корня будутъ положительные и неравные, что имѣетъ мѣсто при пересѣченіи гиперболъ въ двухъ точкахъ, кромѣ точки D. Эти случаи и представляютъ очевидно разнообразіе случаевъ о которыхъ упоминаетъ Алкгаіями.

Къ третьему виду полныхъ кубическихъ уравненій, перваго класса, принадлежатъ уравненія типа:

$$x^3+bx+a=cx^2$$

Занимаясь геометрическимъ построеніемъ корней уравненій этого вида Алкгаіями доказываетъ невозможность невозможныхъ случаевъ уравненій этого типа *). Невозможность эту онъ доказываетъ только для одного частнаго случая и потомъ прилагаетъ его прямо къ другимъ случаямъ. На построеніи корней уравненій этого вида мы не остановимся, а перейдемъ къ послѣднему виду уравненій этого класса.

Къ четвертому виду **) принадлежатъ уравненія типа:

$$cx^2+bx+a=x^3$$

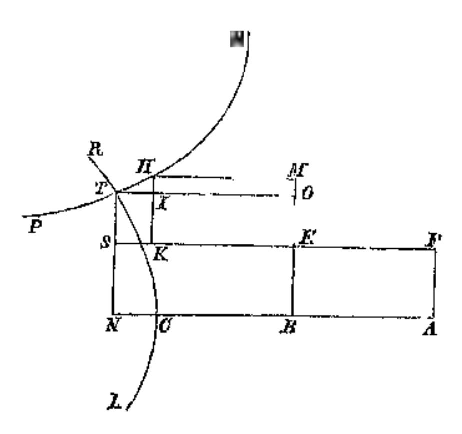
Построеніе Алкгаіями заключается въ слѣдующемъ: „Отложимъ BE (фиг. 66) равной сторонѣ квадрата, равнаго числу реберъ b; построимъ тѣло, котораго основаніе есть квадратъ BE и равное данному числу a. Пусть высота

*) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 52—53.

**) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 57—59.

AB этого объема будетъ перпендикулярна къ BE. На продолженіи AB отложимъ отрѣзокъ BC, равный числу квадратовъ c, и дополнимъ прямоугольникъ $ABEF$.

Фиг. 66.



Продолжимъ BE неопредѣленно до какой нибудь точки M; на прямой EM, которая дана построимъ прямоугольникъ $EMHK$, равный прямоугольнику $ABEF$. Положеніе точки H будетъ извѣстно. Чрезъ точку H проведемъ равностороннюю гиперболу $QHTP$, коей ассимптотами будутъ прямыя EM и ES. Положенія этой гиперболы будетъ извѣстно. Проведемъ еще другую равностороннюю гиперболу $RTCL$, коей вершина въ точкѣ C, ось на продолженіи BC; большая ось этой гиперболы и параметръ пусть будутъ соотвѣтственно равны прямой AC. Положеніе этой гиперболы будетъ извѣстно и она необходимо пересѣчетъ гиперболу $QHTP$. Пусть это пересѣченіе будетъ въ точкѣ T, положеніе которой будетъ извѣстно. Изъ точки T опустимъ два перпендикуляра TO и TN на прямыя BC и BM. Положеніе и величина этихъ перпендикуляровъ будутъ извѣстны. Очевидно, что прям. $TOLS$ = прям. $HMEK$ = прям. $EFAB$. Прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого равенства по прям. $SEBN$, то получимъ: прям. $SFAN$ = прям. $TOBN$. Стороны послѣднихъ двухъ прямоугольниковъ будутъ обратно пропорціональны; тоже будетъ имѣть мѣсто и для квадратовъ этихъ сторонъ. Кромѣ того для гиперболы $RTCL$ существуетъ равенство $TN^2 = NC \cdot AN$. Изъ приведенныхъ соотношеній для обѣихъ гиперболъ видно, что будутъ существовать пропорціи:

$$AN^2 : TN^2 = NB^2 : SN^2 = NB^2 : BE^2$$

$$AN^2 : TN^2 = AN : NC$$

откуда найдемъ соотношеніе:

$$NB^3 : BE^2 = AN : NC$$

или:

$$BE^2 . AN = NB^2 . NC$$

Такимъ образомъ мы нашли равенство между двумя объемами. Также существуетъ равенство между объемами:

$$BE^2 . AN = BE^2 . AB + BE^2 . BN$$

Но объемъ $BE^2 AB$ равенъ данному числу, а объемъ $BE^2 . BN$ равенъ данному числу реберъ куба BN. Къ обѣимъ частямъ только что написаннаго равенства прибавимъ по объему $BN^2 . BC$, выражающему данное число квадратовъ куба BN. Очевидно тогда будемъ имѣть соотношеніе:

$$BE^2 . AN + BN^2 . BC = BE^2 . AB + BE^2 . BN + BN^2 . BC$$

или:

$$BN^2 . NC + BN^2 . BC = BE^2 . AB + BE^2 . BN + BN^2 . BC$$

откуда:

$$BN^3 = BE^2 . AB + BE^2 . BN + BN^2 . BC$$

Вводя обозначенія о которыхъ мы говорили въ началѣ:

$$BE^2 = b \quad , \quad BE^2 . AB = a \quad , \quad BC = c$$

получимъ:

$$a + b . BN + c . BN^2 = BN^3$$

Изъ чего видно, что BN выражается чрезъ x, т. е.:

$$x = BN$$

Въ заключеніи Алкгаиями замѣчаетъ, что: „уравненія этого типа не представляютъ разнообразія случаевъ, ни невозможныхъ вопросовъ". Слова Алкгаиями справедливы въ томъ смыслѣ, что уравненія типа:

$$x^3 - cx^2 - bx - a = 0$$

всегда имѣютъ одинъ корень дѣйствительный и положительный; другіе два корня или мнимые, или же отрицательные, а потому не существуютъ для арабскаго математика.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію геометрическихъ построеній корней полныхъ кубическихъ уравненій втораго класса, примѣняемыхъ Алкгаиями. Къ этому классу Алкгаиями причисляетъ уравненія слѣдующихъ трехъ видовъ:

$$x^3 + cx^2 = bx + a$$

$$x^3 + bx = cx^2 + a$$

$$x^3 + a = cx^2 + bx$$

Приведемъ для примѣра геометрическое построеніе, данное Алкгаіями, для корней уравненій втораго вида. Разсужденія Алкгаіями *) заключаются въ слѣдующемъ:

„Ко *второму* виду четырехчленныхъ уравненій принадлежатъ уравненія: „кубъ и ребра равны квадратамъ и числамъ", или иными словами уравненіе типа:

$$x^3+bx=cx^2+a$$

„Отложимъ отрѣзокъ BC (фиг. 67 и 68) равный данному числу квадратовъ c, и отрѣзокъ BD равный сторонѣ квадрата равнаго числу квадратовъ, т. е. $BD^2=b$ и проведемъ BD перпендикулярно къ BC. Построимъ объемъ равный данному числу, и пусть его основаніе будетъ квадратъ BD. Высота этого объема пусть будетъ S, тогда объемъ выразится чрезъ $BD^2.S=a$. Прямая S можетъ быть меньше BC, или равна прямой BC, или наконецъ больше BC, т. е. можетъ имѣть мѣсто одинъ изъ трехъ случаевъ:

$$S<BC \quad , \quad S=BC \quad , \quad S>BC$$

Предположимъ сначала, что $S<BC$ (фиг. 67). На прямой BC возьмемъ отрѣзокъ BA равный прямой S; построимъ прямоугольникъ $ABDZ$, на

Фиг. 67.

AC, какъ на діаметрѣ, опишемъ кругъ AKC, положеніе котораго будетъ извѣстно; чрезъ точку A проведемъ равностороннюю гиперболу HAT, ассимптотами которой пусть будутъ прямыя BD и DZ; положеніе этой гиперболы будетъ извѣстно. Гипербола HAT пересѣкаетъ касательную AZ къ кругу, а слѣдовательно пересѣкаетъ и самый кругъ, такъ какъ иначе, если бы она падала между кругомъ и AZ, то изъ точки A можно-бы было

*) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 62—65.

провесть къ коническому сѣченію касательную, какъ это показано въ 60 мъ предложеніи, второй книги, сочиненія Аполлонія. Въ такомъ случаѣ эта касательная, могла-бы упасть между AZ и кругомъ, что нелѣпо, или же внѣ AZ, т. е. тогда AZ прямая линія, лежащая между коническимъ сѣченіемъ и его касательной, что также нелѣпо. Слѣдовательно гипербола TAH не лежитъ между кругомъ и AZ, а потому пересѣкаетъ этотъ послѣдній. Очевидно она пересѣчетъ кругъ еще и въ другой точкѣ. Пусть это пересѣченіе будетъ въ точкѣ K, коей положеніе будетъ извѣстно. Изъ этой точки опустимъ перпендикуляры KM и KE на прямыя BC и BD. Положеніе и величина этихъ перпендикуляровъ, очевидно, будутъ извѣстны. Построимъ прямоугольникъ $KMDL$ Прямоугольники $ABDZ$ и $KMDL$ будутъ равны. Изъ равенства:

$$\text{прям. } ABDZ = \text{прям. } KMDL$$

вычтемъ по общему имъ прям. $MDZO$ и прибавимъ по общему имъ прям. $AOKE$, то получимъ очевидно

$$\text{прям. } ABDZ - \text{прям. } MDZO + \text{прям. } AOKE = \text{прям. } KMDL - \text{прям. } MDZO + \text{прям. } AOKE$$

откуда найдемъ, что:

$$\text{прям. } BMKE = \text{прям. } AZLE$$

стороны этихъ двухъ прямоугольниковъ, а равно квадраты сторонъ будутъ обратно пропорціональны. Изъ этого слѣдуетъ соотношеніе

$$KE^2 : EA^2 = LE^2 : BE^2 = BD^2 : BE^2$$

но для круга, кромѣ того, существуетъ соотношеніе:

$$KE^2 : EA^2 = EC : EA$$

Сравнивая написанныя двѣ пропорціи, найдемъ:

$$BD^2 : BE^2 = EC : EA$$

или:

$$BD^2 . EA = BE^2 . EC$$

т. е. мы нашли равенство между двумя объемами, изъ которыхъ первый имѣетъ основаніе BD^2, а высоту EA, а второй основаніе BE^2, а высоту EC. Къ обѣимъ частямъ равенства прибавимъ по кубу BE, т. е. по BE^3, то будемъ имѣть

$$BE^3 + BD^2 . EA = BE^3 + BE^2 . EC$$

или:

$$BE^3+BD^2 . EA = BE^2(BC+EC) = BE^3 . BC$$

но $EA = EB - AB$, слѣдовательно:

$$BE^3+BD^2 . EB = BE^2 . BC + BD^2 . AB$$

подставляя вмѣсто BD^2, BC ихъ величины:

$$BD^2 = b \quad , \quad BC = c \quad , \quad BD^2 . AB = BD . S = a$$

получимъ уравненіе:

$$BE^3+b . EB = c . BE^2+a$$

откуда очевидно x выразится чрезъ:

$$x = BE$$

При положеніи $S = BC$, очевидно BC будетъ стороной искомаго куба и $BC = x$. Доказательство Алкгаиями заключается въ слѣдующемъ. Извѣстно, что:

$$BC^3 = BC . BC^2$$

$$BD^2 . BC = BD^2 . S$$

подставляя вмѣсто BC, BD^2 и $BD^2 . S$ ихъ величины, получимъ:

$$BC^3 = c . BC^2$$

$$b . BC = a$$

Складывая эти два равенства, получимъ:

$$BC^3+b . BC = c . BC^2+a$$

Но, замѣчаетъ Алкгаиями, существуетъ также уравненіе:

$$BC^3+a = c . BC^2+b . BC$$

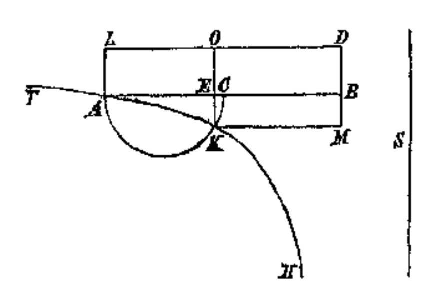
которое принадлежитъ къ типу уравненій этого же класса, но третьяго вида, т. е. къ типу уравненій вида:

$$x^3+a = cx^2+bx$$

Итакъ при этомъ условіи, когда $S = BC$, Алкгаиями сводитъ это уравненіе на уравненія третьяго вида.

Разсмотримъ теперь случай, когда $S > BC$ (фиг. 68). „Отложимъ $BA = S$ и на AC, какъ на діаметрѣ, опишемъ полукругъ. Очевидно, что гипербола $TAKH$, проходящая чрезъ точку A, пересѣчетъ кругъ въ точкѣ K, какъ это мы доказали уже выше. Изъ точки K опустимъ два перпен-

Фиг. 68.



дикуляра KE и KM, какъ это мы сдѣлали, и въ предъидущемъ чертежѣ (фиг. 67). Прямая EB будетъ стороной искомаго куба и доказательство будетъ тождественно съ предъидущимъ. Отнимая общій прямоугольникъ $EBDO$, найдемъ, что стороны прямоугольниковъ $EBMK$ и $EOZA$, а также квадраты этихъ сторонъ обратно пропорціональны; доказательство будетъ тождественно съ предъидущимъ".

Далѣе Алкгаями замѣчаетъ: „Итакъ мы только что доказали, что видъ этотъ заключаетъ различные случаи, и что одинъ изъ этихъ случаевъ принадлежитъ къ числу уравненій третьяго вида. Разсматриваемый видъ не допускаетъ невозможныхъ вопросовъ и рѣшенъ нами при помощи свойствъ круга и гиперболы".

Слова Алкгаями вполнѣ справедливы, такъ какъ уравненія типа:

$$x^3 - cx^2 + bx - a = 0$$

имѣютъ всегда положительный и дѣйствительный корень. Во второмъ и третьемъ изъ разсмотрѣнныхъ частныхъ случаевъ уравненій этого вида, когда $\frac{a}{b} = c$ и $\frac{a}{b} > c$ другіе два корня мнимые; въ первомъ же случаѣ, когда $\frac{a}{b} < c$ они могутъ быть положительны и тогда уравненіе будетъ имѣть *три положительныхъ корня*. Къ сожалѣнію это интересное обстоятельство прошло совершенно незамѣтнымъ для Алкгаями.

На приведенныхъ геометрическихъ построеніяхъ корней уравненія мы остановимся, такъ какъ приведенные примѣры вполнѣ знакомятъ съ мето-

дами рѣшеній уравненій, примѣняемыхъ Омаромъ Алкгаіями. Въ дополненіи сказаннаго сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній. Число различныхъ видовъ уравненій разсмотрѣнныхъ Алкгаіями въ значительной степени сократилось бы, если-бы ему было извѣстно, что въ общемъ уравненіи третьей степени всегда можно исключить второй членъ. При рѣшеніи уравненій Алкгаіями принимаетъ во вниманіе только положительные дѣйствительные корни, совершенно упуская изъ вида отрицательные и мнимые. Если только уравненіе не имѣетъ дѣйствительныхъ положительныхъ корней, то Омаръ считаетъ вопросъ „невозможнымъ". Въ виду этого онъ въ перечисленіи видовъ уравненій не упоминаетъ тѣхъ формъ въ которыхъ сумма всѣхъ членовъ приравнена нулю, т. е. у него совершенно нѣтъ уравненій видовъ:

$$x+a=0\quad,\quad x^2+a=0\quad,\quad x^2+bx+a=0\quad,\quad x^3+a=0,$$

$$x^3+bx+a=0\quad,\quad x^3+cx^2+a=0\quad,\quad x^3+cx^2+bx+a=0$$

Алкгаіями, подобно другимъ арабскимъ математикамъ, не могъ имѣть представленія о такихъ формахъ, такъ какъ онъ разсматривалъ всегда всѣ члены уравненія и само неизвѣстное существенно положительными. Къ чести Алкгаіями необходимо замѣтить, что на упомянутые виды первый обратилъ вниманіе только Декартъ, другіе же математики, занимавшіеся рѣшеніемъ уравненій, какъ напримѣръ Карданъ, Віетъ, Гарріотъ и др. также неупотребляли этихъ видовъ, хотя Гарріотъ былъ первый, начавшій писать уравненія въ видѣ суммы приравненной нулю.

Весьма странно, что Алкгаіями не замѣтилъ существованія отрицательныхъ корней при построеніи нѣкоторыхъ уравненій третьей степени, причина этого вѣроятно та, что при своихъ построеніяхъ онъ подобно всѣмъ вообще арабскимъ математикамъ производилъ свои построенія не достаточно полно. Въ существованіи отрицательныхъ корней онъ непремѣнно бы убѣдился если бы чертилъ вмѣсто полукруговъ, полупараболъ и одной только вѣтви гиперболъ—полные круги, полные параболы и обѣ вѣтви гиперболъ. Благодаря также такому недостатку въ построеніяхъ онъ не замѣтилъ существованія двухъ положительныхъ корней въ уравненіи (см. стр. 610). Мы уже выше замѣтили какъ при построеніи одного изъ видовъ уравненій третьей степени Алкгаіями незамѣтилъ существованія трехъ положительныхъ корней и строитъ только одинъ. Весьма можетъ быть, что если бы Алкгаіями замѣтилъ существованіе трехъ корней въ уравненіи третьей степени и зналъ еще, извѣстное уже Магомету-бенъ-Музѣ, существованіе двухъ корней для одного изъ уравненій второй степени, имъ была бы замѣчена связь между степенью уравненія и числомъ корней. Не смотря на указанные недостатки Алкгаіями совершенно вѣрно опредѣляетъ число по-

ложительныхъ дѣйствительныхъ корней въ уравненіяхъ, т. е. находитъ вполнѣ вѣрно число точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, при помощи которыхъ построено уравненіе; число точекъ пересѣченія онъ опредѣляетъ только со стороны положительныхъ концовъ осей координатъ. Въ виду этого онъ находитъ только по одному рѣшенію для уравненій въ которыхъ извѣстный членъ съ отрицательнымъ знакомъ. По два рѣшенія Алкгаіями находитъ для уравненій у которыхъ извѣстный членъ положительный. Число корней Алкгаіями совершенно вѣрно опредѣляетъ числомъ точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, но при случаѣ касанія двухъ коническихъ сѣченій онъ не замѣчаетъ равенства двухъ корней и принимаетъ это за одинъ корень уравненія. Также совершенно вѣрно найденъ Алкгаіями геометрическій критеріумъ существованія двухъ положительныхъ корней въ уравненіяхъ и случаи когда коническія сѣченія пересѣкаются или только касаются. Къ сожалѣнію Алкгаіями не обратилъ вниманія на связь существующую между коэффиціентами уравненія, представляющую предѣлъ, который выражается касаніемъ двухъ коническихъ сѣченій.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію *четвертой* части алгебраическаго трактата Омара Алкгаіями *). Въ этомъ отдѣлѣ авторъ разсматриваетъ уравненія, содержащія дробныя части степеней неизвѣстнаго и показываетъ какъ онѣ рѣшаются. Рѣшеніе этихъ уравненій Алкгаіями сводитъ на рѣшеніе разсмотрѣнныхъ нами уже выше уравненій. Въ началѣ этого отдѣла Алкгаіями опредѣляетъ, что онъ понимаетъ подъ названіемъ части неизвѣстнаго, онъ говоритъ: „часть *вещи* есть число, которое такъ относиться къ единицѣ, какъ единица относиться къ вещи". Опредѣленіе это онъ поясняетъ на частныхъ примѣрахъ. Слова Алкгаіями очевидно суть ничто иное какъ соотношенія:

$$\frac{1}{x} : 1 = 1 : x \quad , \quad \frac{1}{3} : 1 = 1 : 3 \quad , \quad \frac{1}{4} : 1 = 1 : 4$$

Послѣднія два равенства имѣютъ мѣсто при положеніяхъ: $x = 3$ и $x = 4$.

Далѣе Алкгаіями замѣчаетъ, что величины:

$$\frac{1}{x^3} , \frac{1}{x^2} , \frac{1}{x} , 1 , x , x^2 , x^3$$

составляютъ непрерывную пропорцію. Тоже, по его словамъ, имѣетъ мѣсто и для высшихъ степеней, но онъ о нихъ не будетъ говорить, такъ какъ несуществуетъ средствъ рѣшать уравненія, содержащія эти степени.

---

*) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, pag. 68—81.

Методъ рѣшенія уравненій съ дробными частями неизвѣстной, употребленный Алкгаими, заключается въ слѣдующемъ: пусть напр. даны уравненія:

$$\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = 1\frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{x^3} + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x} = 3\frac{3}{8}$$

уравненія эти онъ рѣшаетъ, рѣшивъ предварительно уравненія формы:

$$z^2 + 2z = 1\frac{1}{4} \qquad \text{и} \qquad z^3 + 3z^2 + 5z = 3\frac{3}{8}$$

Для перваго изъ послѣднихъ двухъ уравненій мы находимъ, очевидно, $z^2 = \frac{1}{4}$, слѣдовательно $x^2 = 4$, а потому $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Второе изъ послѣднихъ двухъ уравненій Алкгаими рѣшаетъ при помощи коническихъ сѣченій, какъ это онъ дѣлаетъ для уравненій разсмотрѣнныхъ уже прежде. Далѣе Алкгаими замѣчаетъ, что „если предложенъ вопросъ: какой квадратъ равенъ извѣстному числу частей куба его стороны?, то рѣшеніе этого вопроса не можетъ быть выполнено при помощи изложенныхъ нами методовъ, такъ какъ оно зависитъ отъ нахожденія четырехъ средне-пропорціональныхъ линій между двумя данными, т. е. отъ нахожденія шести линій, находящихся между собой въ непрерывной пропорціи. Это было показано Абулъ-Али-Ибнъ-Алгайтамомъ. Только необходимо замѣтить, что построеніе это довольно трудное, вслѣдствіи чего мы не можемъ его показать въ настоящемъ сочиненіи". Вопросъ о которомъ говоритъ Алкгаими приводиться очевидно къ рѣшенію уравненія:

$$x^2 = a \cdot \frac{1}{x^3}$$

или:

$$x^5 = a$$

Вопросъ этотъ, по словамъ Алкгаими, можетъ быть рѣшенъ найдя предварительно четыре линіи x, y, u, v такихъ свойствъ, чтобы существовало соотношеніе:

$$1 : x = x : y = y : u = u : v = v : a$$

т. е. найти четыре линіи x, y, u, v средне-пропорціональныя между двумя данными 1 и a. Изъ написанной пропорціи прямо слѣдуетъ, что:

$$x^5 = a \quad \text{или} \quad x^2 = a \cdot \frac{1}{x^3}$$

Изъ сказаннаго видно, что вопросъ о которомъ говоритъ Алкгаими зави-

ситъ отъ рѣшенія уравненія пятой степени. Построеніе корней этого уравненія, примѣняемое арабскими геометрами, неизвѣстно. Вепке высказываетъ предположеніе не было-ли это построеніе извѣстный уже прежде, въ древности, пріемъ Эратосѳена *).

Въ концѣ этого отдѣла Алкгаіями перечисляетъ число различныхъ видовъ уравненій, которыя могутъ быть рѣшены при помощи указанныхъ имъ методовъ.

Въ заключеніи этого отдѣла, на которомъ собственно оканчивается сочиненіе Алкгаіями, авторъ говоритъ: „Для всякаго глубоко изучившаго предложенія изложенныя въ этомъ сочиненіи, и вмѣстѣ съ тѣмъ обладающаго извѣстной силой природнаго ума, а также привычнаго заниматься математическими вопросами, не будетъ болѣе существовать ничего темнаго въ вопросахъ, которые представляли столь большія трудности для геометровъ предшествующихъ временъ".

Въ *пятомъ* отдѣлѣ заключаются дополнительныя замѣчанія **), сдѣланныя Омаромъ пять лѣтъ спустя послѣ составленія своего трактата.

Въ прибавленіяхъ къ своему сочиненію Омаръ упоминаетъ, что онъ слыхалъ, что Абулъ Джудъ написалъ также сочиненіе по тому же предмету, какъ и написанное имъ. Въ сочиненіи этомъ было показано Абулъ Джудомъ приведеніе рѣшенія различныхъ вопросовъ къ свойствамъ коническихъ сѣченій. Алкгаіями проситъ лицъ, которымъ попадется въ руки сочиненіе Абулъ Джуда, сравнить его съ сочиненіемъ написаннымъ имъ. Далѣе Омаръ обращаетъ вниманіе на нѣкоторыя погрѣшности, сдѣланныя Абулъ Джудомъ при рѣшеніи одного вопроса, зависящаго отъ неполнаго уравненія третьей степени.

Познакомившись съ содержаніемъ сочиненія Алкгаіями и показавъ методы, употребленные имъ для геометрическаго построенія уравненій второй и третьей степеней, скажемъ нѣсколько словъ о рѣшеніи уравненій

---

*) О пріемѣ Эратосѳена мы упоминали выше (см. стр 109) Пріемъ этотъ сохранился въ дошедшихъ до насъ отрывкахъ сочиненій Эратосѳена, а также въ комментаріяхъ Евтокія на сочиненіе Архимеда „О шарѣ и цилиндрѣ". Отрывокъ въ которомъ находится этотъ пріемъ изданъ въ сочиненіи: *Hiller*, Eratosthenis carminum reliquiae, Lipsiae, 1872, in-8, pag. 122—137. См. также статью: Notice historique sur la duplication du cube. (Напечатано въ сборникѣ: *Terquem*, Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques. T. II. Paris. 1856. in-8, pag. 20—30). Въ концѣ этой статьи помѣщенъ интересный списокъ сочиненій, въ которыхъ находятся рѣшенія, или попытки рѣшить, извѣстную задачу объ удвоеніи куба. Списокъ этотъ заимствованъ изъ сочиненія Реймера.

**) *Woepcke*, L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 81—88.

высшихъ степеней, встрѣчающихся въ сочиненіяхъ арабскихъ математиковъ.

Общаго метода рѣшенія уравненій четвертой степени у арабскихъ геометровъ несуществовало, весьма вѣроятно потому, что, какъ мы замѣтили выше, четвертая степень представлялась арабскимъ геометрамъ понятіемъ выходящимъ изъ предѣла величинъ измѣримыхъ геометрически. Алкгаиями въ своемъ сочиненіи говоритъ, что при помощи показанныхъ имъ методовъ, построеніе уравненій четвертой степени невозможно*). Изъ приведенныхъ словъ Алкгаиями видно, что ему не было извѣстно построеніе корней уравненій четвертой степени при помощи пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій. Подобное построеніе находиться въ дошедшемъ до насъ отрывкѣ рукописи неизвѣстнаго автора, хранящейся въ Лейденской библіотекѣ. На содержаніе этой рукописи обратилъ вниманіе первый Вепке въ прибавленіяхъ къ изданной имъ „Алгебрѣ" Алкгаиями**). Впослѣдствіи отрывокъ этотъ онъ издалъ***) и комментировалъ. Авторъ сочиненія неизвѣстенъ, точно также неизвѣстно когда оно написано; судя по нѣкоторымъ другимъ сочиненіямъ, находящимся въ этой рукописи, можно полагать, что она относиться къ XI вѣку, т. е. написана почти одновременно съ „Алгеброй" Омара Алкгаіями.

Мы уже выше упоминали (см. стр. 539), что вопросомъ о построеніи корней уравненій четвертой степени занимался уже Абулъ Вефа, жившій въ X вѣкѣ. Методы его до насъ не дошли, а равно намъ ничего неизвѣстно о вопросахъ, которые онъ рѣшалъ, единственное указаніе сохранилось въ дошедшемъ до насъ заглавіи одного изъ его сочиненій, которое озаглавлено: „О способѣ найти стороны куба и квадрато-квадрата, а также выраженій, составленныхъ изъ этихъ двухъ степеней". По мнѣнію Вепке, въ этомъ сочиненіи Абулъ Вефа занимался геометрическимъ построеніемъ уравненій вида:

$$x^3 = a \quad , \quad x^4 = a \quad , \quad x^4 + ax^3 = b$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій, какъ извѣстно, можетъ быть рѣшено при помощи пересѣченія параболы $x^2 = y$ и гиперболы $y^2 + axy = b$.

Вопросъ, разсмотрѣнный въ сочиненіи анонимнаго автора и рѣшенный имъ при помощи уравненія четвертой степени, заключается въ слѣ-

---

*) *Woepcke,* L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 79.

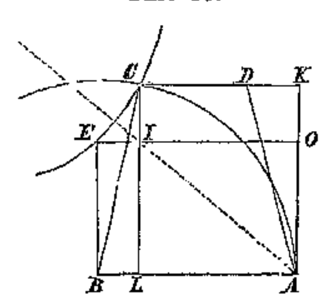
**) *Woepcke,* L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmi, pag. 115—116.

***) *F. Woepcke,* Sur la construction des équations du quatrième degré par les géomètres arabes. Помѣщено въ Journal de mathématiques pures et appliquées. Deuxième Série, T. VIII. 1863. pag. 57—70.



дующемъ: построить трапецію $ABCD$, коей нижнее основаніе AB и боковыя стороны BC и AD, каждая соотвѣтственно равны 10, а площадь 90; требуется найти верхнее основаніе CD (фиг. 69). Задача эта рѣшена

Фиг. 69.



при помощи слѣдующаго построенія: Пусть $ABCD$ данная трапеція и $AB = BC = AD = a$, площадь ея пусть будетъ b^2; отложимъ $BE = \frac{b^2}{a}$, построимъ прямоугольникъ $ABEO$ и чрезъ точку E проведемъ гиперболу EC, коей ассимптотами будутъ прямыя AB и AO. Уравненіе этой гиперболы, относительно начала координатъ въ точкѣ B, очевидно будетъ:

$$(a-x)y = b^2$$

Около точки B, радіусомъ AB, опишемъ кругъ, который необходимо пересѣчетъ гиперболу, такъ какъ $AB > BE$. Уравненіе этого круга есть:

$$x^2+y^2 = a^2$$

Проведемъ прямую $AD = AB$ и построимъ уголъ $BAD = ABC$, отложимъ $AD = BC$, получимъ трапецію $ABCD$, которая и есть требуемая.

Исключая y изъ уравненій гиперболы и круга, очевидно получимъ уравненіе четвертой степени:

$$x^4-2ax^3+2a^3x-a^4+b^4=0$$

или для разсматриваемаго частнаго случая, уравненіе:

$$x^4-20x^3+2000x-1900=0$$

Мы привели только основную мысль и методъ анонимнаго автора, не приводя всѣхъ его разсужденій при рѣшеніи, разсмотрѣннаго вопроса. Изъ содержанія рукописи можно думать, что сочиненіе анонимнаго автора есть

отвѣтъ на предложенный ему однимъ ученымъ вопросъ, относительно того, къ какому именно виду алгебраическихъ линій слѣдуетъ причислить прямую CD, которую требуется построить? Изъ содержанія сочиненія анонимнаго автора видно, что арабскіе математики понимали, что корни уравненій различныхъ степеней, суть величины существенно отличныя другъ отъ друга. Они знали, что корни уравненій третьей степени, какъ напримѣръ стороны правильныхъ семиугольника и девятиугольника, не могутъ быть выражены при помощи выраженій, составленныхъ изъ радикаловъ второй степени. Впослѣдствіи, даны были доказательства невозможности выразить корень уравненія третьей степени при помощи ирраціональныхъ величинъ, извѣстныхъ Евклиду. Такое доказательство дано было также Леонардомъ Пизанскимъ; было-ли это доказательство найдено имъ самостоятельно, или заимствовано изъ арабскихъ сочиненій, неизвѣстно *).

На этомъ мы и закончимъ обозрѣніе различныхъ методовъ построенія и рѣшенія уравненій различныхъ степеней, встрѣчаемые въ сочиненіяхъ арабскихъ математиковъ. Мы разсмотрѣли всѣ методы геометрическаго построенія корней уравненій первыхъ четырехъ степеней, вопросъ этотъ мы старались изложить достаточно полно. Особенное вниманіе мы обратили на методы построенія уравненій третьей степени, примѣняемые Омаромъ Алкгайями. На сколько намъ извѣстно, интересныя построенія Омара, извѣстны весьма немногимъ и къ сожалѣнію на нихъ обращаютъ слишкомъ мало вниманія. Такъ напримѣръ, Канторъ въ своей „Исторіи математики" упоминаетъ только мимоходомъ объ этихъ построеніяхъ **). Методы геометрическаго построенія уравненій второй степени были разобраны довольно подробно Маттисеномъ, сравнившимъ методы Алкгайями, Магомета-бенъ-Музы и Евклида; также нѣкоторыя изъ построеній корней уравненій третьей степени разобраны имъ ***). Построенія корней уравненій второй степени, примѣняемыя арабскими геометрами, Маттисенъ сравнилъ съ методами индусскихъ математиковъ.

Геберъ. Изъ числа многочисленныхъ испанскихъ астрономовъ наиболѣе извѣстенъ *Абуль-Магометъ Джабиръ-ибнъ-Афла*, называемый обыкновенно

*) Доказательство Леонарда Пизанскаго можно найти въ статьѣ *Woepcke*, Sur un essai de determiner la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni. Помѣщено въ Journal de mathématiques pures et appliquées. T. XIX, 1854, pag. 401—406.

**) *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I. Leipzig. 1880. pag. 666—668.

***) *Matthiessen*, Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig. 1878, in-8. См. pag 282—311, 945—948, 953—954.

Геберомъ *). Онъ жилъ въ XI в. въ Севильѣ. Арабы называли его *Алишбили (Alischbili)*, т. е. изъ Севильи. Имя Гебера особенно извѣстно тѣмъ, что долгое время ошибочно производили отъ него названіе термина Алгебра. Геберъ принадлежалъ къ числу самыхъ выдающихся астрономовъ своего времени и подобно многимъ своимъ современникамъ, одновременно съ Астрономіей, занимался составленіемъ сочиненій мистическаго содержанія. Изъ астрономическихъ сочиненій Гебера въ настоящее время извѣстна Астрономія въ девяти книгахъ, переведенная въ XII вѣкѣ на латинскій языкъ извѣстнымъ переводчикомъ Герардомъ Кремонскимъ. Впослѣдствіи переводъ этотъ былъ изданъ въ 1534 году **).

Въ началѣ своего сочиненія Геберъ ссылается на „Альмагестъ" Птоломея и на сочиненія Менелая и Теодосія; чтеніе послѣднихъ двухъ авторовъ онъ считаетъ затруднительнымъ ***). Первая часть „Астрономіи" Гебера заключаетъ довольно полный трактатъ по Тригонометріи. Онъ доказываетъ нѣкоторыя изъ предложеній „Сферикъ" Теодосія. Особеннаго вниманія заслуживаетъ въ Тригонометріи Гебера, попытка сдѣланная имъ для замѣны извѣстнаго предложенія *правила шести величинъ* другимъ, болѣе простымъ, названнымъ правиломъ *четырехъ величинъ*. До Гебера ни одинъ изъ арабскихъ математиковъ не сдѣлалъ подобнаго нововведенія. Правило шести величинъ — *regula sex quantitatum* заключается въ слѣдующемъ: если прямолинейный треугольникъ пересѣчь прямой линіей, то произведеніе трехъ отрѣзковъ сторонъ, не имѣющихъ общихъ оконечностей, равно произведенію трехъ остальныхъ отрѣзковъ. Для сферическаго треугольника предложеніе это принимаетъ немного иную форму, именно вмѣсто отрѣзковъ берутся двойныя хорды, стягивающія эти отрѣзки. Называя отрѣзки сторонъ треугольника чрезъ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 правило шести величинъ представится въ формѣ:

$$a_1 : b_1 = b_2 \,.\, b_3 : a_2 \,.\, a_3$$

Въ такой формѣ встрѣчается это предложеніе у Менелая и другихъ математиковъ до XVI вѣка. Въ видѣ:

$$a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 = b_1 \,.\, b_2 \,.\, b_3$$

*) Мы о немъ упоминали уже выше (см. стр. 249). Арабскихъ ученыхъ, носившихъ имя Гебера, было нѣсколько, а потому происходитъ часто путаница (см. примѣч. на стр. 254).

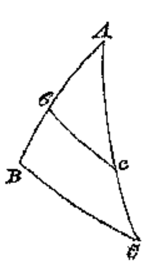
**) Gebri filii Affla Hispalensis, de Astronomiâ libri IX, in quibus Ptolemaeum, alioqui doctissimum emendavit, alicubi industriâ superavit. Omnibus Astronomiae studiosis haud dubiè utilissimi futuri. Per magistrum Girardum Cremonensem, in latinum versi. Norimbergae, 1533 et 1534, industriâ P. Apiani. Norimbergae, 1534, in-4.

***) Краткое изложеніе содержанія „Астрономіи" Гебера находиться въ сочиненіи: *Delambre*, Histoire de l'Astronomie du Moyen Age. Paris, 1819, in-4, pag. 179—185.

предложеніе это никогда не писали, хотя послѣдняя форма, представляющая равенство объемовъ двухъ параллелепипедовъ, болѣе проста.

Правило *четырехъ величинъ*, введенное Геберомъ, состоитъ въ слѣдующемъ: если даны два прямоугольныхъ сферическихъ треугольника ABC и

Фиг. 70.

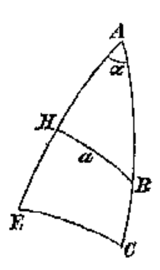


Abc, съ общимъ угломъ при A (фиг. 70), то всегда существуетъ соотношеніе:

$$\operatorname{Sin} AB : \operatorname{Sin} BC = \operatorname{Sin} Ab : \operatorname{Sin} bc$$

Предположимъ теперь, что данъ прямоугольный сферическій треугольникъ ABH, съ прямымъ угломъ при вершинѣ H (фиг. 71). Введемъ обозначенія

Фиг. 71.



$\angle BAH = \alpha$, $BH = a$ и $AB = h$. Продолжимъ стороны AB и AH до точекъ C и E, которыя отстоятъ каждая отъ вершины A на 90^0; точка A будетъ полюсомъ дуги EC, а потому она будетъ служить мѣрою угла A, или по нашему обозначенію угла α. По правилу четырехъ величинъ очевидно существуетъ равенство:

$$\operatorname{Sin} AC : \operatorname{Sin} CE = \operatorname{Sin} AB : \operatorname{Sin} BH$$

или, вводя обозначенія:

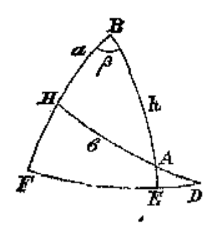
$$\operatorname{Sin} 90^0 : \operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Sin} h : \operatorname{Sin} a$$

откуда:

$$\operatorname{Sin} a = \operatorname{Sin} h \,.\, \operatorname{Sin} \alpha \qquad (1)$$

Возьмемъ теперь другой сферическій треугольникъ ABH (фиг. 72) также прямоугольный при вершинѣ H. Обозначимъ $AH = b$ и $\angle ABH = \beta$

Фиг. 72.



продолжимъ стороны BA и BH до точекъ F и E и отложимъ $BF = 90^0$ и $BE = 90^0$. Очевидно, что углы $\angle BFE$ и $\angle BEF$ соотвѣтственно равны каждый 90^0. Дуги FE и HA пересѣкаются въ точкѣ D, а такъ какъ углы BHD и BFD, каждый равенъ 90^0, то точка D есть полюсъ дуги HF и отстоитъ отъ нея поэтому на 90^0, т. е. дуга $DH = 90^0$. Такъ какъ дуги HF и AE перпендикулярны къ дугѣ FE, то по извѣстному правилу четырехъ величинъ, существуетъ соотношеніе:

$$\operatorname{Sin} DA : \operatorname{Sin} AE = \operatorname{Sin} DH : \operatorname{Sin} HF$$

или вводя наши обозначенія:

$$\operatorname{Sin}(90^0 - b) : \operatorname{Sin}(90^0 - h) = \operatorname{Sin} 90^0 : \operatorname{Sin}(90^0 - a)$$

или:

$$\operatorname{Cos} h = \operatorname{Cos} a \,.\, \operatorname{Cos} b \qquad (2)$$

Кромѣ приведенныхъ соотношеній (1) и (2) существуетъ еще одно, именно: треугольникъ DEA прямоугольный при вершинѣ E, а потому по извѣстному уже правилу (1) будемъ имѣть соотношеніе:

$$\operatorname{Sin} DE = \operatorname{Sin} DA \,.\, \operatorname{Sin} DAE$$

или вводя наши обозначенія:

$$\operatorname{Sin}(90^0 - \beta) = \operatorname{Sin}(90^0 - b) \,.\, \operatorname{Sin} \alpha$$

или:

$$\operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Cos} b \,.\, \operatorname{Sin} \alpha \qquad (3)$$

Послѣдняя формула (3) есть ничто иное какъ извѣстная, такъ называемая *пятая*, основная формула, выражающая связь между сторонами и

углами прямоугольнаго сферическаго треугольника. Формула эта обыкновенно встрѣчается въ видѣ выраженія:

$$\text{Cos}\, C = \text{Sin}\, B \,.\, \text{Cos}\, c$$

гдѣ A, B и C углы, а a, b и c стороны сферическаго треугольника ABC.

Приведенная формула встрѣчается первый разъ въ сочиненіи Гебера, а потому носитъ названіе *предложенія Гебера*. Ни въ одномъ изъ другихъ сочиненій арабскихъ математиковъ, ни въ „Альмагестѣ" Птоломея, предложенія этого невстрѣчается. Предложенія (1), (2) и (3) составляютъ 13, 15 и 14-е предложенія „Астрономіи" Гебера. Указанныя предложенія показываютъ какія важныя нововведенія сдѣлалъ Геберъ въ Сферической Тригонометріи. Прямолинейная же Тригонометрія оставлена имъ въ томъ же состояніи, въ какомъ она находиться въ сочиненіи Птоломея. Какъ мало подвинута была впередъ прямолинейная тригонометрія во время Гебера видно изъ того, что онъ избѣгаетъ въ вычисленіяхъ примѣненія Sin и Cos и подобно греческимъ астрономамъ ограничивается употребленіемъ хордъ двойныхъ угловъ *). На усовершенствованіе прямолинейной Тригонометріи обратилъ вниманіе первый снова извѣстный Регіомонтанусъ въ XV столѣтіи.

Аверроэсъ. Къ числу арабскихъ математиковъ XII вѣка принадлежитъ также знаменитый врачъ и философъ *Абенъ-Рохдъ* или *Абенъ-Рошдъ*, извѣстный болѣе подъ латинизированнымъ именемъ *Аверроэса* **). Онъ родился въ 1120 г. въ Кордовѣ, а умеръ въ 1198 г. въ Марокко. Жизнь Аверроэса полна приключеній, онъ много терпѣлъ отъ преслѣдованій, которымъ подвергался со стороны калифовъ за свободомысліе. Во время Аверроэса начинается упадокъ наукъ у испанскихъ арабовъ, многіе знаменитые ученые подвергаются различнымъ преслѣдованіямъ; общей участи не избѣгли также Авиценна и знаменитый географъ Едриси, нашедшій пріютъ у норманскихъ королей, стремившихся собрать около себя возможно большое число

*) Развитіе Тригонометріи у арабовъ довольно обстоятельно изложено въ сочиненіи *Hankel*, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, pag. 280—293.

**) Ни одно изъ арабскихъ именъ не претерпѣло столькихъ видоизмѣненій, какъ имя *Ибнъ-Рошда*. Приставка *Ибнъ* обратилась въ еврейскихъ рукописяхъ въ *Абенъ* и *Авенъ*. Названіе *Аверроэсъ* постепенно произошло отъ названій: *Ibn-Roschd*, *Ibn-Rusd*, *Ibn-Ruschd*, *Ben-Resched*, *Aben-Rassad*, *Aben-Rois*, *Aben-Rasd*, *Avenrosd*, *Adoroys*, *Avenroyth*, *Averroysta*. Подобныя измѣненія претерпѣли и имена другихъ арабскихъ ученыхъ; нѣкоторые изъ современниковъ Аверроэса у европейскихъ ученыхъ были также извѣстны подъ другими названіями, такъ напримѣръ, *Ибнъ-Тофайлъ* (Ibn-Tofaïl) у схоластиковъ былъ извѣстенъ подъ именемъ *Abubacer'a*, *Ибнъ-Баджа* (Ibn-Bâdja) *Avempace*, *Ибнъ-Зоръ* (Ibn-Zohr)—*Avenzoar'a*, *Ибнъ-Габиролъ* (Ibn-Gabirol) -*Avicebron* и т. п.

ученыхъ и начинавшихъ покровительствовать развитію наукъ и искусствъ. Въ такомъ направленіи болѣе всего дѣйствовалъ просвѣщенный Гогенштауфенъ Фридрихъ II, собравшій при своемъ дворѣ много магометанскихъ ученыхъ. По словамъ нѣкоторыхъ писателей при дворѣ Фридриха II нашли также убѣжище сыновья Аверроэса *).

Аверроэсъ авторъ многочисленныхъ сочиненій по различнымъ отраслямъ человѣческихъ знаній. Число сочиненій, написанныхъ имъ, доходитъ до семидесяти. Наибольшей извѣстностью пользовался его трактатъ по медицинѣ **) и различные комментаріи на сочиненія Аристотеля ***). Къ сожалѣнію до насъ дошла только незначительная часть этихъ сочиненій, остальныя же извѣстны намъ только по заглавіямъ. Дошедшія до насъ списки сочиненій Аверроэса принадлежатъ уже позднѣйшему времени; большая часть ихъ заключаютъ переводы на еврейскій языкъ. Благодаря послѣднему обстоятельству и слухамъ, распространеннымъ врагами Аверроэса, существовало мнѣніе, что самъ Аверроэсъ былъ еврей.

Изъ математическихъ сочиненій Аверроэса извѣстенъ его астрономическій трактатъ подъ заглавіемъ: „Сокращенный Альмагестъ", дошедшій

*) Вліяніе арабовъ въ Сициліи и южной Италіи было столь сильно, что почти весь народъ зналъ арабскій языкъ, на общественныхъ памятникахъ были арабскія надписи, чеканились монеты съ арабскими надписями. Такія монеты чеканились и во время Фридриха II. Большая часть монетъ, чеканенныхъ во время норманскихъ королей, носятъ латинскія и арабскія надписи. Впослѣдствіи арабскія надписи принимались многими за простыя украшенія, или арабески.

**) Къ числу болѣе извѣстныхъ медицинскихъ сочиненій Аверроэса принадлежитъ его обширный трактатъ по медицинѣ въ семи книгахъ. Сочиненіе это озаглавлено *Cullìyyât*, т. е. *общности* или трактатъ о совокупности человѣческаго тѣла. Въ Средніе Вѣка сочиненіе это было извѣстно подъ заглавіемъ „*Colliget*", которое нѣкоторые ученые неправильно производили отъ латинскаго слова *colligo*. Кромѣ этого медицинскаго трактата извѣстно еще семнадцать сочиненій медицинскаго содержанія, написанныхъ Аверроэсомъ.

***) Дошедшія до насъ рукописи сочиненій Аверроэса, заключающія переводы и комментаріи сочиненій древнихъ греческихъ философовъ, какъ напр. комментаріи на сочиненія Аристотеля, которыми такъ много занимался Аверроэсъ, крайне неудовлетворительны и темны; многое передано превратно и неточно. Причина этому та, что при составленіи своихъ комментарій Аверроэсъ пользовался не подлинными текстами этихъ сочиненій а переводами на арабскій языкъ, которые въ свою очередь были переводы съ сирійскаго. Нѣтъ ничего удивительнаго, какъ справедливо замѣтилъ Ренанъ, если многія изъ напечатанныхъ сочиненій Аверроэса заключаютъ превратныя толкованія и объясненія мыслей авторовъ. Напечатанные переводы заключаютъ ни что иное, какъ латинскій переводъ, сдѣланный съ еврейскаго перевода, арабскаго комментарія съ сирійскаго перевода подлиннаго греческаго текста. При такомъ способѣ перевода и комментированія едва-ли могли заключать правильное толкованіе мысли автора сочиненія.

до насъ въ многочисленныхъ спискахъ на еврейскомъ языкѣ. Кромѣ этого сочиненія Аверроэсъ написалъ еще сочиненіе подъ заглавіемъ: „*De motu sphaerae coelestis*" и трактатъ о видимомъ положеній неподвижныхъ звѣздъ. Послѣднія два сочиненія до насъ не дошли. Первое изъ поименованныхъ сочиненій Аверроэса, какъ показываетъ само его заглавіе, есть извлеченіе изъ знаменитаго трактата Птоломея „Альмагестъ". Въ своихъ комментаріяхъ на сочиненіе Аристотеля „О небѣ" Аверроэсъ говоритъ, что онъ собирается написать сочиненіе, въ которомъ будетъ изложено состояніе астрономіи во время Аристотеля; въ этомъ сочиненіи онъ хотѣлъ опровергнуть теорію эпициклъ и эксцентриковъ и согласовать астрономію съ физикой Аристотеля. Къ сожалѣнію на послѣднее сочиненіе нѣтъ никакихъ другихъ указаній, и весьма вѣроятно что оно не было написано Аверроэсомъ.

Особенной славой пользовался Аверроэсъ, на Западѣ, какъ комментаторъ и толкователь сочиненій Аристотеля. Изъ числа такихъ комментаріевъ до насъ дошли на еврейскомъ языкѣ слѣдующіе: комментаріи на сочиненіе Аристотеля „*De coelo et mundo*", сдѣланные Аверроэсомъ въ 1171 г. въ Севильѣ; комментаріи на „Метафизику", сдѣланные въ Кордовѣ, въ 1174 г. Также пользовался извѣстностью его трактатъ „*De Substantia Orbis*", написанный въ 1178 г., въ Мороккo. Рѣдкое сочиненіе выдерживало столько изданій, какъ нѣкоторыя изъ сочиненій Аверроэса. Начиная съ открытія книгопечатанія философскія и медицинскія сочиненія Аверроэса не переставали появлятся постоянно новыми изданіями, въ различныхъ городахъ *).

Мы уже сказали выше, что Аверроэсъ обратилъ особенное вниманіе на сочиненія Аристотеля, которыя онъ комментировалъ **). Будучи сторонникомъ аристотелевской философіи Аверроэсъ много содѣйствовалъ распространенію началъ этого ученія среди современниковъ. Впослѣдствіи, въ Средніе Вѣка и въ эпоху возрожденія наукъ на Западѣ, многіе считали Аверроэса представителемъ особой философской школы, начала которой были извѣстны подъ именемъ *аверроизма*. Болѣе близкое изученіе этой философской системы показало, что основныя положенія этого ученія заимство-

*) Рѣдкое сочиненіе выдерживало столько изданій, какъ сочиненія Аверроэса, число изданій весьма многочисленно. Въ одной Венеціи было напечатано болѣе 50 различныхъ изданій. Первое изданіе напечатано въ Падуѣ въ 1472 г., а затѣмъ въ 1473 и 1474 гг. тамъ же. Въ первомъ изданіи были помѣщены сочиненія Аристотеля и комментаріи на нихъ сдѣланные Аверроэсомъ.

**) Философскія воззрѣнія Аверроэса и вліяніе ихъ на позднѣйшее развитіе философіи на Западѣ были разобраны подробно Ренаномъ въ сочиненіи: *E. Renan*, Averroès et l'averroïsme; Essai historique. Paris. 1852, in-8.

ваны изъ сочиненій Аристотеля, при чемъ на ихъ дальнѣйшее развитіе имѣли вліяніе и воззрѣнія различныхъ арабскихъ философовъ *).

Сочиненіе „Сокращенный Альмагестъ" Аверроэса не было извѣстно въ Средніе Вѣка на Западѣ, такъ какъ оно не было переведено на латинскій языкъ. Нѣкоторыя извлеченія изъ этого сочиненія были сдѣланы Бернардомъ Вердюнскимъ, жившимъ около 1300 г., заимствовавшимъ, въ своемъ астрономическомъ сочиненіи, изъ него теорію эпицикла **).

Кромѣ поименованныхъ сочиненій Аверроэса, до насъ дошелъ еще отрывокъ, относящійся къ сферической тригонометріи. Въ отрывкѣ этомъ перечислены девять предложеній, предметъ которыхъ касается различныхъ свойствъ сферическихъ треугольниковъ. Указанный отрывокъ написанъ Абулъ-Валидомъ, который, по мнѣнію Седильо ***), есть никто иной, какъ Аверроэсъ.

Ни одно изъ арабскихъ именъ не пользовалось такою извѣстностью на Западѣ, въ Средніе Вѣка, какъ имя Аверроэса; живя въ эпоху, когда развитіе наукъ у арабовъ приходило уже въ упадокъ, когда знаменитыя школы ученыхъ, основанныя аббасидами на Востокѣ, и оммаіядами на Западѣ ****) потеряли свое первенствующее значеніе, какъ центры всемірной умственной культуры, единственнымъ выдающимся ученымъ является Авер-

*) Сочиненія Аристотеля были извѣстны на Западѣ въ многочисленныхъ спискахъ и различныхъ переводахъ. Изученіемъ и изслѣдованіемъ этихъ списковъ много занимался Журдэнъ, написавшій по этому предмету интересное изслѣдованіе подъ заглавіемъ: *Am. Jourdain*, Recherches critiques sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote et sur des commentaires grecs ou arabes employés par les docteurs scolastiques. Paris. Nouv. éd. 1843. in-8.

**) *E. Renan*, Averroès et l'averroïsme, pag. 178.

***) Отрывокъ этотъ изданъ Седильо въ сочиненіи: *Am. Sédillot*, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les grecs et les orientaux. Paris, 1845, pag. 416—419.

****) Самаго блестящаго развитія достигли науки у западныхъ арабовъ во время Гакема II, въ X-мъ вѣкѣ. Въ Кордовѣ, въ дворцѣ Гакема, была сосредоточена громадная библіотека, заключающая болѣе 400 тысячъ томовъ; одинъ каталогъ ея состоялъ изъ 44 томовъ. Многія сочиненія, написанныя въ Сиріи и Персіи появлялись прежде всего въ Испаніи, а уже оттуда дѣлались извѣстными на Востокѣ. Гакемъ имѣлъ агентовъ въ Багдадѣ, Дамаскѣ, Каиро и др. городахъ, которые слѣдили за всѣми сколько нибудь замѣчательными открытіями и сочиненіями, написанными учеными. Къ сожалѣнію такое плодотворное развитіе наукъ продолжалось недолго, одинъ изъ послѣдующихъ калифовъ, въ XI вѣкѣ, велѣлъ сжечь большую часть сокровищъ собранныхъ Гакемомъ. Впослѣдствіи дѣло истребленія арабскихъ рукописей продолжали христіане. Въ настоящее время сохранились только жалкіе остатки громадной арабской литературы, которые собраны въ библіотекѣ Эскуріала и почти неизслѣдованы.

роэсъ. Послѣ его смерти начинается упадокъ всей арабской философіи вообще.

Ибнъ-Албанна. Арабскій математикъ *Абулъ Аббасъ Ахмедъ-бенъ-Магомметъ-бенъ-Отманъ-Алазади*, извѣстный болѣе подъ именемъ *Ибнъ-Албанна*, т. е. „сынъ каменщика“, жилъ въ началѣ XIII вѣка *) Онъ былъ родомъ изъ Гренады и преподавалъ математическія науки въ Марокко въ 1222 году. Ибнъ-Албанна написалъ нѣсколько сочиненій, изъ числа которыхъ дошло до насъ только одно, предметъ котораго относиться къ Ариѳметикѣ и Алгебрѣ. Сочиненіе это носитъ заглавіе „*Талхисъ-амали-аль-гиссабъ (Talkhys amâli al hissâb)*“, т. е. „Сокращенный разборъ дѣйствій счисленія“. Терминъ *Talkhys* означаетъ *сокращеніе*. Сочиненіе это было переведено и издано на французскомъ языкѣ Марромъ **) въ 1865 году. Кромѣ поименованнаго сочиненія Ибнъ-Албанна написалъ еще сочиненіе по Ариѳметикѣ, которое было озаглавлено „Поднятіе завѣсы“, но сочиненіе это до насъ не дошло. Изъ другихъ трудовъ Ибнъ-Албанна укажемъ еще на астрономическія таблицы, изданныя имъ, о которыхъ упоминаетъ Кассири въ своемъ каталогѣ; таблицы эти были составлены, по словамъ Ибнъ-Халдуна, Ибнъ-Исгакомъ, а Ибнъ-Албанна только сократилъ ихъ.

Сочиненіе Ибнъ-Албанны раздѣлено на двѣ части: въ *первой* авторъ показываетъ дѣйствія надъ числами, а во *второй* даетъ правила для нахожденія неизвѣстныхъ величинъ при помощи извѣстныхъ; иными словами, первая часть посвящена Ариѳметикѣ, а вторая—Алгебрѣ. Первая часть раздѣлена на три отдѣла: въ первомъ говориться о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами, во второмъ—надъ дробями, и въ третьемъ надъ корнями; вторая часть раздѣлена на два отдѣла: первый занимается пропорціями, а второй составляетъ собственно Алгебра. Отдѣлы въ свою очередь дѣлятся на главы. Разсмотримъ содержаніе сочиненія Ибнъ-Албанны. Начнемъ съ первой части.

Часть первая—отдѣлъ первый. Авторъ начинаетъ съ опредѣленія числа. Числа онъ дѣлитъ на *цѣлыя* и *дробныя*; цѣлыя числа бываютъ двухъ родовъ *четныя* и *нечетныя;* четныя, въ свою очередь, бываютъ также трехъ родовъ: *четныя, четно-нечетныя, нечетно-четныя;* нечетныя заключаютъ

*) Ибнъ-Албанна извѣстенъ также у испанскихъ арабовъ подъ именемъ *Al-Garnâti*, а у африканскихъ подъ именемъ *Al-Marakeschi*.

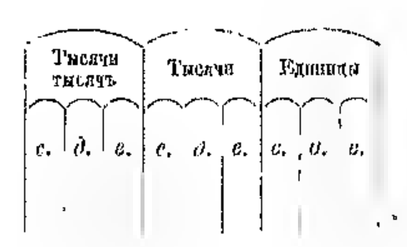
**) *Ar. Marre.* Le Talkhys d'Ibn Albannâ, publié et traduit par Aristide Marre. Rome. 1865. in-4. Статья эта есть извлеченіе изъ журнала: Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, t. XVII, 1864.

Извлеченія изъ сочиненія Ибнъ-Албанны были помѣщены также въ Journal de Mathématiques pures et appliquées. Deuxième série. T. X. 1865 pag. 117—134.

два рода: *нечетныя* и *нечетно-нечетныя*. Подъ именемъ *нечетныхъ* чиселъ вѣроятно авторъ понимаетъ числа *простыя*. Затѣмъ Ибнъ-Албанна переходитъ къ системѣ счисленія. Рядъ чиселъ Ибнъ-Албанна полагаетъ увеличивающимся до безконечности. Число онъ полагаетъ располагающимся въ трехъ *мѣстахъ* или, какъ онъ выражается, *жилищахъ*. Далѣе Ибнъ-Албанна говоритъ: „Жилища эти соотвѣтствуютъ наименованіямъ. Въ каждомъ изъ этихъ мѣстъ по девяти чиселъ; въ первомъ жилищѣ отъ одного до девяти, оно носитъ названіе *мѣста единицъ*; во второмъ—отъ десяти до девяноста, оно носитъ названіе *мѣста десятковъ*; и наконецъ, отъ ста до девятисотъ—*мѣсто сотенъ*. Числа имѣютъ двѣнадцать названій, по опредѣленію Ибнъ-Албанны; первыя девять названій принадлежатъ единицамъ, десятое—десяткамъ, одинадцатое—сотнямъ и двѣнадцатое—тысячамъ.

Всякое число *) узнается по своему названію и по показателю. Показатель есть указатель мѣста числа. Напримѣръ, показатель единицъ есть одинъ, показатель десятковъ есть два, показатель сотенъ—три и т. д. Названіе есть наименованіе числа, которое занимаетъ какое нибудь мѣсто“.

Наименованія чиселъ Ибнъ-Албанна различаетъ терминами *mokarrar* и *tekarrar*. Мы уже выше замѣтили, что числа Ибнъ-Албанна дѣлитъ на колонны, каждыя три колонны онъ снова соединяетъ въ одну. Каждая большая колонна, состоящая изъ трехъ меньшихъ составляетъ *tekarrar*; *mokarrar* же представляетъ всю совокупность всѣхъ колонъ, на которыя разбивается данное число. Изъ этого очевидно, что *mokarrar* равенъ тройному *tekarrar*'у и еще оставшемуся числу лишнихъ колонъ. Свою систему счисленія Ибнъ-Албанна поясняетъ на слѣдующей таблицѣ, въ которой надъ колоннами поставлены арки:



Методъ счисленія Ибнъ-Албанны легко понять на слѣдующихъ примѣрахъ: Если дано число 5 000 000, то оно заключаетъ два *tekarrar*'а и еще одну колонну, а его *mokarrar* будетъ равенъ $3\times2+1=7$. Другой примѣръ: *mokarrar* 30 000 равенъ $3\times1+2=5$, а *mokarrar* 400 000 000 есть $3\times3+0=9$.

---

*) *Marre*, Le Talkhys d'Ibn-Albanna, pag. 2—3, 9.

По мнѣнію Кантора *) пріемъ счисленія при помощи дѣленія чиселъ на колонны, впослѣдствіи перешелъ отъ арабовъ на Западъ, гдѣ подобное счисленія долгое время было въ употребленіи.

Далѣе указаны правила, какъ производить сложеніе цѣлыхъ чиселъ и повѣрка этого дѣйствія. Затѣмъ даны правила для нахожденія суммы ряда натуральныхъ чиселъ, ихъ квадратовъ и кубовъ, суммы ряда четныхъ чиселъ и суммы ряда нечетныхъ чиселъ.

Далѣе слѣдуетъ вычитаніе и повѣрка этого дѣйствія. Затѣмъ авторъ переходитъ къ умноженію и дѣленію и повѣркѣ этихъ дѣйствій. Для дѣйствія умноженія Ибнъ-Албанна показываетъ нѣсколько пріемовъ. Далѣе показанъ пріемъ для нахожденія простыхъ чиселъ, пріемъ этотъ есть ничто иное, какъ извѣстный методъ Эратосѳена, названный *рѣшетомъ* **).

Отдѣлъ второй, подобно первому, состоитъ изъ шести главъ. Опредѣливъ, что такое дробь, авторъ дѣлитъ дроби на классы, которыхъ числомъ пять ***). Затѣмъ показаны дѣйствія надъ дробями.

Отдѣлъ третій, состоящій изъ четырехъ главъ, посвященъ корнямъ. Корни онъ дѣлитъ на раціональные и ирраціональные. При извлеченіи данное число Ибнъ-Албанна дѣлитъ на грани. Показавъ правила для извлеченія корней авторъ даетъ также правила для приближеннаго извлеченія квадратныхъ корней. Правила эти можно выразить формулами:

$$\sqrt{a^2+\varepsilon}=a+\frac{\varepsilon}{2a}$$

$$\sqrt{a^2+\varepsilon}=a+\frac{\varepsilon}{2a+1}$$

Между этими двумя предѣлами лежитъ искомый корень. Далѣе показаны правила для извлеченія корней изъ дробей. Затѣмъ слѣдуютъ дѣйствія надъ дробями.

Часть вторая—отдѣлъ первый. Въ этой части авторъ даетъ способы для нахожденія неизвѣстной величины при посредствѣ извѣстныхъ. Въ пер-

*) *Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 1, pag. 691.

**) Объ этомъ методѣ мы упоминали, говоря объ трудахъ Эратосѳена (см. стр. 109-110).

***) Каждый изъ этихъ классовъ дробей носитъ особое названіе. Названія эти Марръ перевелъ терминами: fraction *isolées*, *en rapport*, *en désunion*, *subdivisées*, *separées en deux par un moins*. Примѣры этихъ различныхъ видовъ приведены въ сочиненіи: *Ar. Marre*, Le Talkhys d'Ibn Albânna, pag. 20—21.

вомъ отдѣлѣ даны правила нахожденія неизвѣстной величины при посредствѣ *пропорцій* и *правила вѣсовъ*. Методъ пропорцій есть ничто иное, какъ нахожденіе неизвѣстной величины изъ геометрической пропорціи. Правила, данныя авторомъ, суть ничто иное, какъ извѣстныя свойства пропорцій, что произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ; выраженіе для средняго или крайняго членовъ и т. п. Однимъ словомъ авторъ, при посредствѣ трехъ данныхъ величинъ, ищетъ четвертую, имъ соотвѣтствующую. О методѣ чашекъ вѣсовъ мы говорили уже выше *).

Отдѣлъ второй заключаетъ собственно Алгебру, которая заключаетъ пять главъ. Въ началѣ этого отдѣла Ибнъ-Албанна опредѣляетъ значеніе терминовъ *алгебра* и *алмукабала;* онъ говоритъ: „*Algbr* это возстановленіе; *Almakâbalah* это есть вычитаніе изъ каждаго вида ему соотвѣтствующаго, до тѣхъ поръ пока не останется болѣе въ обѣихъ частяхъ видовъ одного рода“. Далѣе авторъ дѣлитъ уравненія на шесть видовъ, изъ числа которыхъ три простыхъ и три сложныхъ. Уравненія эти суть ничто иное, какъ извѣстные арабамъ виды уравненій **):

$$ax^2 = bx \quad , \quad ax^2 = n \quad , \quad bx = n$$

$$ax^2 + bx = n \quad , \quad ax^2 + n = bx \quad , \quad bx + n = ax^2$$

Затѣмъ слѣдуютъ правила для рѣшенія этихъ уравненій. Въ слѣдующей главѣ показаны правила для сложенія, вычитанія и умноженія алгебраическихъ многочленовъ, при чемъ авторъ замѣчаетъ, что: „произведеніе двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ величинъ—положительно; а произведеніе положительной и отрицательной—отрицательно“. Далѣе указаны правила для дѣленія многочлена на одночленъ.

Разсматриваемое сочиненіе Ибнъ-Албанны болѣе похоже на ученый трудъ, чѣмъ книга предназначенная для начинающихъ. Впослѣдствіи „Талхисъ“ Ибнъ-Албанны былъ комментированъ многими арабскими учеными. Изъ такихъ комментаріевъ въ настоящее время изданъ, сдѣланный Алкалзади, жившимъ въ XV вѣкѣ. Съ сочиненіемъ этимъ мы познакомимся болѣе подробно впослѣдствіи.

Содержаніе своихъ сочиненій „Талхисъ“ и „Поднятіе завѣсы“ Ибнъ-Албанна заимствовалъ, по словамъ Ибнъ-Халдуна, изъ сочиненія заглавіе котораго „Маленькое сѣдло“ (*Al-hiçârou-l-çaghîr*). Послѣднее сочиненіе до насъ не дошло. Само заглавіе непонятно; терминъ *сѣдло* также означаетъ *укрѣпленіе, замокъ*.

*) Методъ этотъ изложенъ подробно на стр. 575—78.

**) Виды эти были извѣстны еще Магомету-бенъ-Музѣ (см. стр. 455).

Этимъ мы и ограничимся при обозрѣніи сочиненія Ибнъ-Албанны.

Нассиръ-Еддинъ-Туси. Извѣстный арабскій астрономъ Нассиръ-Еддинъ-Туси былъ родомъ персъ. Онъ родился въ 1201 г. въ Хорассанѣ и умеръ въ 1274 г. въ Багдадѣ. Названіе *Туси*, или *аль-Туси* *) онъ вѣроятно получилъ отъ города Туса, гдѣ онъ воспитывался. По повелѣнію монгольскаго хана Гулагу, внука Чингисъ-Хана, онъ устроилъ обсерваторію въ городѣ Мерагѣ, въ Адзербенджанѣ, которая славилась на всемъ Востокѣ **). Въ этой обсерваторіи находилось собраніе различныхъ астрономическихъ приборовъ и сосредоточена была обширная библіотека. Нассиръ-Еддинъ авторъ нѣсколькихъ сочиненій астрономическаго содержанія, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстны: начала астрономіи; трактатъ, въ двадцати главахъ, объ астролябіи; и астрономическія таблицы ***). Таблицы, составленныя Нассиръ-Еддиномъ, заслуживаютъ особеннаго вниманія; онѣ носили названіе *Ильханіевыхъ* и были названы такъ въ честь Гулагу-Илеку-Хана. Астрономическія таблицы Нассиръ-Еддина были весьма распространены и пользовались большою извѣстностью.

Нассиръ-Еддинъ славился также, какъ свѣдущій математикъ и искусстный геометръ. Особенное вниманіе имъ было обращено на изученіе сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ. Зная основательно греческій языкъ онъ занялся переводами нѣкоторыхъ изъ этихъ сочиненій на арабскій языкъ. Переводы свои Нассиръ-Еддинъ дополнялъ весьма цѣнными комментаріями и дополненіями. Изъ переводовъ его наиболѣе извѣстны слѣдующіе: переводъ „Началъ“ Евклида, сочиненія Гипсикла „О восхожденіяхъ“, четырехъ книгъ „Альмагеста“ Птоломея, переводы съ комментаріями сочиненій Автолика, Теодосія, Менелая и Архимеда. Переводъ „Началъ“ Евклида, данный Нассиръ-Еддиномъ, принадлежитъ къ числу хорошихъ переводовъ этого сочиненія. Впослѣдствіи, переводъ этотъ былъ напечатанъ, въ арабскомъ текстѣ, въ 1594 г., въ знаменитой типографіи Медичисовъ въ Римѣ ****). Въ своемъ переводѣ „Началъ“ Евклида Нассиръ-Еддинъ даетъ доказательство

*) Полное имя его: Naszir Eddin Abu Dschaphar Muhammed Ben Hassan Al-Thusi. Нѣкоторые называютъ его *атъ-Туси.*

**) Подробныя свѣдѣнія о жизни и ученой дѣятельности Нассиръ-Еддина можно найти въ статьѣ: *A. Jourdain,* Mémoire sur l'observatoire de Méragah et sur quelques instruments employés pour observer; suivi d'une Notice sur la vie et les ouvrages de Nassyr-Eddyn; le tout traduit des auteurs arabes et persans. Paris. 1810. in-8.

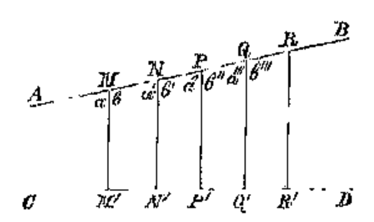
***) При производствѣ астрономическихъ наблюденій Нассиръ-Еддинъ имѣлъ многихъ помощниковъ, изъ которыхъ наиболѣе извѣстны. Алъ-Халати изъ Тифлиса, Алъ-Мараги изъ Мосула и Алъ-Оредги изъ Дамаска.

****) Переводъ этотъ былъ напечатанъ два раза. Мы привели выше (см. стр. 246) заглавія этихъ переводовъ.

извѣстнаго *постулата* Евклида. Хотя доказательство, данное арабскимъ математикомъ, не рѣшаетъ вопроса, но оно не уступаетъ различнымъ другимъ доказательствамъ предложеннымъ впослѣдствіи. Доказательство Нассиръ-Еддина Валлисъ находитъ весьма остроумнымъ; впослѣдствіи оно было также помѣщено Клавіемъ въ его изданіи „Началъ" Евклида. Также было предложено Нассиръ-Еддиномъ нѣсколько доказательствъ извѣстной теоремы Пиѳагора; доказательства эти основаны на геометрическихъ построеніяхъ и преобразованіяхъ частей треугольника.

Доказательство теоремы, предложенное Нассиръ-Еддиномъ, о равенствѣ двумъ прямымъ угламъ суммы внутреннихъ угловъ треугольника, состоитъ изъ трехъ *леммъ* или *посылокъ (praemissae)*. Первую изъ этихъ леммъ, по ея очевидности онъ принялъ за аксіому, и на основаніи ея доказалъ двѣ остальныя вполнѣ строго. Первая лемма состоитъ въ слѣдующемъ: Пусть даны прямыя AB и CD (фиг. 73), лежащія въ одной плоскости, прямыя эти пересѣчены прямыми MM', NN', PP', QQ', RR', перпендикулярными къ прямой CD и составляютъ съ прямой AB острые углы a, a', a'', a'''...

Фиг. 73.



и тупые углы b, b', b'',....; острые углы обращены въ сторону A, тупые въ сторону B. Нассиръ-Еддинъ полагаетъ: 1) что прямыя AB и CD приближаются одна къ другой со стороны AC и удаляются со стороны BD. Такимъ образомъ идя отъ стороны BD къ AC перпендикуляры RR', QQ', PP', NN', MM' постепенно уменьшаются, а идя отъ стороны AC къ BD перпендикуляры MM', NN', PP', QQ', RR'... постепенно увеличиваются. Слѣдовательно $RR'>QQ'>PP'>NN'>NN'$ и напротивъ $MM'<NN'<$ $<PP'<QQ'<RR'$. 2) Когда прямыя AB и CD приближаются со стороны AC и удаляются со стороны BD, то перпендикуляры MM', NN', PP', QQ',.... будутъ болѣе съ той стороны, гдѣ прямыя AB и CD удаляются одна отъ другой, а менѣе тамъ, гдѣ онѣ приближаются, такъ что $RR'>QQ'>PP'>$.... и напротивъ $MM'<NN'<PP'<$..... Вмѣстѣ съ тѣмъ острые углы a, a', a'',... будутъ находиться со стороны AC, а тупые углы b, b', b'',... со стороны BD.

На этой леммѣ Нассиръ-Еддинъ основываетъ двѣ другія. Вникнувъ въ сущность первой леммы мы видимъ, что какъ аксіома она принята не можетъ быть, а потому само доказательство Нассиръ-Еддина лишено геометрической точности *).

Изъ другихъ математическихъ сочиненій Нассиръ-Еддина извѣстны *комментаріи* на *„Коническія сѣченія“* Аполлонія. Комментаріями этими пользовался Галлей при возстановленіи 5, 6 и 7-й книгъ „Коническихъ сѣченій“, которыя были утеряны. Примѣчанія и комментаріи арабскаго геометра оказали несомнѣнную пользу Галлею и много способствовали успѣшному окончанію, предпринятаго нелегкаго труда. Также было написано Нассиръ-Еддиномъ другое геометрическое сочиненіе, заглавіе котораго *„Institutio ad geometriam“*, но содержаніе его намъ совершенно неизвѣстно. Также совершенно неизвѣстно намъ содержаніе алгебраическаго сочиненія, написаннаго Нассиръ-Еддиномъ, заглавіе котораго: *„Compendium Arithmeticae et Algebrae“*; рукопись этого сочиненія хранится въ библіотекѣ Эскуріала, но къ сожалѣнію до сихъ поръ на нее не было обращено вниманія. Списокъ математическихъ сочиненій, написанныхъ Нассиръ-Еддиномъ, можно найти въ сочиненіи Гарца **).

Кромѣ поименованныхъ астрономическихъ и математическихъ сочиненій, Нассиръ-Еддинъ написалъ множество другихъ по различнымъ отраслямъ наукъ. Въ числѣ этихъ сочиненій есть трактаты по философіи, по медицинѣ, юриспруденціи, политикѣ и т. под.

Ибнъ-Халдунъ. Познакомившись съ содержаніемъ сочиненій и съ трудами болѣе извѣстныхъ арабскихъ математиковъ мы не можемъ не коснуться дѣятельности извѣстнаго арабскаго энциклопедиста XIV вѣка Ибнъ-Халдуна, такъ какъ въ его обширномъ энциклопедическомъ сочиненіи, озаглавленномъ *„Пролегомены“*, или по арабски *„Мокадама“ (Mocaddama)*, есть главы, относящіяся къ математическимъ наукамъ. На содержаніе этихъ главъ

---

*) Полное изложеніе способа доказательства постулата, данное Нассиръ-Еддиномъ, находится въ статьѣ *Castillion*, Second Memoire sur les parallèles d'Euclide, pag. 174—183, помѣщенной въ Mémoires de l'Academie Royale de Berlin за 1788 и 1789 гг. Также приведено доказательство это въ сочиненіи *J. Wallis*, S. T. D de Algebra Tractatus, 1693, pag. 669. Основная мысль метода Нассиръ-Еддина подробно изложена въ интересномъ мемуарѣ академика Буняковскаго, озаглавленномъ „Параллельныя линіи“ и напечатанномъ въ Ученыхъ Запискахъ Императорской Академіи Наукъ за 1853 г. (см. У. З. И. А. Н. по первому и третьему отдѣленіямъ, Томъ II, Вып. 3, 1853, стр. 387—411). На нѣкоторыя изъ попытокъ ученыхъ доказать постулатъ Евклида мы указали въ нашемъ изданіи „Началъ“ Евклида; см. Введеніе, стр. 6—10.

**) *Gartz*, De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis schediasma historicum, Halae, 1823, in-4. pag. 31—34.

впервые обратилъ вниманіе Вепке, въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ *). Сочиненіе Ибнъ-Халдуна касается почти всѣхъ отраслей человѣческихъ знаній, а потому представляетъ особенный интересъ, какъ указывающее состояніе наукъ и степень умственнаго развитія арабовъ въ XIV столѣтіи. Жизнь Ибнъ-Халдуна полна приключеній, которыя намъ извѣстны изъ его автобіографіи. Онъ родился въ 1332 г. въ Тунисѣ. Предки его были родомъ изъ Аравіи, но во время завоеванія Испаніи арабами переселились въ Севилью, гдѣ считались одной изъ самыхъ сильныхъ фамилій. Двадцати лѣтъ отъ роду Ибнъ-Халдунъ занялъ мѣсто секретаря при тунисскомъ султанѣ. Въ этой должности онъ оставался недолго, такъ какъ вскорѣ отправился въ Испанію къ гренадскому королю, который послалъ его посломъ къ королю кастильскому. Въ 1365 году онъ снова отправляется въ Африку, гдѣ служитъ, то у одного, то у другого изъ султановъ. Съ 1373 по 1378 года Ибнъ-Халдунъ пишетъ свои „Пролегомены", уединившись въ одномъ изъ укрѣпленныхъ замковъ нынѣшней провинціи Оранъ. Въ 1382 г. онъ отправляется въ Александрію, а въ 1384 г. получаетъ назначеніе великаго кади въ Каиро. Изъ Каиро Ибнъ-Халдунъ отправляется въ Мекку, затѣмъ снова возвращается въ Каиро, сопровождаетъ султана въ Сирію и попадаетъ въ 1400 г. въ плѣнъ къ Тамерлану. Возвратившись снова въ Египетъ Ибнъ-Халдунъ умираетъ въ 1406 г. въ Каиро. Мы только вкратцѣ упомянули главныя изъ его странствованій, такъ какъ почти всю свою жизнь онъ провелъ въ постоянныхъ странствованіяхъ и постоянно измѣнялъ родъ своей дѣятельности.

„Пролегомены" Ибнъ-Халдуна составляли часть другаго обширнаго сочиненія, составленнаго имъ, именно „Всемірной исторіи", въ которой онъ излагаетъ исторію различныхъ народовъ и разныхъ государствъ отъ самыхъ

---

*) Арабскій текстъ „Пролегоменъ" Ибнъ-Халдуна былъ изданъ *Quatremère*'омъ и напечатанъ въ Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque Imperiale T. XVI, XVII и XVIII. Французскаго перевода и комментарія онъ не успѣлъ издать, такъ какъ онъ умеръ. Трудъ его съ успѣхомъ привелъ къ концу *Сланъ (Slane)*, издавшій французскій переводъ „Пролегоменъ" подъ заглавіемъ „Prolégomènes Historiques d'Ibn Khaldoun". Переводъ этотъ напечатанъ въ Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale T. XIX, Par. 1, 1862; T. XX, Par. 1, 1865; T. XXI, Par. 1, 1868. Главы относящіяся къ математическимъ наукамъ заключаются въ T XXI, Par. 1. pag. 121—171. Онѣ были изданы уже гораздо раньше Вепке и вошли въ составъ матеріаловъ, которые онъ собиралъ для обширнаго изслѣдованія объ сочиненіяхъ Фибоначчи. Главы математическаго содержанія „Пролегоменъ" напечатаны въ первомъ выпускѣ сочиненія *F. Woepcke*, Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, découverts et publiés par M. le Prince Balthasar Boncompagni. I. Traduction d'un Chapitre des Prolégomènes d'Ibn Khaldoûn, relatif aux sciences mathématiques. Rome. 1856. in-4.

древнихъ временъ до конца XIV в. Кромѣ этого сочиненія Ибнъ-Халдунъ написалъ много другихъ, которыя къ сожалѣнію извѣстны намъ только по заглавіямъ, такъ какъ онѣ утеряны. Изъ числа этихъ сочиненій для насъ наиболѣе была-бы интересна „Ариѳметика" и „Извлеченія изъ сочиненій Аверроэса". Также написалъ Ибнъ-Халдунъ сочиненіе по логикѣ и множество стихотвореній.

Всѣ науки, основанныя на мышленіи ума, Ибнъ-Халдунъ называетъ *философскими науками* и *философіей (filsefya, hikma)*. Онѣ заключаютъ слѣдующія семь наукъ: *логику*, *ариѳметику*, *геометрію*, *астрономію*, *музыку*, *физику* и *метафизику*. Каждая изъ этихъ наукъ, въ свою очередь, дѣлиться на отдѣлы, такъ напр. физика даетъ начало медицинѣ, ариѳметика даетъ начало искусству счисленія, искусству дѣленія наслѣдствъ и умѣнію производить коммерческіе счеты и другимъ. Въ составъ астрономіи входятъ *таблицы*, т. е. система чиселъ, при помощи которыхъ вычисляются движенія свѣтилъ и опредѣляется ихъ положеніе. Къ астрономіи Ибнъ-Халдунъ причисляетъ также астрологію.

Въ ариѳметикѣ, по мнѣнію Ибнъ-Халдуна, изслѣдуются свойства чиселъ, въ зависимости отъ того расположены-ли онѣ въ геометрической или ариѳметической прогрессіи. Особенное значеніе онъ придаетъ свойствамъ фигурныхъ чиселъ, ученіе о которыхъ было заимствовано арабскими математиками изъ второй книги „Ариѳметики" Никомаха. Послѣ этого Ибнъ-Халдунъ переходитъ къ практическимъ примѣненіямъ ариѳметики—къ четыремъ дѣйствіямъ надъ цѣлыми и дробными числами, а также надъ корнями. Ирраціональныя величины онъ называетъ *нѣмыми*. Обо всѣхъ этихъ дѣйствіяхъ онъ упоминаетъ только мимоходомъ. Изъ ученыхъ, писавшихъ сочиненія по ариѳметикѣ Ибнъ-Халдунъ упоминаетъ Авиценну и Ибнъ-Албанну. Затѣмъ онъ переходитъ къ опредѣленію Алгебры, которая по его словамъ: „есть искусство при помощи котораго опредѣляется неизвѣстное число по данному и извѣстному, если только существуетъ между ними зависимость, которая даетъ возможность получить этотъ результатъ". Далѣе слѣдуетъ опредѣленіе корня и степеней неизвѣстной величины. Говоря объ зависимостяхъ, существующихъ между этими величинами, Ибнъ-Халдунъ замѣчаетъ, что по мнѣнію алгебраистовъ, между числомъ, корнемъ и квадратомъ неизвѣстной величины можетъ существовать шесть разрѣшимыхъ уравненій: три простыхъ и три сложныхъ. Съ этими шестью видами уравненій мы уже знакомы (см. стр. 455). Первый, писавшій сочиненіе по Алгебрѣ, по словамъ Ибнъ-Халдуна, былъ Магометъ-бенъ-Муза. Сочиненіе его было комментировано многими учеными. Относительно рѣшенія уравненій третьей степени онъ упоминаетъ только мимоходомъ, именно онъ говоритъ: „мы узнали, что одинъ изъ первыхъ математиковъ Востока число уравненій

съ шести распространилъ до двадцати и болѣе; для всѣхъ этихъ уравненій онъ нашелъ вѣрные способы, основанные на геометрическихъ доказательствахъ". Вѣроятно здѣсь Ибнъ-Халдунъ подразумѣваетъ методы рѣшенія уравненій третьей степени, данные Алкгаиями. Изъ словъ Ибнъ-Халдуна можно заключить, что замѣчательныя изслѣдованія Алкгаиями были ему почти неизвѣстны. Далѣе онъ говоритъ объ приложеніяхъ алгебры и ариѳметики къ всевозможнымъ коммерческимъ вычисленіямъ и къ дѣленію наслѣдствъ *(feraïd)*. Къ числу лучшихъ сочиненій, написанныхъ по вопросу о дѣленіи наслѣдствъ, Ибнъ-Халдунъ причисляетъ сочиненіе Табита-бенъ-Корра.

Послѣ этого Ибнъ-Халдунъ переходитъ къ Геометріи, предметъ которой, по его словамъ: „величины непрерывныя, какъ напр. линія, поверхность, тѣло, или же величины отвлеченныя, какъ напр. числа. Она разсматриваетъ основныя свойства этихъ величинъ, какъ напр.: сумма угловъ всякаго треугольника равна двумъ прямымъ угламъ; двѣ параллельныя линіи, продолженныя до безконечности, не пересѣкаются; противоположные углы равны; если четыре величины пропорціональны, то произведеніе первой и четвертой, равно произведенію второй и третьей". Основы этой науки арабы, по его словамъ, почерпнули отъ грековъ. Первая книга переведенная на арабскій языкъ по этому предмету есть трактатъ Евклида „Книга началъ или основаній". Сочиненіе это есть самое обширное изъ всѣхъ подобныхъ сочиненій, написанныхъ для желающихъ изучить этотъ предметъ. Книга эта есть первое греческое сочиненіе переведенное на арабскій языкъ. Изъ различныхъ изданій „Началъ" Ибнъ-Халдунъ упоминаетъ переводы Гонейнъ-бенъ-Исгака, Табита-бенъ-Корра и Юзуфа-ибнъ Гаджаша. Далѣе, онъ говоритъ объ содержаніи „Началъ" и упоминаетъ, что извлеченія изъ этого сочиненія были также составлены Авиценной, который нѣкоторыя изъ нихъ помѣстилъ въ математической части своего трактата по медицинѣ *). Кромѣ того комментаріи на „Начала" были написаны многими математиками, изъ которыхъ онъ упоминаетъ Ибнъ-Салта **). „Начала" Евклида Ибнъ-Халдунъ считаетъ необходимымъ основаніемъ всѣхъ „наукъ геометрическихъ". Необходимость основательнаго изученія Геометріи онъ выражаетъ въ слѣдующихъ словахъ: „Польза Геометріи заключается въ томъ, что она развиваетъ умъ занимающихся этимъ предметомъ и пріучаетъ его правильно мыслить. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ доказательства въ Геометріи отли-

---

*) Медицинскій трактатъ Авиценны, извѣстный подъ заглавіемъ „Излеченіе и спасеніе" *(Es Chefa oua 'n—Nadja)* состоитъ изъ двухъ совершенно отдѣльныхъ частей. Вторая есть сокращеніе первой. Въ первой части были также главы математическаго содержанія.

**) Когда жилъ Ибнъ-Салтъ неизвѣстно. Одинъ математикъ *Ибрагимъ-ибнъ Салтъ (Ibrahîm Ibn es Salt)* жилъ во время Альмамуна.

чаются ясностью изложенія и послѣдовательностью выводовъ. Эта правильность и эта послѣдовательность устраняютъ возможность ошибокъ въ разсужденіяхъ; вслѣдствіи этого умъ людей, занимающихся этой наукой, мало подверженъ заблужденіямъ, и разсудокъ ихъ развивается слѣдуя этому пути. Говорятъ, что слѣдующія слова были написаны на дверяхъ Платона: „пусть никто не войдетъ сюда, если онъ не геометръ". Подобно этому, наши учителя говорятъ: „изученіе Геометріи тоже для ума, что употребленіе мыла для одежи, она смываетъ нечистоту и устраняетъ пятна". Это происходитъ отъ расположенія и систематическаго порядка этой науки, какъ мы выше замѣтили". Мы привели приведенныя слова Ибнъ-Халдуны, чтобы показать, какое значеніе онъ придавалъ изученію Геометрію. Подобное мнѣніе сохранилось до настоящаго времени, и несомнѣнно сохраниться всегда, пока умъ человѣка неперестанетъ правильно мыслить.

Далѣе Ибнъ-Халдунъ говоритъ объ сферическихъ тѣлахъ, упоминаетъ объ сочиненіяхъ Теодосія и Менелая; о коническихъ сѣченіяхъ онъ упоминаетъ только мимоходомъ, сказавъ, что теорія ихъ составляетъ часть Геометріи. Практическое приложеніе коническія сѣченія находятъ въ архитектурѣ и плотничьемъ искусствѣ, а также при построеніи различныхъ приборовъ и удивительныхъ сооруженій. Подъ именемъ приборовъ и удивительныхъ сооруженій, Венке полагаетъ, что Ибнъ Халдунъ разумѣетъ устройство автоматовъ и другихъ приборовъ, построеніе которыхъ было изложено въ „Пневматикахъ" Герона, а также устройство различнаго рода часовъ *). Изъ сочиненій, написанныхъ по этому предмету, онъ упоминаетъ одно, написанное тремя братьями, сыновьями Музы-бенъ-Шакера. О „Коническихъ

---

*) Особенное значеніе придавали арабскіе ученые устройству различныхъ астрономическихъ приборовъ. По этому предмету было написано много сочиненій, изъ числа которыхъ самое полное принадлежитъ *Абулъ-Гассану*, жившему въ началѣ XIII вѣка. Абулъ-Гассанъ производилъ наблюденія въ Испаніи и Сѣверной Африкѣ; онъ опредѣлилъ широты 41 городовъ. Астрономическое его сочиненіе было переведено Седильо (отцемъ) подъ заглавіемъ: *J. J. Sédillot,* Traité des instruments astronomiques des Arabes, trad. par J. J. Sédillot, publié avec une introduction en 2 vol. in-4 avec planches; Paris, 1834—1835. Добавленіемъ къ этому сочиненію служитъ: Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes, pour servir de complément à l'ouvrage précédent. 1 vol. in-4, plan., Paris, 1841—1845. Въ сочиненіи этомъ находиться также вся гномоника арабовъ, а также даны весьма точныя астрономическія таблицы

Также много занимались арабы построеніемъ астролябій. Подробное описаніе одного изъ такихъ приборовъ дано въ статьѣ: *F. Sarrus*, Description d'un astrolabe, construit à Maroc en l'an 1208, Strasb., 1853, in-4.

Кромѣ поименованнаго сочиненія Абулъ-Гассанъ написалъ еще „Коническія Сѣченія", „О наблюденіяхъ луны" Астрономическое сочиненіе, переведенное Седильо, было озаглавлено: „Начала и концы".

сѣченіяхъ" Аполлонія онъ ничего не упоминаетъ, хотя это сочиненіе ему извѣстно. Изученію плотничьяго искусства Ибнъ-Халдунъ придаетъ особенное значеніе. Первый научившій людей этому искусству былъ, по его словамъ, Ной—строитель ковчега *). Евклидъ, Аполлоній, Менелай и многіе другіе математики были плотники. Вообще всѣ греческіе геометры были основательно знакомы съ этимъ искусствомъ. Изъ другихъ приложеній Геометріи онъ упоминаетъ практическую Геометрію *(mesaha)*, т. е. собственно измѣреніе земель.

Затѣмъ Ибнъ-Халдунъ переходитъ къ *оптикѣ* и къ *астрономіи*. Законы оптики и ихъ объясненіе, по его словамъ, основаны на геометрическихъ доказательствахъ. Лучшимъ сочиненіемъ по астрономіи онъ считаетъ „Альмагестъ" *(El-Medjisti)* Птоломея и говоритъ, что Авиценна написалъ также комментаріи на это сочиненіе, которые вошли въ математическую часть его трактата по медицинѣ. Комментаріи на „Альмагестъ были написаны болѣе извѣстными магометанскими учеными; изъ числа ихъ онъ упоминаетъ еще Аверроэса и Ибнъ-Сема **). Далѣе Ибнъ-Халдунъ говоритъ объ астрономическихъ таблицахъ. По его словамъ, въ таблицахъ этихъ, основанныхъ на численныхъ данныхъ, находятся указанія, какъ опредѣлить для всякаго свѣтила путь по которому оно движется, неравенства въ его движеніяхъ и т. п. Указанія эти получаются путемъ вычисленія. Всѣ численныя данныя расположены колоннами, чтобы примѣненіе ихъ было-бы болѣе удобно для учениковъ. Такія ряды чиселъ носятъ названіе *астрономическихъ таблицъ (azradj)*. Опредѣленіе положенія свѣтилъ, для даннаго времени, при помощи этого искусства называютъ *уравненіемъ (tâdil)* и *поправкой (tacouîm)*. Изъ числа ученыхъ, писавшихъ по этому предмету, онъ упоминаетъ Альбатани и другихъ. Знаніе положенія свѣтилъ, по мнѣнію Ибнъ-Халдуна, необходимо для астрологическихъ предсказываній.

Изъ астрономовъ, занимавшихся составленіемъ таблицъ, Ибнъ-Халдунъ упоминаетъ Альбатани и другихъ. На Западѣ, по его словамъ, въ употребленіи таблицы, составленныя Ибнъ-Исгакомъ. По мнѣнію Венке послѣдній астрономъ есть извѣстный Арзахель, жившій въ XI вѣкѣ въ Толедо. Ибнъ-Халдунъ говоритъ, что таблицы Ибнъ-Исгака были сокращены Ибнъ-Албанной и составили сочиненіе заглавіе котораго: „Большая дорога" *(El-Minhadj)*. Послѣднее сочиненіе пользовалось большимъ уваженіемъ, такъ какъ оно значительно облегчило производство дѣйствій.

---

*) Prolégomènes historiques d'Ibn Khaldoun. Notices et extraits des Manuscrits. T. XX, 1865. pag. 376—379. (De l'art du charpentier).

**) *Ибнъ-Семъ* (Abou-'l-Kacem Asbagh Ibn es-Semh) родомъ изъ Гренады славился какъ знаменитый врачъ и математикъ. Онъ умеръ около 1035 г.

На этомъ мы и закончимъ обозрѣніе математической части энциклопедическаго труда Ибнъ-Халдуна. Новаго оно ничего не заключаетъ, но можетъ дать понятіе о состояніи математическихъ наукъ у арабовъ въ концѣ XIV столѣтія. Въ это время математическія науки находились уже въ упадкѣ, развитіе наукъ у восточныхъ арабовъ прекратилось и единственными представителями арабской математики являются мавры въ Испаніи и на сѣверномъ берегѣ Африки, въ Мароссо и Фецѣ.

Кади-Заде Аль-Руми. Персидскій астрономъ *Кади-Заде*, прозванный *аль-Руми*, т. е. *римляниномъ*, принадлежалъ къ числу наставниковъ извѣстнаго Улу-Бека, внука Тамерлана. Онъ умеръ около 1412 года. Кади Заде написалъ біографію Евклида, рукопись которой хранится въ библіотекѣ Эскуріала. Кромѣ этого сочиненія Кади-Заде написалъ еще сочиненіе, заглавіе котораго: „*Propositiones geometricae secundum Euclidis elementa*"; рукопись этого сочиненія также сохранилась, но къ сожалѣнію до сихъ поръ на нее не обращено вниманія *). Кромѣ приведенныхъ сочиненій Кади-Заде написалъ еще нѣсколько другихъ.

Алкалзади. Изъ числа различныхъ дошедшихъ до насъ математическихъ рукописей, написанныхъ западными арабами, особеннаго вниманія заслуживаетъ ариѳметическій трактатъ, написанный *Абулъ-Гасаномъ-Али-Бенъ-Магомметомъ-Алкалзади*, жившимъ въ XV столѣтіи. Свѣдѣній о жизни и дѣятельности этого ученаго сохранилось весьма мало: извѣстно только, что онъ былъ родомъ изъ Андалузіи или Гренады. Годъ его смерти также точно неизвѣстенъ, по свѣдѣніямъ однихъ онъ умеръ въ 1477 г., а по свѣдѣніямъ другихъ въ 1486 г. Дошедшее до насъ сочиненіе озаглавлено: „Раскрытіе тайнъ *гобарской* науки" **). Терминъ *гобаръ* относиться къ особой системѣ счисленія, бывшей въ употребленіи у западныхъ арабовъ. Само слово *gobâr* на арабскомъ языкѣ означаетъ *пыль*. Названіе гобарскаго счисленія, по мнѣнію Вепке, вѣроятно произошло оттого, что вычисленія производили на доскѣ посыпанной пескомъ ***). Сочиненіе Алкалзади, какъ онъ

---

*) *Gartz*, De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis schediasma historicum. Halae. 1823. in-4. pag. 30—31.

**) Вепке переводитъ это заглавіе слѣдующимъ образомъ: Soulèvement des voiles de la science du Gobâr.

***) Въ настоящее время издана весьма интересная рукопись, заключающая маленькое ариѳметическое сочиненіе, содержаніе котораго относиться также къ гобарскому счисленію. Рукопись эту перевелъ Вепке, а издалъ Марръ. Заглавіе ея: Introduction au calcul Gobârî et Hawâî, traité d'arithmétique traduit de l'arabe par F. Woepcke et précédé d'une notice de M. A. Marre sur un manuscrit possédé par M. Chasles (Помѣщено въ Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, T. XIX. 1866).

самъ говоритъ въ началѣ своего труда, есть извлеченіе изъ другаго, болѣе обширнаго сочиненія, также написаннаго имъ, которое было озаглавлено: „Поднятіе одежды науки о счетѣ“ *).

Разсматриваемое нами сочиненіе Алкалзади дошло до насъ въ трехъ различныхъ рукописныхъ спискахъ, изъ чего можно заключить, что оно было весьма распространено. Первый обратившій вниманіе на это сочиненіе былъ Вепке, указавшій на нѣкоторыя символическія обозначенія дѣйствій и величинъ, примѣняемыя Алкалзади **). Впослѣдствіи Вепке перевелъ на французскій языкъ все сочиненіе Алкалзади и издалъ его подъ заглавіемъ: „Ариѳметическій трактатъ Алкалзади“ ***). Сочиненіе это есть одно изъ самыхъ полныхъ ариѳметическихъ сочиненій, написанныхъ арабами, и дошедшихъ до насъ, а потому мы считаемъ необходимымъ познакомиться съ его содержаніемъ и обратимъ особенное вниманіе на различныя интересныя особенности представляемыя сочиненіемъ Алкалзади. Весьма интересны, какъ мы уже замѣтили выше, символическія обозначенія, введенныя Алкалзади въ своемъ сочиненіи; хотя подобныя обозначенія существовали и раньше, но нигдѣ онѣ не пріобрѣтаютъ значенія символовъ, а скорѣе напоминаютъ простыя сокращенія словъ. Символы же Алкалзади ничѣмъ не отличаются отъ нашихъ настоящихъ символовъ, а потому мы на нихъ остановимся болѣе подробно.

„Ариѳметика“ Алкалзади состоитъ изъ введенія, четырехъ частей и заключенія. Каждая часть состоитъ изъ восьми главъ. Въ введеніи авторъ говоритъ о системѣ счисленія и о формѣ первыхъ девяти цифръ. Система счисленія, примѣняемая Алкалзади, десятичная. Показавъ способъ изображать различныя числа, авторъ переходитъ къ изложенію различныхъ дѣйствій, которымъ посвящено все сочиненіе. Въ *первой* части говорится о

Терминъ *hawâi* вѣроятно происходитъ отъ слова *hawa—воздухъ* и означаетъ производство ариѳметическихъ дѣйствій въ умѣ. Рукопись эта написана около 1573 г. Въ ней упоминается имя Ибнъ-Албанны, изъ чего можно заключить, что рукопись написана послѣ него.

*) Вепке перевелъ Soulèvement du vêtement de la science du calcul.

**) *F. Woepcke*, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans. Premier article. Notice sur des notations algébriques employées par les arabes. Помѣщено въ Journal Asiatique. Cinquième série. T. IV, № 15—Octobre—Novembre 1854. pag. 348—384.

***) *F. Woepcke*, Recherches sur plusieurs ouvrages de Leonard de Pise, découverts et publiés par M. le Prince Balthasar Boncompagni et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes. II. Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Alî Ben Mohammed Alkalçâdi. Помѣщено въ *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. Vol. XII. 1859. Rome in-4.

цѣлыхъ числахъ, во *второй*—о дробяхъ, въ *третьей*—о корняхъ и наконецъ въ *четвертой*—объ опредѣленіи неизвѣстной, т. е. Алгебра. Въ заключеніи, состоящемъ изъ трехъ отдѣловъ, показано: въ первомъ, что нужно дѣлать если уравненіе содержитъ отрицательные члены, а во второмъ и третьемъ показано суммированіе различныхъ прогрессій. Разсмотримъ теперь содержаніе каждой изъ частей „Ариѳметики" Алкалзади отдѣльно.

Часть первая. Въ восьми главахъ первой части *) показаны дѣйствія надъ цѣлыми числами. Авторъ отдѣльно разсматриваетъ слѣдующія дѣйствія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, разложеніе чиселъ на множителей, дѣленіе меньшаго числа на большее, дѣленіе частей и повѣрка дѣйствій.

Дѣйствіе сложенія Алкалзади производитъ также какъ и въ настоящее время, основываясь на тѣхъ же началахъ, только распредѣленіе чиселъ немного иное. Дѣйствіе у него расположено по слѣдующей схемѣ, если напримѣръ требуется сложить два числа 68765 и 46579:

```
1 1 5 3 4 4
-----------
  6 8 7 6 5
  4 6 5 7 9
  1 1 1 1
```

Сдѣлавши сложеніе, какъ обыкновенно дѣлаютъ въ настоящее время, легко увидѣть, какъ производилъ это дѣйствіе Алкалзади.

Дѣйствіе вычитанія въ „Ариѳметикѣ" Алкалзади носитъ названіе *tarhoun*, которое происходитъ отъ слова *taraha*—*отбрасывать*. Послѣднее слово сохранилось и до настоящаго времени, въ различныхъ языкахъ, въ формѣ общеизвѣстнаго коммерческаго термина *тара, вѣсъ тары*. Дѣйствіе вычитанія Алкалзади производитъ по слѣдующей схемѣ, если напр. требуется вычесть изъ 725 число 386:

```
3 3 9
-----
7 2 5
3 8 6
1 1
```

Дѣйствіе умноженія, по словамъ Алкалзади, можно производить различными пріемами. Первый методъ, названный авторомъ *madjnah*, т. е. *наклонное умноженіе* **), состоитъ въ слѣдующемъ: пусть требуется, напримѣръ, умножить 52 на 73; при этомъ Алкалзади поступаетъ слѣдующимъ

*) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalçâdi cet. pag. 5—28.

**) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Alî Ben Mohammed Alkalçâdî, pag. 8—9. Методъ этотъ Вепке перевелъ multiplication inclinée.

образомъ, сначала онъ пишетъ $70\times50+3\times50$, далѣе $70\times2+3\times2$ и сложивъ получаетъ $73\times52=3796$. Схема по которой производитъ дѣйствіе, по этому методу Алкалзади, состоитъ въ слѣдующемъ:

```
 3 7 9 6
--------
       6
   1 4
   1 5
 3 5
----|5 2
   7 3
     7 3
```

Прежде всего Алкалзади начинаетъ съ того, что числа данныя для умноженія, напр. 52 и 73, онъ располагаетъ въ видѣ:

```
    ___
 __ 5 2
  7 3
```

Второй методъ, данный Алкалзади, для производства дѣйствія умноженія, названъ имъ: умноженіемъ при помощи *чиселъ положенія*. Сущность этого пріема лучше всего видна на слѣдующемъ примѣрѣ: пусть требуется умножить числа 432 и 321; схема по которой производитъ это дѣйствіе Алкалзади состоитъ въ слѣдующемъ: числа онъ пишетъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д., а сверху ставитъ черту:

```
 _____
 4 3 2
 3 2 1
```

Само дѣйствіе расположено слѣдующимъ образомъ:

```
 1 3 8 6 7 2
------------
 1 2
     8
       4
     9
       6
         3
       6
         4
           2
------------
       4 3 2
       3 2 1
```

Третій методъ умноженія, названъ Алкалзади: умноженіе при посредствѣ *полу-перестановки*. Методъ этотъ употребляется только при умноженіи числа само на себя. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: пусть напр. дано умножить 438 само на себя, для этого пишутъ это число въ видѣ:

4 ∴ 3 ∴ 8

и дѣйствіе производятъ по слѣдующей схемѣ:

1 9 1 8 4 4

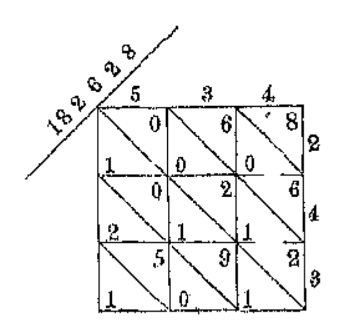
6 4
4 8
6 4
9
2 4
1 6

4 . 3 . 8
8 8 6

Всматриваясь въ этотъ пріемъ легко замѣтить, что это есть ничто иное какъ практическое примѣненіе извѣстной формулы:

$$(a+b+c+d+\ldots)^2 = a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+\ldots.$$

Четвертый методъ умноженія названъ Алкалзади пріемомъ при *помощи таблицы* *). Методъ этотъ примѣнялся также и другими арабскими математиками, у которыхъ онъ носилъ названіе *пріема рѣшета (chabaqah)*. Объ этомъ методѣ мы имѣли уже случай говорить выше (см. стр. 470). Пріемъ этотъ заключался въ слѣдующемъ: если напр. требуется умножить два числа 342 и 534, то дѣйствіе располагалось по слѣдующей схемѣ:



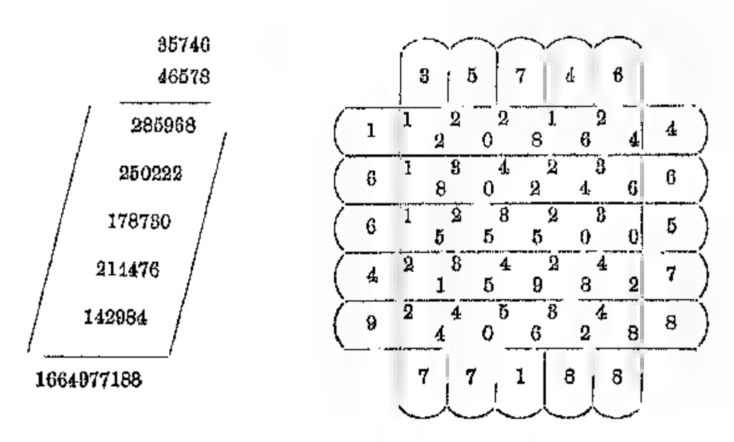
*) Методъ таблицы Алкалзади называетъ терминомъ *djadwal*, подъ которымъ также

Расположеніе дѣйствія мы не станемъ объяснять, такъ какъ оно прямо видно изъ схемы *).

Въ главѣ объ умноженіи Алкалзади замѣчаетъ, что необходимо знаніе, на память, произведеній однѣхъ единицъ на другія. Также даны имъ нѣкоторыя правила, какъ напр.: всякое число умноженное на нуль даетъ нуль; всякое число умноженное на единицу равно тому же числу; для умноженія числа на пять, слѣдуетъ сначала приставить къ этому числу нуль, а затѣмъ взять половину; чтобы умножить число на шесть надо его придать къ половинѣ его произведенія на десять; чтобы умножить число на семь надо прибавить къ нему нуль и вычесть изъ него утроенное первоначальное число; чтобы умножить число на восемь надо прибавить къ нему нуль и вычесть изъ полученнаго числа удвоенное первоначальное число; чтобы умножить число на девять надо прибавить къ нему нуль, а затѣмъ вычесть

были извѣстны различныя таблицы, употребляемыя при производствѣ вычисленій, какъ напр. таблицы долготъ, синусовъ и т. д.

*) Кромѣ приведенныхъ методовъ производства дѣйствія умноженія существовало еще много другихъ. Укажемъ на два такихъ пріема, находящіеся въ „Ариѳметикѣ“ Ибнъ-Езры, жившаго въ XII вѣкѣ. Они заключаются въ слѣдующей схемѣ, при условіи, что требуется перемножить числа 35746 и 46578:



Устройство этихъ таблицъ понятно. Пріемъ правой таблицы названъ Терквемомъ *цирькюлическимъ*. Содержаніе „Ариѳметики“ Ибнъ-Езры изложено Терквемомъ въ статьѣ. *O. Terquem*, Notice sur un manuscrit hébreu du traité d'arithmétique d'Ibn-Esra, conservé a la Bibliothèque Royale, помѣщенной въ Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. VI, 1841, pag. 275—296. Въ своей „Ариѳметикѣ“ Ибнъ-Езра говоритъ, что „существуетъ *девять* знаковъ, которые носятъ названіе единицъ, и при помощи которыхъ можно производить всѣ дѣйствія; недостающія наименованія замѣняютъ маленькимъ колесомъ—*galgal*. Галгалъ подобенъ соломѣ, которая движется вѣтромъ,—онъ только сохраняетъ порядки наименованій. На иностранныхъ языкахъ онъ носитъ названіе *sifra*“.

изъ него первоначальное число; чтобы умножить число на десять надо прямо прибавить къ нему одинъ нуль; чтобы умножить на сто—два нуля; чтобы умножить число на одиннадцать нужно сложить данное число съ равнымъ ему, но подписавъ его подъ даннымъ, отступя на одну единицу; и т. д. Правила всѣ эти пояснены на частныхъ примѣрахъ. Въ настоящее время, только нѣкоторыя изъ этихъ правилъ сохранились и находятъ приложеніе при рѣшеніи различныхъ вопросовъ, большая же часть правилъ Алкалзади почти совсѣмъ неизвѣстны.

Въ слѣдующей главѣ показано дѣйствіе дѣленія, которое Алкалзади производитъ по слѣдующей схемѣ: пусть напримѣръ дано раздѣлить 856 на 4, 288 на 6, и 924 на 6, для этого числа эти располагаются въ слѣдующемъ видѣ:

8 5 6	9 2 4	2 8 8
4	6	6

Само дѣйствіе производится слѣдующимъ образомъ:

1	3 2	4
8 5 6	9 2 4	2 8 8
4 4 4	6 6 6	6 6
2 1 4	1 5 4	4 8

Въ пятой главѣ Алкалзади указываетъ правила для сокращенія чиселъ. Разложеніе чиселъ на множителей онъ считаетъ особенно важнымъ *). Правила всѣ пояснены на частныхъ примѣрахъ. Особенный интересъ представляетъ признакъ, данный Алкалзади, для нахожденія дѣлимости числа на семь. Признакъ этотъ онъ поясняетъ на слѣдующемъ примѣрѣ: Пусть дано число 5236, единицы высшаго наименованія принимаются за десятки, къ нимъ прибавляютъ единицы слѣдующаго наименованія, которыя принимаютъ за единицы, получаютъ 52; число это дѣлятъ на 7, въ остаткѣ получаютъ 3, которое принимаютъ за 30, къ нему прибавляютъ единицы слѣдующаго наименованія и получаютъ 33, дѣля это число на 7, въ остаткѣ получаютъ 5, къ которому прибавляютъ единицы слѣдующаго наименованія, т. е. 6, и получаютъ наконецъ 56, которое дѣлится на 7 безъ остатка. Приведенное правило очевидно основано на существованіи тождества:

$$a+10b+100c+1000d+\ldots\ldots=a+10[b+10(c+10(d+\ldots\ldots))]$$

Въ слѣдующихъ главахъ Алкалзади касается нѣкоторыхъ частныхъ слу-

*) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalçâdi ect. pag. 20—22.

чаевъ дѣленія, распредѣленія прибыли между нѣсколькими лицами и повѣрки ариѳметическихъ дѣйствій.

Часть вторая посвящена дробямъ *). Въ началѣ этого отдѣла Алкалзади различаетъ *пять* видовъ дробей, которыя онъ называетъ терминами: *простыя дроби, дроби дѣленныя на части, относительныя, разнородныя* и *разностныя дроби* **). Подъ именемъ *простыхъ* дробей авторъ понимаетъ обыкновенныя дроби вида: $^4/_5$, $^1/_3$, $^2/_3$ и т. п. Ко второму роду дробей, названныхъ Алкалзади *дѣленными на части*, принадлежатъ дроби вида $\frac{5\ 3\,|\,4}{8\,|\,7\,|\,5}$, т. е. $\frac{4}{5}$ отъ $\frac{3}{7}$ отъ $\frac{5}{8}$, что составляетъ дробь $\frac{60}{280}$. Къ третьему виду принадлежатъ *относительныя* дроби, которыхъ форма есть:

$$\frac{4+\frac{3+\frac{5}{8}}{7}}{5}$$

или какъ пишетъ Алкалзади $\frac{5}{8}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{5}$; приведенная дробь очевидно тождественна дроби $\frac{253}{280}$. Объ остальныхъ двухъ видахъ дробей мы не будемъ говорить, такъ какъ форма ихъ еще сложнѣе приведенныхъ ***). Въ слѣдующихъ главахъ этой части Алкалзади показываетъ основныя четыре дѣйствія надъ дробями, сокращеніе дробей и переходъ отъ дробей одного вида къ дробямъ другаго вида; также показаны еще нѣкоторыя преобразованія дробей.

Часть третья. Въ этой части ****) авторъ говоритъ о корняхъ, которые онъ дѣлитъ на раціональные и ирраціональные, при этомъ онъ указываетъ признаки, по которымъ видно, можно-ли извлечь изъ даннаго числа корень или нельзя. Алкалзади начинаетъ съ извлеченія корней изъ цѣлыхъ чиселъ, которыя суть полные квадраты. Пріемъ извлеченія мало разнится отъ употребляемаго въ настоящее время. Затѣмъ авторъ переходитъ къ извлеченію корней изъ чиселъ по приближенію, при чемъ Алкалзади обращаетъ вниманіе въ какой формѣ представится r въ выраженіи:

$$\sqrt{a^2+r}$$

*) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalçâdi ect. pag. 20—36.

**) Бонке назвалъ эти пять видовъ: fractions simples, fractions divisées en parties, fractions relatives, fractions hétérogènes, fractions soustractives.

***) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalçâdi ect. pag. 30.

****) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalçâdi ect. pag. 37—48.

будетъ-ли $r \leqq a$ или же $r > a$. Въ первомъ случаѣ для корня онъ находитъ, подобно Ибнъ-Албаннѣ, выраженіе:

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$$

во второмъ же случаѣ онъ даетъ выраженіе, отличное отъ выраженія Ибнъ-Албанны, именно:

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r+1}{2a+2}$$

Кромѣ этихъ выраженій Алкалзади даетъ еще одно, болѣе точное, которое представляется въ видѣ:

$$\sqrt{a^2+r} = \left(a + \frac{r}{2a}\right) - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

Послѣ этого Алкалзади переходитъ къ извлеченію корней изъ дробей. Далѣе слѣдуютъ дѣйствія надъ корнями, которыя пояснены на частныхъ примѣрахъ. Изъ приведенныхъ авторомъ правилъ видно, что ему были извѣстны слѣдующія выраженія:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{a} \, . \, \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$a \, . \, \sqrt{b} = \sqrt{a^2 . b} \quad , \quad \sqrt{a} \, . \, \sqrt{\sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{a^2 b}}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}} \quad , \quad \frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$$

$$m \, . \, \sqrt{a} = \sqrt{m^2 . a}$$

$$\frac{1}{m} \, . \, \sqrt{a} = \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 . a}$$

Также извѣстны Алкалзади выраженія формы:

$$\sqrt{m+\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}}+\sqrt{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}}$$

$$\left(\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}\right)+\left(\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}\right)=m$$

$$2.\sqrt{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}}\cdot\sqrt{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}}=\sqrt{n}$$

Кромѣ того ему извѣстны преобразованія выраженій:

$$\frac{m}{p+\sqrt{q}}=\frac{m(p-\sqrt{q})}{p^2-q}$$

и приведеніе произведенія:

$$(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})=p^2-q$$

къ раціональному виду. Приведенныя выраженія даны Алкалзади словесно, на частныхъ примѣрахъ.

Часть четвертая. Содержаніе этой части—Алгебра*). Алкалзади начинаетъ съ опредѣленія геометрическихъ пропорцій, которыя онъ пишетъ въ видѣ:

12 ∴ 8 ∴ 6 ∴ 4

Указавъ на свойство пропорцій, что произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ, Алкалзади даетъ правила для нахожденія неизвѣстнаго крайняго или неизвѣстнаго средняго члена по остальнымъ тремъ извѣстнымъ. Затѣмъ авторъ переходитъ къ изложенію способа *чашекъ вѣсовъ* для нахожденія неизвѣстной величины**); методъ этотъ Алкалзади поясняетъ на частныхъ примѣрахъ, изъ числа которыхъ мы указали на одинъ уже выше (см. стр. 578). Собственно къ Алгебрѣ авторъ приступаетъ къ третьей главѣ, озаглавленной: „о возстановленіи и противоставленіи". Неизвѣстную величину Алкалзади, подобно другимъ арабскимъ математикамъ называетъ терминами *chaï—вещь* или *djidsr—корень*. Квадратъ неизвѣстной

---

*) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalçâdi ect. pag. 48—59.

**) *Woepcke*, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalçâdi ect. pag. 49—50.

онъ называетъ *mâl*. Дѣйствіе *возстановленія—djabr*, по словамъ автора, состоитъ въ „дѣйствіи отнятія частицы отрицанія и того что за ней слѣдуетъ и возстановлении этого, при посредствѣ сочетанія, съ тѣмъ, что находиться въ другой части“. Въ этомъ состоитъ *алгебра*. *Противоставленіе же—mokâbalah* и сравненіе состоитъ въ дѣйствіи сравненія членовъ и отнятія подобныхъ: отрицательнаго отъ положительнаго. Предметъ Алгебры, по словамъ Алкалзади, обнимаетъ шесть случаевъ. Случаи эти суть ничто иное какъ шесть формъ уравненій, о которыхъ мы имѣли случай уже упоминать многократно выше.

Изъ числа различныхъ правилъ, данныхъ Алкалзади, въ четвертой части своего сочиненія, укажемъ на слѣдующія: при умноженіи положительной величины на положительную или отрицательной на отрицательную, произведеніе всегда равно величинѣ положительной; при умноженіи же положительной величины на отрицательную, или обратно, произведеніе всегда будетъ отрицательное. Далѣе слѣдуютъ правила, которыя легко выразить слѣдующими выраженіями:

$$ax^m . bx^n = (a . b)x^{m+n}$$

$$ax . bx = abx^2 \quad , \quad ax . bx^2 = abx^3 \quad , \quad ax . bx^3 = abx^4$$

$$ax^2 . bx^2 = abx^4 \quad , \quad ax^2 . bx^3 = abx^5 \quad , \quad ax^3 . bx^3 = abx^6$$

$$ax^m : bx^n = (a : b)x^{m-n}$$

$$ax^m : bx^m = a : b \quad , \quad ax^m : b = (a : b)x^m$$

$$ax^3 : bx^2 = (a : b)x \quad , \quad ax^3 : bx = (a : b)x^2 \quad , \quad ax^2 : bx = (a : b)x$$

Въ заключеніи къ своему сочиненію Алкалзади показываетъ какъ можетъ быть избавлено уравненіе отъ содержащихся въ немъ отрицательныхъ членовъ. Вопросъ этотъ онъ рѣшаетъ въ примѣненіи къ частному случаю, именно въ примѣненіи къ уравненію:

$$3x^2 - 36 = 32x - x^2$$

Уравненіе это Алкалзади приводитъ къ формѣ:

$$4x^2 = 32x + 36$$

или:

$$x^2 = 8x + 9$$

которое онъ рѣшаетъ прямо подводя къ соотвѣтствующему ему типу. Корень Алкалзади находитъ равнымъ $x = 9$.

Въ остальныхъ двухъ отдѣлахъ заключенія Алкалзади рѣшаетъ нѣ-

сколько вопросовъ, относящихся къ суммированію строкъ. Взявъ рядъ чиселъ:

256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

который онъ пишетъ въ видѣ:

256	128	64	32	16	8	4	2	1

Алкалзади находитъ зависимость между членами этого ряда, которая можетъ быть представлена выраженіемъ:

$$2^n = (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots\ldots + 2^2 + 2 + 1) + 1$$

Написанное выраженіе принадлежитъ къ свойствамъ ряда:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots + 2^{n-1} + 2^n$$

который есть ничто иное, какъ рядъ написанный Алкалзади. Для суммы членовъ ариѳметической прогрессіи:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1}$$

Алкалзади даетъ выраженіе:

$$S = \frac{a(ar^{n-1} - a)}{ar - a} + ar^{n-1}$$

Выраженіе это, очевидно, тождественно съ общеупотребляемымъ въ настоящее время, именно:

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Далѣе дано выраженіе суммы членовъ ряда, вида:

$$a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + \ldots\ldots + [a + (n-1)r]$$

которая представится въ формѣ:

$$S = [r(n-1) + 2a]\frac{n}{2}$$

Показавъ суммированіе ариѳметическихъ строкъ на частныхъ примѣрахъ Алкалзади даетъ выраженія для суммы ряда натуральныхъ чиселъ, суммы ихъ квадратовъ и кубовъ, а также суммы рядовъ четныхъ и нечетныхъ чиселъ, ихъ квадратовъ и кубовъ. Выраженія эти даны въ видѣ правилъ,

съ поясненіемъ на частныхъ примѣрахъ. Выраженія, данныя Алкалзади, легко представить въ слѣдующихъ формахъ:

$$1+2+3+4+\ldots+n=(n+1)\frac{n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=(1+2+3+\ldots+n)\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\right)$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

$$2+4+6+8+\ldots+2n=\frac{2n+2}{2}\cdot n$$

$$2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2=(2+4+6+\ldots+2n)\left(\frac{2}{3}2n+\frac{2}{3}\right)$$

$$2^3+4^3+6^3+8^3+\ldots+(2n)^3=(2+4+6+\ldots+2n)\,.\,2(2+4+6+\ldots+2n)$$

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=\left[\frac{(2n-1)+1}{2}\right]^2=n^2$$

$$1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{2n-1}{6}\,.\,2n\,.\,(2n+1)$$

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3=$$
$$=[1+3+5+\ldots+(2n-1)][2\,.\,\{1+3+5+\ldots+(2n-1)\}-1]$$

На этомъ заканчивается ариѳметическій трактатъ Алкалзади.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ объ способѣ выраженія алгебраическихъ формулъ, примѣняемомъ Алкалзади. Въ его сочиненіи мы находимъ символы, не въ смыслѣ сокращеній извѣстныхъ терминовъ, какъ это существовало уже раньше, напр. въ „Ариѳметикахъ" Діофанта, а въ видѣ опредѣленныхъ знаковъ. Изъ такихъ символовъ особеннаго вниманія заслуживаетъ знакъ равенства, выражаемый символомъ ل. По мнѣнію Венке символъ этотъ произошелъ отъ окончанія *lâm* слова *сравнивать*. Знакъ этотъ Алкалзади ставитъ между обѣими частями уравненія, совершенно такъ, какъ мы въ настоящее время ставимъ знакъ =. Въ каждой части уравненія Алкалзади ставитъ сначала положительныя величины, а затѣмъ отрицательныя, которыя отъ первыхъ отдѣлены знакомъ الا, соотвѣтствующимъ частицѣ *illâ—безъ*. Въ другихъ рукописяхъ „Ариѳметики" Алкалзади символъ вычитанія выраженъ прямо сокращеннымъ знакомъ لا—*lâ*.

Въ такой формѣ знакъ этотъ ничѣмъ не отличается отъ употребляемаго нынѣ знака *минусъ*, выражающаго дѣйствіе вычитанія одной величины изъ другой.

Неизвѣстную величину x арабскіе математики, а также и Алкалзади въ своей „Ариѳметикѣ", обозначають начальнымъ знакомъ ش слова *chai*—*вещь*. Квадратъ неизвѣстной x^2 обозначали знакомъ م слова *mâ* —*имущество*. Третею степень неизвѣстной x^3 обозначали знакомъ ﻛ, или же также символомъ ك, соотвѣтствующимъ начальному слогу слова *ąab* *кубъ*. Корень изъ ирраціональныхъ величинъ Алкалзади обозначаетъ знаком $\geq$, поставленнымъ надъ числомъ изъ котораго извлекается корень. Знакъ $\geq$ соотвѣтствуетъ начальному слогу *djî n* слова *djider*—*корень*; онъ соотвѣтствуетъ нынѣ употребляемому знаку радикала. Также употребляется этотъ символъ для обозначенія неизвѣстной величины въ пропорціи, когда извѣстны три остальныя. При этомъ вмѣсто неизвѣстной величины ставятъ знакъ $\geq$, а между ней и извѣстными ставятъ знаки ∴. Такъ напр. по приведенному обозначенію пропорція:

$$7:12=84:x$$

напишется въ видѣ выраженія:

$$\geq \therefore 84 \therefore 12 \therefore 7$$

Кромѣ того также существуетъ въ „Ариѳметикѣ" Алкалзади примѣненіе показателей, которые носятъ названіе *ass*, т. е. *начало*, *основаніе* Терминъ этотъ употребляется въ такомъ смыслѣ, что напр. Алкалзади говоритъ: „*ass* куба есть три". Примѣненіе показателей вполнѣ ясно видно у Алкалзади, когда онъ даетъ правила при умноженіи и дѣленіи величинъ, возвышенныхъ въ степени. Знакъ $\geq$, какъ радикалъ, Алкалзади употребляетъ слѣдующимъ образомъ въ выраженіяхъ:

$$\sqrt{48}\quad,\quad 3\sqrt{6}\quad,\quad \sqrt{20^4/_7}\quad,\quad \sqrt{\sqrt{72}}$$

онъ пишетъ:

$$\frac{\geq}{48}\quad,\quad \frac{\overset{3}{\geq}}{6}\quad,\quad \frac{\geq}{20^4/_7}\quad,\quad \frac{\geq\geq}{72}$$

Приведенные примѣры могутъ въ достаточной степени уяснить въ чемъ именно заключался символическій пріемъ употребленный Алкалзади, для приведенія алгебраическихъ выраженій къ болѣе простому виду. Хотя символы, употребляемые Алкалзади, весьма несовершенны, но они заслуживаютъ особеннаго вниманія, какъ одна изъ первыхъ попытокъ введенія символовъ для упрощенія математическихъ выраженій.

Разсматривая содержаніе „Ариѳметики" Алкалзади мы видили, что

онъ занимался также вопросомъ суммированія различныхъ геометрическихъ строкъ. Вопросъ о нахожденіи суммы членовъ извѣстныхъ рядовъ занималъ многихъ арабскихъ математиковъ. Одинъ изъ вопросовъ подобнаго рода былъ также рѣшенъ съ геометрической точки зрѣнія извѣстнымъ Алкарги въ своемъ сочиненіи „Факри". До насъ дошли многія рукописи, въ которыхъ изслѣдуются вопросы подобнаго рода. Нѣкоторыя изъ этихъ сочиненій были изданы Вепке *), столь ревностно занимавшимся всѣмъ, что сколько нибудь могло способствовать разъясненію вопроса о развитіи математическихъ наукъ среди арабовъ. Изъ числа изданныхъ Вепке рукописей особеннаго вниманія заслуживаетъ отрывокъ **), принадлежащій сочиненію „Ключъ счисленія", написанному врачемъ *Джамшидъ-бенъ-Масудъ-бенъ-Магометомъ*, прозваннымъ *Гіятъ-Еддинъ-Алкахани*. Авторъ отрывка принадлежалъ къ числу астрономовъ, принимавшихъ участіе при составленіи астрономическихъ таблицъ, вычисленныхъ во время знаменитаго Улу-Бека. Слѣдовательно разсматриваемая рукопись написана въ началѣ XV-го столѣтія. Въ этой рукописи показано суммированіе рядовъ вида:

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots\ldots+(n-2)(n-1)n=$$
$$=[1+2+3+\ldots\ldots+(n-2)+(n-1)][1+2+3+\ldots\ldots+(n-2)+(n-1)-1]$$

Авторъ находитъ сумму такого ряда для частнаго значенія $n=6$, при чемъ получаетъ $S=210$.

Другое правило, данное Гіятъ-Еддиномъ, относиться къ нахожденію суммы четвертыхъ степеней ряда натуральныхъ чиселъ. Правило данное арабскимъ математикомъ можетъ быть выражено формулой вида:

---

*) Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de trois manuscrits arabes inédits de la bibliothèque impériale de Paris côtés Nos 951_1, 952_2 et 952 du supplément arabe. Par *M. F. Woepcke.* Помѣщено въ Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da *Barnaba Tortolini.* T. V, Roma, 1863, in-4. pag. 147—181.

Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de deux manuscrits arabes inédits du *British Museum* de Londres côtés Nos CCCCXVII et CCCCXIX des manuscrits orientaux (Nos 7469 et 7470 des manuscrits additionnel). Par *M. F. Woepcke.* Помѣщено въ Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da *Barnaba Tortolini.* T. VI, Roma, 1864, in-4. pag. 225—248.

Статьи эти перепечатаны также въ Journal de Mathématiques pures et appliquées. Deuxième série. T. IX—X, 1864—65, pag. 337—383, 83—116.

**) *Woepcke,* Passages relatifs a des sommations de séries de cubes extraits de deux manuscrits arabes inédits du *British Museum.* См. Manuscrit coté CCCCXIX. Annali di Matematica pura ed applicata, T. VI, 1864, pag. 245—248.

$$1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\ldots\ldots+n^4=$$

$$=\left[\frac{1}{5}[1+2+3+..+(n-1)+n-1]+[1+2+3+..+n]\right][1^2+2^2+3^2+...+n^2]$$

$$=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

Кромѣ приведенныхъ рядовъ въ указанномъ отрывкѣ есть еще другіе, но они не представляютъ ничего особеннаго. Выраженіе же для суммы четвертыхъ степеней ряда натуральныхъ чиселъ заслуживаетъ особеннаго вниманія, какъ показывающее степень совершенства арабскихъ математиковъ въ рѣшеніи вопросовъ подобнаго рода. Изъ какихъ началъ было найдено это выраженіе намъ неизвѣстно, за недостаткомъ какихъ либо указаній въ разсматриваемой рукописи.

Меріемъ-алъ-Челеби. Занимаясь астрономическими вычисленіями арабскимъ астрономамъ необходимо было пользоваться тригонометрическими таблицами. Первыя тригонометрическія таблицы именно таблицы синусовъ, вѣроятно были заимствованы арабскими астрономами отъ индусовъ, въ видѣ извѣстныхъ намъ уже *kardagat*'овъ. Изучая „Альмагестъ" Птоломея и пользуясь тамъ находящимися таблицами хордъ, арабы построили таблицы синусовъ. Полагая радіусъ $r=60^{\text{partes}}$ и примѣняя шестидесятичныя дроби можно было построить таблицу синусовъ, пользуясь величинами, находящимися въ таблицахъ хордъ „Альмагеста"; величины эти можно было послѣдовательно дѣлить пополамъ и такимъ образомъ получить вмѣсто хорды $1^0=1^p\,2'\,50''$, $\sin 30'=0^p\,31'\,25''$ и т. д. Величины эти были вѣрны до $1''$, т. е. точны до 5-милліонныхъ радіуса.

Болѣе удовлетворительныя и точныя таблицы были вычислены египетскимъ астрономомъ *Ибнъ-Юнисомъ* умершимъ въ 1008 году*). Этотъ астрономъ вычислилъ астрономическія таблицы, извѣстныя подъ названіемъ „Большая таблица" или „Гакемитскія таблицы", названныя такъ, въ честь калифа Гакема (996—1021), которому онѣ были посвящены. Таблицы эти пользовались извѣстностью. Найдя значеніе соотвѣтствующее $\sin 1^0$ Ибнъ-Юнисъ послѣдовательнымъ раздѣленіемъ на два находитъ $\sin 30'$, $\sin 15'$, $\sin 7'30''$. Подобнымъ же интерполяціоннымъ пріемомъ онъ строитъ таблицу синусовъ отъ $10'$ до $10'$. Такая же таблица была построена Абулъ-Вефой для тангенсовъ.

Вскорѣ послѣ Ибнъ-Юниса были построены таблицы *Арзахелемъ*,

---

*) Полное имя его Али-ибнъ-Аби-Саидъ-Абдеррахманъ. Онъ былъ современникомъ Абулъ-Вефы.

жившимъ около 1080 г. въ Толедо. Таблицы эти извѣстны подъ названіемъ *Толедскихъ*, такъ какъ онѣ вычислены для меридіана Толедо. Впослѣдствіи таблицы эти послужили основаніемъ при составленіи *Альфонсовыхъ* таблицъ, появившихся въ 1252 г.*). Таблицы Ибнъ-Юниса были также воспроизведены снова Нассиръ-Еддиномъ-Туси. Онъ ввелъ незначительныя поправки и нововведенія. Таблицы эти названы *Ильханіевыми*. Впослѣдствіи онѣ были исправлены *Гіамъ-Еддиномъ Аль-Халиби*, а затѣмъ, въ 1360 г., *Ибнъ-Шатиромъ*, который ввелъ въ таблицы нѣкоторыя измѣненія.

Всѣ эти таблицы заставляли желать многаго, а потому *Улу-Бекъ*, внукъ Тамерлана, подъ своимъ руководствомъ, предпринялъ вычисленіе новыхъ астрономическихъ таблицъ. Таблицы эти были названы *таблицами Улу-Бека***). Въ составленіи ихъ принимали участіе астрономы Самаркандской обсерваторіи и академіи. Изъ помощниковъ Улу-Бека извѣстны имена астрономовъ: *Джіятъ-Еддинъ Джамшида*, *Алкушди*, *Кади-Заде*, о которомъ мы говорили выше, и сына его *Моріемъ-аль-Челеби*. Таблицы Улу-Бека были изданы извѣстнымъ Седильо***).

Моріемъ-аль-Челеби написалъ въ 1498 г. „Комментаріи" на таблицы Улу-Бека. Комментаріи эти были изданы Седильо****). Авторъ комментарій

---

*) Нѣкоторые ученые полагаютъ, что главное участіе, при составленіи Альфонсовыхъ таблицъ, принадлежитъ толедскому раввину *Исааку Абенъ-Сиду*, прозванному также *Гасаномъ*. Составленіе таблицъ стоило королю Альфонсу около 40000 дукатовъ. Таблицы эти были впослѣдствіи комментированы различными учеными. Изъ этихъ комментарій болѣе извѣстные принадлежатъ тюрингенскому монаху *Іоанну Саксонскому*, написавшему „Canones in tabulas astronomicas Alphonsi" въ 1331 г.; феррарскому астроному *Джіованни Біанчини* въ 1458 г., и испанскому врачу *Альфонседу* въ концѣ XV в. Таблицы, комментированныя Біанчини, были впервые напечатаны подъ слѣдующимъ заглавіемъ: „Alphonsi regis Castellae, coelestium motuum Tabulae, nec non Stellarum fixarum longitudines ac latitudines Alphonsi tempore ad motus veritatem reductae, praemissis Joannis Saxoniensis in has Tabulas Canonibus. Venetiis, 1483". Другія изданія появились въ 1488, 1492, 1517, 1524 гг. Лучшее изданіе Альфонсовыхъ таблицъ принадлежитъ парижскому профессору *Paschasius Hamellus*'у напечатанное въ 1545 и 1553 гг. въ Парижѣ.

**) Таблицы звѣздъ были изданы Томасомъ Гидомъ (*Hyde*) подъ заглавіемъ: Tabulae longitudinis et latitudinis stellarum fixarum, ex observatione Ulugh Beighi Tamerlani magni nepotis etc. Oxonii, 1665, in-4. Таблицы эти составлены въ Самаркандѣ въ 1437 г. По преданіямъ положеніе звѣздъ было опредѣлено при помощи большаго круга, коего радіусъ равнялся высотѣ церкви Св. Софіи въ Константинополѣ. Объ Улу-Бекѣ мы уже упоминали выше (см. стр. 250).

***) *L. A. Sédillot*, Tables astronomiques d'Oloug Beg, fils de Schah-Rokh, fils de Tamerlan, commentées et publiées avec le texte en regard. 1839. Paris.

L. A. Sédillot, Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug Beg, publiés avec notes et variantes, et précédés d'une introduction. Paris. 1847, in-8.

****) См. Journal Asiatique, Serie V, T. II, 1853, pag. 333—356.

излагаетъ обстоятельно пріемы, употребленные Улу-Бекомъ, при составленіи таблицъ, а также указываетъ на нѣкоторые другіе методы, данные другими геометрами, при помощи которыхъ можно достигнуть болѣе точныхъ результатовъ при вычисленіи таблицъ. Методы о которыхъ говоритъ Челеби относятся къ опредѣленію приближеннаго значенія Sin 1°. Такой методъ вычисленія былъ необходимъ, такъ какъ въ то время не умѣли еще разлагать въ ряды тригонометрическихъ функцій, а вычисляли ихъ при помощи линій въ кругѣ и ихъ отношеній къ радіусу круга. Извѣстно также, что только синусы угловъ кратныхъ отъ 3° можно выразить въ конечной формѣ при помощи радикаловъ второй степени, вычисленіе же Sin 1°, необходимое для нахожденія промежуточныхъ синусовъ, зависитъ отъ уравненія третьей степени, а потому требуетъ особенныхъ пріемовъ.

Методы, приводящіе къ указанной цѣли, и изложенные Челеби въ своихъ „Комментаріяхъ", двухъ родовъ. Первый методъ есть пріемъ интерполяціонный, напоминающій пріемъ Птоломея для вычисленія хордъ 1°. Методъ арабскаго геометра представляетъ преимущества и точнѣе пріема Птоломея. Второй методъ состоитъ въ непосредственномъ рѣшеніи требуемаго вопроса. Челеби прямо приступаетъ къ рѣшенію уравненія третьей степени, по приближенію, и рѣшаетъ его численно особеннымъ пріемомъ. Пріемъ этотъ, въ сущности, есть ничто иное какъ разложеніе въ ряды или примѣненіе метода неопредѣленныхъ коэфиціентовъ. Послѣдній методъ представляетъ особенный интересъ, такъ какъ онъ основанъ на приближенномъ рѣшеніи уравненія третьей степени. Разборомъ приведенныхъ двухъ методовъ занимался Вепке и изложилъ ихъ въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ *). Ганкель **) обращаетъ вниманіе на то, что на Западѣ, методъ приближеннаго рѣшенія уравненій былъ снова найденъ только въ XVI столѣтіи Віетомъ. Пріемъ приближеннаго вычисленія уравненія Челеби приписываетъ геометру *Атабодину-Джамшиду* ***). Методъ приближеннаго рѣшенія кубическихъ уравненій, по мнѣнію Кантора, указываетъ на то, что арабскіе геометры считали невозможнымъ алгебраическое рѣшеніе такихъ уравненій.

---

*) *F. Woepcke,* Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de Sin 1°. Помѣщено въ Journal de mathématiques pures et appliquées. T. XIX, 1854. pag. 153—170, 301—303.

**) Ганкель подробно изслѣдуетъ методъ приближеннаго рѣшенія. См. *Hankel,* Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, pag. 287—293.

***) По мнѣнію Ганкеля и нѣкоторыхъ оріенталистовъ геометры Гіясъ-Еддинъ и Атабединъ одно и то же лицо. Гіясъ-Еддинъ былъ сотрудникомъ Улу-Бека и, по словамъ Хаджи-Хальфы, написалъ сочиненіе: Tractatus de chorda et sinus tertiis arcus eliciendis, cujus chorda et sinus cognita sunt.

Бега-Еддинъ. Послѣдній арабскій математикъ, о которомъ намъ остается говорить, принадлежитъ сравнительно болѣе позднему времени, именно XVI и началу XVII столѣтій. *Бега-Еддинъ-Магометъ-бенъ-Алгозейнъ-Алъ-Амули* родился въ 1547 году въ городѣ Амулѣ, въ Сиріи, а умеръ въ 1622 г. въ Испаганѣ. Онъ вѣроятно былъ родомъ персъ. Свѣдѣній о жизни и дѣятельности Бега-Еддина сохранилось весьма мало *). Изъ числа его сочиненій въ настоящее время дошло до насъ только одно, заглавіе котораго: „Эссенція искусства счисленія" *(Kholâçat-al-Hissâb).* По своему содержанію сочиненіе это есть сборникъ правилъ для учащихся по различнымъ отдѣламъ математическихъ наукъ. Въ сочиненіи Бега-Еддина есть главы ариеметическаго, алгебраическаго и геометрическаго содержанія.

Сочиненіе Бега-Еддина было весьма распространено и пользовалось большимъ уваженіемъ и извѣстностью не только среди арабскихъ, но и среди индусскихъ математиковъ. По словамъ Страхея, трактатъ Бега-Еддина служилъ учебнымъ пособіемъ при преподаваніи математическихъ наукъ въ школахъ Индостана и Персіи, еще въ первой четверти настоящаго столѣтія. Послѣднее обстоятельство можетъ только служить подтвержденіемъ низкаго состоянія математическихъ наукъ у арабовъ и индусовъ въ настоящее время, такъ какъ по своему содержанію сочиненіе Бега-Еддина не представляетъ ничего особеннаго. Сочиненіе Бега-Еддина изложено весьма сжато и весьма вѣроятно, что устныя дополненія и толкованія занимали не послѣднее мѣсто въ преподаваніи математики въ школахъ. Въ началѣ этого столѣтія индусскій математикъ *Маулави-Рушенъ-Али* воспользовавшись многочисленными рукописными списками сочиненія Бега-Еддина перевелъ его на персидскій языкъ съ комментаріями и напечаталъ въ Калькуттѣ **). Изданіе это служило учебнымъ пособіемъ при преподаваніи математики въ индусскихъ школахъ, въ двадцатыхъ годахъ настоящаго столѣтія. При

*) Нѣкоторыя указанія о жизни и дѣятельности *Бега-Еддина* даны Страхеемъ въ Asiatic Researches, T. XII, 1816, Calcutta, pag. 166. Страхей полагаетъ, что Бега-Еддинъ жилъ между 1575—1658 годами.

**) Сочиненіе это было издано въ началѣ настоящаго столѣтія, съ персидскимъ переводомъ, сдѣланнымъ *Рушеномъ Али.* Заглавіе этого изданія слѣдующее: The Khoolasut-ool-Hisab a compendium of Arithmetic and Geometry; in the Arabic Language, by Buhae-ood-Deen, of Amool in Syria, with a translation into Persian and commentary, by the late Moulawee Rushun Ulee, of Juonpoor; to which is added a treatise on Algebra, by Nujm-ood-Deen Ulee Khan, Head qazee to the sudr Deewanee and Nizamut Udalut. Revised and edited by Tarinee Churun Mitr, Moulawee Jan Ulee and Gholam Ukbar, under the patronage of the right honorable the Governor General in Council, at the recommendation of the council of the college of Fort William. Calcutta, printed by P. Pereira, at Hindoostanee press, 1812, in-4.

составленіи своего труда Рушенъ-Али пользовался также многочисленными комментаріями на сочиненіе Бега-Еддина, написанными различными учеными. Страхей говоритъ, что изъ числа этихъ комментарій особенно много заимствовалъ Рушенъ-Али изъ персидскаго перевода сочиненія Бега-Еддина, составленнаго шестдесятъ лѣтъ послѣ смерти Бега-Еддина. Сочиненіе „Эссенція искусства счисленія" было переведено на нѣмецкій языкъ Нессельманомъ *); къ своему переводу онъ приложилъ арабскій текстъ сочиненія. Другой переводъ былъ сдѣланъ Марромъ **) на французскомъ языкѣ.

Кромѣ сочиненія „Эссенція искусства счисленія" Бега-Еддинъ написалъ еще обширное сочиненіе, по тому же самому предмету, заглавіе котораго: „Океанъ искусства счисленія" *(Bâhr al Hissâb)*. На послѣднее сочиненіе онъ ссылается, но неизвѣстно было-ли оно окончено авторомъ. Также были написаны Бега-Еддиномъ комментаріи на сочиненіе *Мозаккика Туси* объ астролябіи. По словамъ Страхея Бега-Еддинъ написалъ еще нѣсколько другихъ сочиненій, содержаніе которыхъ относиться къ Астрономіи, юриспруденціи, грамматикѣ, богословію и другимъ различнымъ наукамъ. Всѣ эти сочиненія до насъ не дошли.

Разсмотримъ теперь содержаніе сочиненія Бега-Еддина „Эссенція искусства счисленія". Сочиненіе это состоитъ изъ вступленія, введенія, десяти главъ и заключенія. По своему содержанію первыя пять главъ относятся къ Ариѳметикѣ; шестая и седмая заключаютъ Геометрію, восьмая—Алгебру; девятая—прогрессіи и нѣкоторыя другія правила ариѳметическаго содержанія; и наконецъ въ десятой главѣ показано рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ. Въ заключеніи Бега-Еддинъ приводитъ нѣкоторые вопросы, надъ рѣшеніемъ которыхъ занимались многіе ученые, но безъ успѣха.

Изложимъ содержаніе сочиненія Бега-Еддина, по главамъ. Сочиненіе свое Бега-Еддинъ начинаетъ обращеніемъ къ Богу, къ которому онъ обращается съ славословіемъ. Онъ говоритъ, что сумма милостей, данныхъ Богомъ людямъ, неограничивается никакимъ числомъ. Затѣмъ онъ указываетъ на важность и значеніе математическихъ наукъ, т. е. искусства счисленія. О своемъ сочиненіи, Бега-Еддинъ выражается, что оно содержитъ только самое необходимое и что въ немъ заключается эссенція сочиненій древнихъ авторовъ.

*) *Nesselmann*, Beha-Eddin's Essenz der Rechenkunst. Arabisch und Deutsch herausg. von Nesselmann. Berlin. 1843. in-8.

**) Напечатано въ Nouvelles Annales de Mathématiques, T. V, 1846. Второе изданіе появилось подъ заглавіемъ: Kholâçat al Hissâb ou Quintessence du Calcul par Behâ-Eddin al Aamouli, trad. et annoté par Aristide Marre. 2 éd. Rome. 1864. in-8.

Въ введеніи авторъ начинаетъ съ опредѣленія искусства счисленія, которое, по его словамъ, есть наука, при помощи которой отыскиваются неизвѣстныя числа на основаніи имъ присущихъ свойствъ. Предметъ искусства счисленія есть число. Далѣе Бега-Еддинъ говоритъ, что по мнѣнію нѣкоторыхъ „число есть *множество*, состоящее изъ единицы, или изъ того, что составлено изъ единицъ“. По мнѣнію же другихъ „число есть полусумма его обѣихъ границъ“. При этомъ Бега-Еддинъ замѣчаетъ, что по первому опредѣленію единица входитъ въ число чиселъ, а по второму она не входитъ, но нѣкоторые старались ее ввесть принимая за нижній предѣлъ дроби. По мнѣнію же автора: „истина заключается въ томъ, что единица не есть число, хотя числа составлены изъ нея; это подобно тому, какъ изъ простой (первобытной) матеріи составлены тѣла, она же сама не есть тѣло“. Далѣе онъ даетъ опредѣленіе цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ, раціональныхъ и ирраціональныхъ. Числа онъ дѣлитъ на три главные разряда: единицы, десятки и сотни, но при этомъ замѣчаетъ, что высшихъ разрядовъ существуетъ безконечно много. Замѣтимъ здѣсь, что опредѣленія чиселъ данныя Бега-Еддиномъ, носятъ на себѣ вполнѣ греческій характеръ; воззрѣніе на единицу, какъ не принадлежащую къ ряду чиселъ, существовало уже у Никомаха. Въ концѣ введенія Бега Еддинъ говоритъ, что индусы изобрѣли извѣстные девять знаковъ для изображенія чиселъ.

Глава I раздѣлена на шесть отдѣловъ *). Въ этой главѣ Бега-Еддинъ показываетъ основныя ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами. Онъ начинаетъ съ сложенія, затѣмъ переходитъ къ удвоенію, дѣленію на два, вычитанію, умноженію, дѣленію и заканчиваетъ извлеченіемъ квадратнаго корня. Послѣ каждаго дѣйствія показана его повѣрка. Методы и пріемы, употребленные Бега-Еддиномъ, почти во всемъ сходны съ пріемами Алкалзади, а потому мы о нихъ не будемъ говорить, замѣтимъ только, что каждое дѣйствіе авторъ начинаетъ съ опредѣленія дѣйствія и его объясненія, а затѣмъ уже слѣдуютъ примѣры и практическое приложеніе указанныхъ правилъ.

При умноженіи чиселъ Бега-Еддинъ различаетъ нѣсколько случаевъ, именно: умноженіе простаго числа на простое, простаго на сложное, и сложнаго на сложное. Подъ именемъ *простаго* числа онъ понимаетъ не только числа, состоящія изъ одной цифры, но и различныя произведенія такихъ чиселъ на степени 10. Всѣ эти случаи онъ сводитъ на первый. Дѣлая умноженіе Бега-Еддинъ не пользуется таблицей умноженія **), а даетъ нѣсколько

*) *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, etc. pag. 5—17.

**) Приведенныя два правила предполагаютъ, что знаніе таблицы умноженія на память необходимо. Таблица умноженія была извѣстна арабскимъ математикамъ, но располо-

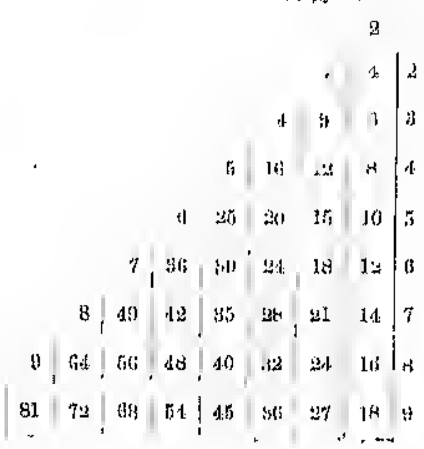
правилъ. Нѣкоторыя изъ нихъ весьма остроумны, такъ напримѣръ, для умноженія двухъ чиселъ, заключающихся между пятью и десятью, онъ даетъ слѣдующія правила. *a*) „возьми одинъ изъ множителей десять разъ, и изъ произведенія вычти произведеніе этого множителя на дополненіе до десяти другаго множителя. Пусть требуется умножить 8 на 9; вычтемъ изъ 90 произведеніе 9 на 2, то въ остаткѣ получимъ 72". *b*) „сложи оба множителя и разсматривай избытокъ этой суммы надъ десятью, какъ десятки; къ полученному результату придай произведеніе дополненій до десяти, обѣихъ множителей. Пусть дано умножить 8 на 7; прибавимъ къ 50 произведеніе 2 на 3". Далѣе слѣдуютъ еще другія правила. Для производства дѣйствія умноженія Бега-Еддинъ излагаетъ нѣсколько различныхъ способовъ, которые извѣстны были раньше Алкальзади. При извлеченіи корней изъ ирраціональныхъ чиселъ Бега-Еддинъ даетъ правило, которое можно выразить формулой.

$$\sqrt{a^2+\varepsilon}=a+\frac{\varepsilon}{2a+1}$$

Повѣрку всѣхъ дѣйствій Бега-Еддинъ производитъ при посредствѣ числа 9 и саму повѣрку называетъ *вѣсами (myzân)*.

Глава II посвящена дробямъ. Она состоитъ изъ трехъ подготовительныхъ раздѣловъ и шести отдѣловъ. Въ раздѣлахъ Бега-Еддинъ даетъ опредѣленіе дроби, говоритъ о различныхъ видахъ дробей и показываетъ переходъ отъ одного вида дробей къ другому. Въ шести слѣдующихъ за этимъ отдѣлахъ авторъ переходитъ къ дѣйствіямъ надъ дробями. Онъ послѣдова-

женіе чиселъ иное, чѣмъ въ общепринятой таблицѣ въ настоящее время. Рубемъ-Али, въ своемъ комментаріи на сочиненіе Бега-Еддина, даетъ таблицу умноженія въ формѣ, которая дана была ей арабскими математиками. Составъ ея слѣдующій:



							2	
						.	4	2
					4	9	6	3
				5	16	12	8	4
			6	25	20	15	10	5
		7	36	30	24	18	12	6
	8	49	42	35	28	21	14	7
9	64	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

тельно излагаетъ правила сложенія, удвоенія, дѣленія на два, вычитанія, умноженія и дѣленія дробей. Затѣмъ показано извлеченіе квадратныхъ корней изъ дробей и приведеніе дробей къ одному знаменателю *).

Глава III. Въ этой главѣ авторъ опредѣляетъ, что такое геометрическая пропорція и указываетъ на ея свойства. Пропорціямъ Бега-Еддинъ придаетъ большое значеніе, такъ какъ при помощи ихъ можно рѣшать много различныхъ вопросовъ, гдѣ по даннымъ тремъ величинамъ требуется найти четвертую, если только дана зависимость между этими величинами. Свойства пропорцій, для примѣра, Бега-Еддинъ прилагаетъ къ рѣшенію нѣсколькихъ вопросовъ. Разсматриваемая глава озаглавлена Бега-Еддиномъ: „отысканіе неизвѣстной при посредствѣ пропорцій“ **).

Глава IV также посвящена отысканію неизвѣстныхъ; она озаглавлена: „отысканіе неизвѣстныхъ при помощи двухъ ложныхъ положеній“. Методъ Бега-Еддина есть ничто иное, какъ извѣстное „правило вѣсовъ“, о которомъ мы говорили уже выше ***). Пріемъ этотъ служилъ къ рѣшенію уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ ****).

Глава V озаглавлена: „отысканіе неизвѣстныхъ при помощи метода обратныхъ дѣйствій“ ****). Методъ этотъ состоитъ въ томъ, что производятъ дѣйствія прямо противоположныя тѣмъ, которыя указаны въ предлагаемомъ вопросѣ. Такъ напр. если сказано удвоить, то дѣлятъ на два; если сказано умножить, то дѣлятъ и т. д. Пріемъ этотъ есть ничто иное, какъ способъ для отысканія неизвѣстной величины изъ уравненія. Правило это было извѣстно также индусскимъ математикамъ *****). Для примѣра приведемъ одинъ изъ вопросовъ, рѣшенныхъ Бега-Еддиномъ, который состоитъ въ слѣдующемъ: требуется найти число, которое будучи умножено само на себя, далобы произведеніе, которое сложенное съ 2, а затѣмъ удвоенное и снова сложенное съ 3, раздѣленное на 5, и наконецъ полученное частное умноженное на 10, равнялось-бы 50? Вопросъ этотъ Бега-Еддинъ рѣшаетъ слѣдующимъ образомъ: число 50 онъ дѣлитъ на 10, частное 5 онъ умножаетъ на 5, изъ произведенія 25 вычитаетъ 3, а изъ половины 22 вычитаетъ 2, получивъ такимъ образомъ 9, онъ изъ него извлекаетъ корень квадратный и

*) Ar. Marre, Kholâçat al Hissâb, oct. pag. 17—22.

**) Ar. Marre, Kholâçat al Hissâb, oct. pag. 23—24.

***) Методъ „правила вѣсовъ“ мы изложили выше на стр. 573—575. Там же мы привели одинъ изъ примѣровъ, рѣшенный Бега-Еддиномъ.

****) Ar. Marre, Kholâçat al Hissâb, oct. pag. 24—25.

****) Ar. Marre, Kholâçat al Hissâb, oct. pag. 25—26.

*****) Пріемъ этотъ встрѣчается также въ сочиненіи „Лилавати“ индусскаго математика Баскары (см. стр. 412—413).

получаетъ искомое число, которое, очевидно, есть 3. Разсужденія Бега-Еддина суть ничто иное, какъ рѣшеніе уравненія:

$$\left[\frac{2(x^2+2)+3}{5}\right]10=50$$

Рѣшая это уравненіе, найдемъ:

$$x^2=9 \text{ или } x=3.$$

Глава VI посвящена Геометріи, или какъ Бега-Еддинъ ее озаглавилъ: „искусство измѣренія" *). Глава эта состоитъ изъ приготовительнаго раздѣла и трехъ отдѣловъ. Бега-Еддинъ начинаетъ съ опредѣленія Геометріи; онъ говоритъ: „Искусство мѣрить состоитъ въ отысканіе, сколько разъ заключается въ непрерывной пространственной величинѣ, линейная единица или ея части, или обѣ вмѣстѣ, если это есть линія; или же сколько заключается квадратныхъ единицъ если это есть поверхность; или сколько кубическихъ единицъ если это есть тѣло". По опредѣленію Бега-Еддина линія есть величина одного измѣренія; *прямая линія* есть кратчайшаго изъ всѣхъ, которыя могутъ быть проведены между двумя точками. Она носитъ десять названій, которыя извѣстны **). Затѣмъ авторъ переходитъ къ опредѣленію кривой линіи и круга, плоскости, дуги, діаметра, хорды, сегмента, сектора. При опредѣленіе секторъ Бега-Еддинъ обращаетъ вниманіе на то, что, проводя къ центру круга два радіуса, образуется два сектора, одинъ съ большей дугой и другой съ меньшей. Затѣмъ онъ даетъ опредѣленія фигуръ образованныхъ дугами. Фигуры эти слѣдующія: „плоскость, ограниченная двумя дугами, коихъ выпуклости обращены въ одну сторону, и которыя обѣ меньше полуокружности, называется *луной;* если каждая изъ дугъ больше полуокружности, то получается *подкова;* если обѣ дуги обращены выпуклостями въ различныя стороны и при этомъ равны и меньше полуокружности, то такая фигура носитъ названіе *миробоааны* ***); если дуги больше полуокружности, то получается *рыба*". Послѣ этихъ опредѣленій Бега-Еддинъ

---

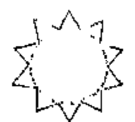
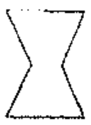
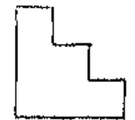
*) *Ar. Marre,* Kholâçat al Hissâb, cet. pag. 26—31.

**) По объясненіямъ одного изъ комментаторовъ сочиненія Бега-Еддина, десять названій прямой линіи суть слѣдующія: сторона, ребро, отвѣсная (или, какъ онъ выражается: паденіе камня), высота, основаніе, діаметръ, діагональ хорда, стрѣла (или sinus versus), высота (въ стереометріи).

***) Нессельманъ, а также Марръ называютъ эту фигуру *Myrobalane.* Названіе это произошло вѣроятно отъ вида фигуры, которая представляетъ сходство съ формой плода дерева, растущаго въ Индіи и называемаго *Myrobalani.*

переходитъ къ прямолинейнымъ фигурамъ, изъ числа которыхъ онъ упоминаетъ: треугольникъ, квадратъ, ромбъ, прямоугольникъ, ромбоидъ и трапецію. Трапеции Бега-Еддинъ различаетъ двухъ родовъ: съ однимъ остріемъ и съ двумя. По объясненіямъ Рушена-Али къ первому виду принадлежитъ трапеція у которой два прямыхъ угла, одинъ тупой и одинъ острый; ко второму виду принадлежатъ трапеции у которыхъ два острыхъ и два тупыхъ угла. Кромѣ того Бега-Еддинъ упоминаетъ еще фигуру, которую онъ называетъ *огурецъ*, но объ этой фигурѣ нѣтъ никакихъ указаній, а потому о видѣ ея ничего неизвѣстно. Изъ многоугольниковъ Бега-Еддинъ разсматриваетъ многоугольники о пяти, шести,..... и двѣнадцати сторонахъ. Всѣ эти фигуры онъ разсматриваетъ также и для случая, когда всѣ стороны равны, т. е. когда онѣ правильны. Для нѣкоторыхъ многоугольниковъ Бега-Еддинъ вводитъ особенныя названія, какъ напримѣръ: *ступенеподобная, барабаноподобная* и *остроконечная* фигура. Одинъ изъ позднѣйшихъ комментаторовъ даетъ чертежи послѣднихъ фигуръ въ слѣдующемъ видѣ (фиг. 74):

Фиг. 74.

Далѣе Бега-Еддинъ переходитъ къ опредѣленію различныхъ тѣлъ; изъ нихъ онъ перечисляетъ: шаръ, кубъ, цилиндръ, конусъ, усѣченный конусъ, призму и пирамиду. Послѣднія двѣ фигуры онъ разсматриваетъ, какъ частный случай, когда основанія цилиндра и конуса суть многоугольники.

Послѣ этихъ опредѣленій Бега-Еддинъ даетъ правила, какъ измѣрять площади прямолинейныхъ и прочихъ фигуръ, а также, какъ измѣряются объемы тѣлъ. Площади треугольниковъ Бега-Еддинъ находитъ по слѣдующему правилу: „если треугольникъ прямоугольный, то площадь его равна половинѣ произведенія одного катета на другой; если же треугольникъ тупоугольный, то площадь его выразится произведеніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины тупаго угла, на противолежащую ей сторону, на половину этой стороны, или обратно. Если треугольникъ остроугольный, то его площадь равна половинѣ произведенія перпендикуляра, опущеннаго изъ одной изъ вершинъ на противолежащую ей сторону". Далѣе авторъ указываетъ признакъ, по которому можно узнать къ какому виду принадлежитъ треугольникъ; если квадратъ одной стороны равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ, то треугольникъ прямоугольный; если же

квадратъ стороны больше, то треугольникъ тупоугольный; если же наконецъ, квадратъ стороны меньше суммъ квадратовъ остальныхъ сторонъ, то треугольникъ остроугольный. Для нахожденія высоты h треугольника ABC дано слѣдующее правило: если стороны треугольника a, b и c, при чемъ a большая сторона, а c меньшая, то разстояніе x вершины B отъ основанія высоты h, выразится формулой:

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

Соединивъ эту точку съ вершиной A треугольника получимъ высоту h. Площадь равносторонняго треугольника, коего сторона a, Бега-Еддинъ находитъ изъ выраженія:

$$\triangle = \sqrt{3\left(\frac{a^2}{4}\right)^2} - \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Далѣе даны правила для нахожденія площадей: квадрата, прямоугольника и ромба. Площади другихъ четыреугольниковъ находятся раздѣленіемъ ихъ на два треугольника. Площади правильныхъ шестиугольниковъ, восьмиугольниковъ и вообще многоугольниковъ съ четнымъ числомъ сторонъ Бега-Еддинъ находитъ умножая половину ихъ периметра на половину діагонали, соединяющей двѣ противолежащія вершины. Всѣ другія многоугольники онъ дѣлитъ на треугольники и затѣмъ находитъ площадь каждаго треугольника отдѣльно.

Площадь круга Бега-Еддинъ находитъ умножая длину окружности на половину радиуса. Длину окружности онъ находитъ измѣряя ее ниткой. Также даны и другія правила для нахожденія площади круга, напр.:

$$S = 4r^2 - \frac{1}{7}r^2 - \frac{1}{14}r^2 = \frac{22}{7}.r^2$$

или:

$$S = \frac{4r^2.11}{14} = \frac{22}{7}.r^2$$

Затѣмъ даны правила для нахожденія длины окружности и діаметра. Послѣ этого Бега-Еддинъ даетъ правила для нахожденія площадей фигуръ, составленныхъ изъ дугъ круга. Для поверхности шара правила выражаются формулами:

$$S = 2r.2\pi r = 4\pi r^2$$

или:

$$S = 4.4r^2 - {}^3/_{14}.16r^2 = {}^{88}/_7 r^2 = 4.{}^{22}/_7 r^2 = 4\pi r^2$$

Далѣе слѣдуютъ правила для нахожденія поверхностей: шароваго сегмента, цилиндра, конуса. О площадяхъ другихъ фигуръ авторъ ничего не говоритъ, а замѣчаетъ только, что онѣ отыскиваются при помощи правилъ указанныхъ выше.

Послѣ этого Бега-Еддинъ переходитъ къ нахожденію объемовъ тѣлъ. Онъ начинаетъ съ шара. Для нахожденія объема шара Бега-Еддинъ даетъ нѣсколько выраженій, изъ которыхъ первое самое точное. Оно состоитъ въ слѣдующемъ правилѣ: „въ шарѣ умножь половину діаметра на одну треть поверхности". Правило это есть ничто иное, какъ выраженіе:

$$V = \frac{2r}{2} \cdot \frac{4\pi r^2}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Другое правило, для нахожденія объема шара, вполнѣ невѣрно; оно приводится къ выраженію вида:

$$V = d^3\left[1 - \frac{3}{14} - \frac{11}{14} \cdot \frac{3}{14} - \frac{3}{14}\left(1 - \frac{3}{14} - \frac{11}{14} \cdot \frac{3}{14}\right)\right] = \frac{1331}{2744} d^3$$

гдѣ d діаметръ шара. Вычисляя π по этому выраженію, найдемъ $\pi = 2.91$. Неточность этого выраженія замѣтилъ Рушенъ-Али и исправилъ его, давъ для объема шара другое выраженіе, именно:

$$V = d^3\left[1 - \frac{3}{14} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{14}\right)\right] = \frac{11}{21} d^3$$

Вычисляя π по этому выраженію, найдемъ $\pi = \frac{22}{7}$. Объемы призмы и цилиндра Бега-Еддинъ находитъ умножая площадь ихъ основаній на высоту. Точно также отыскиваются объемы пирамиды и конуса умножая площади ихъ основаній на треть высоты. Объемы усѣченныхъ конусовъ и пирамидъ Бега-Еддинъ находитъ вычитая изъ цѣлой пирамиды или конуса верхнія дополнительныя пирамиды или конусы. Высоты полной пирамиды или конуса Бега-Еддинъ находитъ по извѣстнымъ высотамъ усѣченныхъ пирамиды или конуса и по даннымъ радіусамъ основаній конуса и даннымъ сторонамъ верхняго и нижняго основаній пирамиды. Означая чрезъ R, r и h радіусы верхняго и нижняго основаній усѣченнаго конуса и его высоту, найдемъ для высоты H цѣлаго конуса выраженіе:

$$H = \frac{h \cdot 2R}{2R - 2r} = \frac{hR}{R - r}$$

Точно также для пирамиды: означая чрезъ a, b и h стороны верхняго и нижняго основаній и высоту усѣченной пирамиды, для высоты полной пирамиды получимъ выраженіе:

$$H = \frac{h \cdot a}{a - b}$$

Приведенныя выраженія для высотъ были извѣстны еще Алкарги, жившему въ XI в. Весьма вѣроятно, что Бега-Еддинъ заимствовалъ ихъ изъ его сочиненія. Доказательствъ, приведеннымъ выраженіямъ, Бега-Еддинъ не даетъ. Онѣ даны прямо въ видѣ извѣстныхъ правилъ. Авторъ только замѣчаетъ, что: „доказательства всѣхъ этихъ дѣйствій объяснены въ моемъ большомъ сочиненіи подъ заглавіемъ „Океанъ искусства счисленія“, окончаніе котораго зависитъ отъ помощи Бога“ *).

Глава VII. Въ этой главѣ авторъ занимается практическими приложеніями Геометріи къ нивеллировкѣ земли для водопроводовъ, опредѣленію высоты предметовъ, нахожденію ширины рѣки и глубины колодцевъ. При рѣшеніи этихъ вопросовъ авторъ пользуется различными вспомогательными приборами, какъ напр.: зеркалами, астролябіями, вѣхами и др. **).

Глава VIII посвящена авторомъ Алгебрѣ ***). Неизвѣстную величину Бега-Еддинъ, подобно другимъ арабскимъ математикамъ, называетъ *вещь—корень*. Число различныхъ степеней неизвѣстной величины Бега-Еддинъ полагаетъ неопредѣленнымъ. При умноженіи двухъ различныхъ степеней неизвѣстной дано правило, по которому слѣдуетъ складывать показатели. Алгебраическія дѣйствія, по словамъ Бега-Еддина, обнимаютъ только шесть формъ, представляющія равенства между тремя величинами, именно: неизвѣстной, ея квадратомъ и числомъ ****). Для облегченія нахожденія различныхъ произведеній и частныхъ этихъ величинъ, получаемыхъ отъ умноженія и

---

*) *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, ect. pag. 31.

**) *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, ect. pag. 32—35.

***) *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, ect. pag. 35—40.

****) Италіанскій математикъ Пачіоли, жившій въ началѣ XVI-го вѣка, также положительно утверждаетъ, что иныхъ, кромѣ упомянутыхъ шести формъ, не существуетъ. Онъ говоритъ: „altramente che in questi 6 discorsi modi non e possibile alcuni loro equatione“. Такое воззрѣніе вѣроятно Пачіоли вынесъ изъ чтенія „Алгебры“ Магомета-бенъ-Музы, переводы которой существовали уже на Западѣ въ то время. Сочиненіе же Бега-Еддина вышло позже сочиненія Пачіоли. Воззрѣнія Пачіоли раздѣлялись многими математиками Запада.

дѣленія ихъ, построена Бега-Еддиномъ особенная таблица, которая устроена на подобіе таблицы умноженія *). Составъ этой таблицы слѣдующій.

Множитель

Дѣлимое						Множимое
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2	
x^2	1	x	x^2	x^3	x^4	x^2
x	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2	x^3	x
1	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2	1
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{x^2}$
	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	

Дѣлитель

Далѣе авторъ опредѣляетъ, что называютъ положительной и отрицательной величинами; по его словамъ: „при вычитаніи, то изъ чего вычи-

*) Марръ полагаетъ (см. *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, pag. 68—70), на основаніи существованія въ сочиненіи Бега-Еддина правилъ для образованія высшихъ степеней изъ низшихъ, что автору „Эссенціи искусства счисленія", весьма вѣроятно, были извѣстны правила для составленія коэффиціентовъ членовъ бинома для показателя цѣлаго и положительнаго. Предположеніе Марра находитъ подтвержденіе въ томъ, что въ двухъ извѣстныхъ въ настоящее время арабскихъ сочиненіяхъ, правило для составленія этихъ коэффиціентовъ дано. Первое изъ этихъ сочиненій написано *Джемшидъ-бенъ-Мусудомъ*, современникомъ Улу-Бека, и озаглавлено „Ключъ счисленія" (*Meftâh al hissâb*); второе сочиненіе „Правила счисленія" (*Ayoun al hissâb*), написано *Магометомъ Бакиромъ* около 1600 г. Въ послѣднемъ сочиненіи дано правило для составленія коэффиціентовъ двѣнадцатой степени числа, разбитаго на двѣ части. Мы уже выше видѣли (см. стр. 366), что образованіе различныхъ коэффиціентовъ членовъ бинома было извѣстно уже китайскимъ математикамъ въ XVI вѣкѣ. На это обратилъ вниманіе еще Біо въ замѣткѣ, помѣщенной въ „Journal des Savants" за 1835 г. pag. 270. Разложеніе по степенямъ бинома было безъ сомнѣнія также извѣстно индусскимъ математикамъ, которые много занимались вопросомъ о нахожденіи числа различныхъ соединеній (см. стр. 420). Подтвержденіе тому, что биномъ Ньютона былъ извѣстенъ индусамъ можно найти въ интересной статьѣ Буррова, содержащей отрывокъ изъ санскритскаго сочиненія „Лилавати", написаннаго Баскарой. Статья озаглавлена: *Reuben Burrow*, Preuve d'où il résulte que les Hindous ont connu le Théorème binomial; напечатано въ Recherches Asiatiques ou Mémoires de la Société établie au Bengale. Trad. de l'Anglois. T. II, 1815, Paris. In-4, pag. 68—79 (Appendice). Вопросъ, которымъ занимается индусскій математикъ заключается въ слѣдующемъ: „дворецъ раджи имѣетъ восемь дверей. двери эти могутъ быть отворены или по одной, или по двѣ, или по три, или наконецъ всѣ

тываютъ называютъ *положительнымъ*, а то что вычитаютъ *отрицательнымъ*". Также формулировано извѣстное правило, что произведенiе двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ величинъ—положительно, а произведенiе положительной на отрицательную величину, или обратно,—отрицательно. Послѣ этого авторъ переходитъ къ рѣшенiю шести формъ. Формы эти Бега-Еддинъ, подобно другимъ арабскимъ математикамъ, дѣлитъ на два вида: три простыя и три сложныя. Объ алгебраическихъ дѣйствiяхъ Бега-Еддинъ говоритъ слѣдующее: „отысканiе неизвѣстныхъ величинъ при посредствѣ Алгебры требуетъ остроумiя, особеннаго ума, напряженiе памяти по отношенiю къ рѣшаемому вопросу и здравое сужденiе на обстоятельства, которыя способствуютъ облегченiю нахожденiя искомаго. Положи искомую величину равной корню—x и произведи надъ ней то, что сказано въ задачѣ; слѣдуя такому пути придешь къ уравненiю. Сторона, содержащая отрицанiе (отрицательную величину), дополняется и равное ему прибавляется къ другой; дѣйствiе это называютъ *Al-gébr*. Равныя и однородныя величины выбрасываются изъ обѣихъ частей; дѣйствiе это называютъ *Al-mokabalah* *). Послѣ этого уравненiе заключаетъ равенство между однимъ членомъ и другимъ; или же равенство между однимъ членомъ и двумя другими. Первый случай заключаетъ три формы—*простыя*; второй случай заключаетъ также три формы—*сложныя*".

Примѣненiе дѣйствiй *алгебръ* и *алмокабала* при рѣшенiи различныхъ вопросовъ, всего лучше уяснить себѣ на частномъ примѣрѣ. Возьмемъ рѣшенiе *третьей* изъ простыхъ формъ, данное Бега-Еддиномъ. Рѣшенiе дано въ примѣненiи къ слѣдующему вопросу: „Заиду обѣщала большая изъ двухъ суммъ денегъ, коихъ сумма 20, а произведенiе 96". Правило для рѣшенiя подобныхъ вопросовъ выражено Бега-Еддиномъ въ слѣдующей формѣ: „Число равно квадратамъ (x^2). Раздѣли число на коэфицiентъ при квадратѣ; корень квадратный изъ частнаго есть искомое число". Рѣшенiе вышеприведеннаго вопроса заключается въ слѣдующемъ: „Положи одно число равнымъ $10+x$, другое $10-x$, произведенiе ихъ есть $100-x^2$ и это

вмѣстѣ заразъ. Требуется найти число разъ, когда это можно сдѣлать". Число всѣхъ возможныхъ случаевъ авторъ находитъ равнымъ 255.

Замѣтимъ здѣсь, что теорема, извѣстная подъ именемъ *бинома Ньютона*, была извѣстна на Западѣ ранѣе Ньютона. Слѣды ея находятся въ сочиненiяхъ различныхъ математиковъ, изъ числа которыхъ укажемъ: Пачiоли, Стифеля, Брига, Виета и Паскаля.

*) Объясненiе терминовъ *алгебра* и *алмокабала* мы привели уже выше на стр. 255. Тамъ же приведено стихотворенiе, изъ персидскаго сочиненiя Неджима-Еддина-Али-Хана, въ которомъ объяснено значенiе этихъ терминовъ. Стихотворенiе это заимствовано изъ сочиненiя: *Nesselmann*, Die Algebra der Griechen. 1842, Berlin, in-8. pag. 49—51.

равно 96. Послѣ примѣненія дѣйствій *алгебръ* и *алмокабала* получимъ $x^2=4$, и $x=2$; слѣдовательно одна изъ суммъ есть 8, а другая 12, послѣдняя именно и есть обѣщанная Заиду". Разсужденія Бега-Еддина приводятся, очевидно, къ уравненію вида:

$$100-x^2=96$$

Дѣйствіе *гебръ* даетъ:

$$100=96-x^2$$

а дѣйствіе *мокабалы*:

$$96+4=96-x^2$$

откуда:

$$4=x^2$$

и

$$2=x$$

Послѣ этого авторъ переходитъ къ рѣшенію каждой изъ шести формъ, которыя онъ поясняетъ на частныхъ примѣрахъ. Примѣры эти весьма просты, но онѣ существенно отличаются отъ примѣровъ, приведенныхъ въ „Алгебрѣ" Магомета-бенъ-Музы. Также нѣтъ никакихъ геометрическихъ объясненій и толкованій. Изъ содержанія этого отдѣла можно видѣть, что познанія Бега-Еддина въ Алгебрѣ были довольно ограничены и неполны *). Объ рѣшеніи уравненій третьей степени онъ даже и неупоминаетъ, изъ чего можно заключить, что онѣ были ему совершенно неизвѣстны.

Глава IX. озаглавлена: „замѣчательныя правила и остроумныя начала" **). Въ этой главѣ авторъ даетъ двѣнадцать правилъ, относящіяся къ суммированію нѣкоторыхъ рядовъ и производству другихъ дѣйствій надъ числами. Изъ числа такихъ правилъ укажемъ на выраженія суммы квадратовъ и кубовъ ряда натуральныхъ чиселъ, суммы ряда четныхъ и нечетныхъ чиселъ; первое изъ правилъ, данныхъ Бега-Еддиномъ, которое онъ приписываетъ себѣ, заключается въ выраженіи:

$$(1+2+3+4+\ldots+n)n=\frac{(n+1)n^2}{2}$$

Кромѣ того Бега-Еддинъ даетъ правила, которыми слѣдуетъ руководиться при извлеченіи квадратныхъ корней. Правила эти заключаются въ выраженіяхъ:

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

*) *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, cet. pag. 37—38.

**) *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, cet. pag. 41—43.

Въ одномъ изъ правилъ этой главы дано правило для отысканія совершенныхъ чиселъ. Всѣ правила авторъ поясняетъ на частныхъ примѣрахъ.

Глава X заключаетъ собраніе задачъ *). По словамъ автора: „задачи эти обостряютъ умъ учащагося и укрѣпляютъ его въ отыскиваніи неизвѣстныхъ“. Въ главѣ этой рѣшено девять задачъ; каждая изъ нихъ рѣшена нѣсколькими пріемами, какъ то: посредствамъ Алгебры, при помощи метода ложнаго положенія, пріема обратныхъ дѣйствій и посредствомъ пропорцій. Укажемъ на нѣкоторыя изъ задачъ, рѣшенныхъ Бега-Еддиномъ, и приведемъ всѣ рѣшенія, примѣненныя имъ.

1. „Раздѣлить число 10 на двѣ части, которыхъ разность есть 5?“

„Посредствомъ Алгебры. Положи меньшую часть равной x, то большая будетъ $x+5$, а сумма ихъ будетъ $2x+5=10$; примѣняя дѣйствіе *мокабала*, получимъ $x=2\frac{1}{2}$“.

„Посредствомъ ложнаго положенія. Положимъ меньшую часть равной 3, то первое отступленіе 1 будетъ слишкомъ малымъ; затѣмъ положимъ 4, то второе отступленіе 3 будетъ слишкомъ мало. Разность результатовъ есть 5, а отступленій 2“.

„Посредствомъ обратныхъ дѣйствій. Такъ какъ разность между обѣими частями числа вдвое болѣе разности между половиной числа и каждой частью, то если къ половинѣ этой разности придадимъ половину числа, получимъ $7\frac{1}{2}$; вычитая изъ послѣдняго первое получимъ $2\frac{1}{2}$“.

Послѣдній пріемъ, очевидно, есть ничто иное какъ рѣшеніе вопроса положеніемъ $x+y=a$, откуда $x=a-y$ и $x-y=a-2y=2(\frac{1}{2}a-y)$. На послѣднемъ равенствѣ авторъ основываетъ свои разсужденія. Полагая $x-y=m$, то $\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}a-y$, откуда $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}m$ и $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}m$.

2. „Одна третья часть длины рыбы торчитъ въ болотѣ, одна четверть погружена въ водѣ, а три пяди находятся надъ поверхностью воды. Опредѣлить длину рыбы?“

„Посредствомъ пропорцій. Вычти оба знаменателя изъ общаго знаменателя, получишь 5; отношеніе 12 къ 5 равно отношенію неизвѣстной x къ 3; частное отъ дѣленія произведенія внѣшнихъ членовъ на средній равно $7\frac{1}{5}$, это число и будетъ искомое“.

Разсужденіе Бега-Еддина, въ общемъ видѣ, приводиться къ слѣдующему: Пусть AD длина всей рыбы (фиг. 75) и пусть $AB=\frac{1}{3}AD$,

Фиг. 75.

B C
A D

*) *Ar. Marre,* Kholâçah al Hissâb, ect. pag. 48—49.

$BC = \frac{1}{n} AD$ и $CD = a$, то $AC = \frac{m+n}{mn} AD$, а слѣдовательно:

$$CD = a = \frac{mn-(m+n)}{mn},$$

а потому $mn : mn - (m+n) = AD : a$.

„Посредствомъ Алгебры понятно, такъ какъ уменьшивъ x на $\frac{1}{3}x$ и $\frac{1}{4}x$, т. е. на $(\frac{1}{4}+\frac{1}{3})x$ равнымъ 3; затѣмъ раздѣливъ 3 на дробь, получимъ предъидущій результатъ“.

„Посредствомъ ложнаго положенія совсѣмъ ясно, такъ какъ полагая 12, а затѣмъ 24, то разность результатовъ будетъ 36, а разности отступленій 5“.

„Посредствомъ обратныхъ дѣйствій. Приложи къ 3 равное ему и еще $\frac{2}{5}$ того же числа, ибо $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ числа равны тому что остается въ избыткѣ, и вычти еще $\frac{2}{5}$. Т. е. имѣемъ $\frac{7}{12} = \frac{5}{12} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12}$“.

Задача эта приводится, очевидно, къ рѣшенію уравненія:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 3$$

которое Бега-Еддинъ замѣняетъ другимъ, именно:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = 3$$

откуда:

$$x = 3 : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 3 : \frac{5}{12} = 7\frac{1}{5}$$

3. „Нѣкто спросилъ, сколько прошло времени ночи? Ему отвѣтили: одна треть протекшаго времени равна одной четверти остающагося. Спрашивается сколько протекло ночи и сколько еще остается?“

„Посредствомъ Алгебры. Положимъ протекшее время равнымъ x, то остающееся будетъ, очевидно, $12-x$; по условію $\frac{1}{3}$ протекшаго времени равна $3-\frac{1}{4}x$. Послѣ приложенія дѣйствія *джабръ* имѣемъ, что $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ протекшаго времени равна 3. Частное будетъ $5\frac{1}{7}$, это и будетъ число протекшихъ часовъ, а потому остатокъ выразитъ собою $6\frac{6}{7}$ часовъ, т. е. число остающихся еще часовъ“.

Эту же задачу Бега-Еддинъ рѣшаетъ посредствомъ пропорціи.

4. „Шестъ торчитъ въ прудѣ и выходитъ надъ поверхностью воды на 5 локтей. Онъ наклоняется, при чемъ нижній конецъ остается непод-

вижнымъ, до тѣхъ поръ, пока верхній конецъ не коснется воды. Пусть разстояніе между точкой гдѣ шестъ выходилъ изъ воды, будучи въ вертикальномъ положеніи, и точкой въ которой его верхній конецъ касается воды, будетъ равнымъ 10 локтямъ. Требуется опредѣлить длину шеста.“

„Посредствомъ Алгебры. Положимъ часть шеста, погруженную въ воду, равной x, то длина всего шеста будетъ $5+x$; очевидно, что послѣ наклоненія длина шеста будетъ гипотенузой прямоугольнаго треугольника, коего одинъ катетъ 10 локтей, а другой x. Поэтому длина шеста есть $(x+5)^2 = 10^2 + x^2$ или $x^2 + 25 + 10x = 100 + x^2$. Дѣлая приведеніе получимъ $75 = 10x$ или $x = 7\frac{1}{2}$, это и будетъ часть шеста, находящаяся въ водѣ. Длина всего шеста будетъ, очевидно, $12\frac{1}{2}$ локтей“ *).

Рѣшеніе послѣдней задачи, какъ мы видимъ, основано на приложеніи пиѳагоровой теоремы, которую Бега-Еддинъ называетъ „фигурой невѣсты“ **). Въ концѣ десятой главы авторъ замѣчаетъ, что существуютъ и другіе методы для рѣшенія различныхъ подобныхъ вопросовъ, какъ разсмотрѣнные. Методы эти и ихъ доказательства помѣщены имъ въ его большой книгѣ.

Заключеніе. Въ концѣ своего сочиненія Бега-Еддинъ помѣстилъ заключеніе, въ которомъ говоритъ, что есть нѣсколько вопросовъ, надъ рѣшеніемъ которыхъ трудились безъ успѣха многіе математики. Желая предостеречь ученыхъ, которымъ при ихъ занятіяхъ могли-бы встрѣтиться подобные вопросы, отъ излишнихъ попытокъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ обратить на нихъ вниманіе одаренныхъ блестящими способностями, Бега-Еддинъ приводитъ семь изъ этихъ вопросовъ ***). Они слѣдующіе:

1. „Раздѣлить число 10 на такія двѣ части, что если къ каждой придать корень квадратный изъ нея, и обѣ суммы умножить, получилось-бы данное число“.

Вопросъ, въ той формѣ, какъ онъ изложенъ Бега-Еддиномъ, неполонъ. Одинъ изъ комментаторовъ замѣтилъ: „что если подъ терминомъ *данное число* разумѣть какое нибудь число, то вопросъ не представляетъ затрудненій, если же число дано опредѣленное, то вопросъ до настоящаго

*) Задача эта есть ничто иное какъ вопросъ „о бамбуковой трости“, съ которымъ мы встрѣчались уже выше, говоря о математикѣ китайцевъ и индусовъ (см. стр. 357, 415—416).

**) Происхожденіе названія „фигура невѣсты“ неизвѣстно. Подъ терминомъ *невѣста* у арабовъ была извѣстна осадная машина; но устройство ея и употребленіе также совершенно неизвѣстны. Машины эти, по словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей, были весьма сильны; сила одной изъ такихъ машинъ равнялась силѣ пятисотъ человѣкъ. Вѣроятно машина эта представляла родъ тарана.

***) *Ar. Marre*, Kholâçat al Hissâb, etc. pag. 60—61.

времени не рѣшенъ; если же подъ даннымъ числомъ разумѣть 10, то вопросъ нелѣпъ и невозможенъ, а не труденъ". Изъ условія вопроса, выраженнаго Бега-Еддиномъ не видно чему именно приравнивается выраженіе:

$$(x+\sqrt{x})[(10-x)+\sqrt{10-x}]$$

Очевидно, что это произведеніе всегда будетъ больше 10 *).

2. „Если прибавить къ квадрату 10, то сумма должна быть полный квадратъ, а если отъ того же квадрата вычесть 10, то разность также должна быть полный квадратъ".

Вопросъ этотъ есть ничто иное, какъ рѣшеніе совмѣстной системы уравненій:

$$x^2+10=y^2$$

$$x^2-10=z^2$$

Условія эти невыполнимы.

3. „Заиду обѣщано 10 безъ квадратнаго корня части Амру, а Амру обѣщано 5 безъ квадратнаго корня части Заида". Вопросъ этотъ можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ образомъ: пусть x^2 часть принадлежащая Заиду, а y^2 часть—Амру, то $10-y$ получаетъ Заидъ, а $5-x$ получаетъ Амру; такимъ образомъ имѣемъ два уравненія:

$$x^2+y=10 \qquad \text{и} \qquad y^2+x=5$$

Подставляя во второе уравненіе вмѣсто y его значеніе изъ перваго, получимъ:

$$x^4-20x^2+x+95=0$$

Итакъ мы видимъ, что вопросъ возможенъ, только онъ зависитъ отъ уравненія четвертой степени и не даетъ раціональнаго результата.

4. „Раздѣлить кубическое число на два другихъ кубическихъ числа".

Вопросъ этотъ невозможенъ. О чемъ мы уже говорили выше (см. стр. 527). Доказательство невозможности этого вопроса основано на извѣстномъ предложеніи Ферма, доказанныхъ впослѣдствіи Эйлеромъ **). Есть

*) Вопросъ упоминаемый Бега-Еддиномъ приводится къ системѣ уравненій:

$$x+y=10$$

$$(x+\sqrt{x})(y+\sqrt{y})=n$$

полагая $n=21$ вопросъ возможенъ и даетъ рѣшенія $x=1$ и $y=9$.

**) См. примѣчаніе на стр. 580.

также указанія, что вопросомъ этимъ занимался арабскій геометръ Алходшанди.

5. „Раздѣлить десять на такія двѣ части, чтобы сумма частныхъ отъ дѣленія одной на другую, равнялась-бы одной изъ частей“ *).

Вопросъ этотъ приводиться къ слѣдующему: пусть, напримѣръ, $5+x$ и $5-x$ будутъ обѣ части, тогда по условію задачи будемъ имѣть:

$$\frac{5+x}{5-x}+\frac{5-x}{5+x}=5+x$$

или:

$$\frac{5+x}{5-x}+\frac{5-x}{5+x}=5-x$$

уравненія эти приводятся къ кубическимъ уравненіямъ:

$$x^3+3x^2-25x-175 \quad 0$$

$$x^3-3x^2-25x+175=0$$

Рѣшенія этихъ уравненій не содержатъ раціональныхъ корней, а потому онѣ неудовлетворяютъ условію выраженному въ вопросѣ Бега-Еддина.

6. „Найти три квадрата, находящіеся въ непрерывной пропорціи, коихъ сумма есть также квадратъ“?

Вопросъ невозможенъ, такъ какъ онъ сводиться къ уравненію:

$$x^2+x^2y^2+x^2y^4=z^2$$

или:

$$1+y^2+y^4=t^2$$

Послѣднее уравненіе, какъ извѣстно въ раціональной формѣ не можетъ быть рѣшено.

7. „Найти число такихъ свойствъ, что если къ его квадрату придать его корень и еще два, а затѣмъ къ его квадрату придать тотъ-же корень и вычесть два, то въ обоихъ случаяхъ получилось-бы число, изъ котораго можно извлечь корень“.

---

*) Вопросъ этотъ приводится къ системѣ уравненій:

$$x+y=10$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=y$$

которая сводится къ рѣшенію уравненія третьей степени:

$$x^3-(10-x)^2(x-1)=0$$

Вопросъ этотъ сводиться къ рѣшенію системы уравненій:

$$x^2+x+2=y^2$$

$$x^2+x-2=z^2$$

Рѣшивъ эти уравненія, мы увидимъ, что онѣ удовлетворяются частнымъ значеніемъ: $x={}^{34}/_{15}$, $y={}^{46}/_{15}$ и $z={}^{14}/_{15}$; итакъ мы видимъ что рѣшеніе получается положительное и въ раціональной формѣ.

Приведенные семь вопросовъ съ исторической точки зрѣнія весьма интересны. Они встрѣчаются въ сочиненіяхъ различныхъ математиковъ. Вопросы эти были всесторонне разсмотрѣны и изслѣдованы италіанскимъ математикомъ Гонокки *).

На этихъ вопросахъ заканчивается собственно сочиненіе Вега-Еддина. Далѣе слѣдуетъ весьма картинное обращеніе къ читателямъ, въ которомъ авторъ распространяется о красотахъ искусства счисленія, сравниваетъ свое сочиненіе съ жемчужиной, принадлежащей приданному невѣсты—счисленія. Авторъ замѣчаетъ, что хотя его книга маленькая, но она заключаетъ только то, что не находиться ни въ одномъ сочиненіи и ни въ одномъ руководствѣ. Вега-Еддинъ проситъ читателя, чтобы онъ его сочиненіе давалъ только принадлежащимъ къ его семейству и желающимъ сочетаться съ искусствомъ счисленія. Давать же его книгу постороннему—грубому жениху—Вега-Еддинъ сравниваетъ съ украшеніемъ шеи собаки жемчугомъ. Большую часть вопросовъ, содержащихся въ сочиненіи, Вега-Еддинъ считаетъ достойными быть сохраненными для потомства. О современномъ ему состояніи наукъ Вега-Еддинъ выражается весьма характерно, сказавъ: „что большую часть вопросовъ сочиненія слѣдуетъ утаивать отъ людей настоящаго времени".

Познакомившись съ содержаніемъ сочиненія Вега-Еддина можно видѣть, что многое онъ заимствовалъ изъ сочиненій индусовъ, на это указываютъ нѣкоторые пріемы, примѣняемые авторомъ, какъ напр.: тройное правило, одинъ изъ способовъ умноженія, пріемы ложнаго положенія и обратныхъ дѣйствій, методъ счисленія, повѣрка при посредствѣ числа 9 и др. Всѣ указанные пріемы мы уже встрѣчали выше въ сочиненіяхъ индусскихъ математиковъ Баскары и Брамагупты. Съ другой стороны нѣкоторыя воззрѣнія на числа, какъ напр. опредѣленіе единицы, заставляютъ предполагать, что Вега-Еддину была извѣстна „Ариометика" Никомаха. Понятія о

*) *An. Genocchi,* Note analitiche sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassare Boncompagni, Roma, 1855, in-8. pag. 85—92.

совершенныхъ числахъ и нахожденіе суммы квадратовъ и кубовъ ряда натуральныхъ чиселъ также принадлежитъ вѣроятно грекамъ. Также нѣкоторые изъ вопросовъ седьмой главы, въ особенности задача объ опредѣленіи ширины рѣки, напоминаютъ вопросы, которыми занимался Геронъ Старшій. Практическое рѣшеніе этихъ вопросовъ при посредствѣ діоптръ вполнѣ напоминаетъ пріемъ Герона. Итакъ мы можемъ сказать, что на сочиненіе Бега-Еддина, оказали вліяніе съ одной стороны индусскія сочиненія, а съ другой—греческія. Изъ арабскихъ математическихъ сочиненій Бега-Еддинъ заимствовалъ одинъ изъ способовъ умноженія, нѣкоторыя изъ правилъ шестой главы, относящейся къ измѣренію фигуръ, а также нѣкоторыя изъ задачъ, принадлежащія къ невозможнымъ. Къ числу послѣднихъ принадлежитъ невозможность существованія уравненія $x^3 + y^3 = z^3$ и нахожденіе квадратнаго числа, которое будучи увеличено и уменьшено на одно и то же число, дало-бы снова числа квадратныя.

Заключеніе. Познакомившись съ содержаніемъ главнѣйшихъ дошедшихъ до насъ сочиненій, написанныхъ арабскими математиками, мы видимъ сколько онѣ заключаютъ интереснаго и на какой высокой степени развитія находились математическія науки у арабовъ. Успѣшному развитію математическихъ наукъ у арабовъ, въ особенности много способствовало то, что они были основательно знакомы съ сочиненіями древнихъ греческихъ философовъ: Евклида, Аристотеля, Архимеда, Аполлонія, Никомаха, Діофанта и многихъ другихъ *). Изученіе сочиненій этихъ авторовъ считалось основаніемъ математическаго образованія, многочисленные ученые писали на нихъ комментаріи, обращая особенное вниманіе на первоначальныя основы этихъ наукъ. Одновременно съ изученіемъ древне-греческихъ математическихъ сочиненій арабскіе ученые знакомились также съ методами индусскихъ браминовъ. Вліяніе послѣднихъ въ особенности отразилось на нѣкоторыхъ геометрическихъ построеніяхъ, данныхъ Абулъ-Вафой. Не только геометрическія построенія, но и различные другіе пріемы и методы встрѣчающіеся въ сочиненіяхъ арабовъ, напоминаютъ индусовъ. Излагая содержаніе различныхъ математическихъ сочиненій, написанныхъ арабами, мы указывали, что именно было ими заимствовано у грековъ и индусовъ. Изъ самостоятельныхъ изслѣдованій арабовъ въ математическихъ наукахъ особенное вниманіе обратили на себя, въ послѣднее время, замѣчательныя построенія корней уравненій третьей степени, данныя Алкгиями, а также различныя

*) Объ Евклидѣ у арабовъ появилась недавно интересная статья *Klamroth*'а, помѣщенная въ Zeitschrift der Deut. Morgenländischen Gesellschaft. 1882, Heft, 2—3.

изслѣдованія въ области Теоріи Чиселъ. Построеніе корней уравненій третьей степени вполнѣ принадлежитъ арабскимъ математикамъ, такъ какъ ничего подобнаго мы не встрѣчаемъ у другихъ народовъ древняго міра. Также были найдены арабскими геометрами нѣкоторыя построенія корней уравненій четвертой степени. На одинъ изъ отрывковъ, сочиненія, въ которомъ разбирается послѣдній вопросъ мы обратили вниманіе. Особенный интересъ представляетъ отрывокъ, принадлежащій неизвѣстному автору, въ которомъ говорится о построеніи треугольниковъ въ раціональныхъ числахъ; отрывокъ этотъ представляетъ прекрасный примѣръ изслѣдованій арабскихъ математиковъ въ области теоріи чиселъ. Нѣкоторые вопросы, разсмотрѣнные Авиценной, показываютъ, что онъ рѣшалъ вопросы, приводимые нынѣ къ сравненіямъ.

Достигнувъ высокаго политическаго развитія, покоривъ многія государства и распространивъ свое господство въ трехъ странахъ свѣта древняго міра, арабы вездѣ приносили съ собою зачатки цивилизаціи. Многочисленныя библіотеки, академіи и обсерваторіи, основанныя арабами, а также замѣчательныя произведенія архитектурнаго искусства, могутъ служить лучшимъ подтвержденіемъ сказаннаго.

Изученіе математическихъ сочиненій, написанныхъ арабами, весьма важно, такъ какъ онѣ имѣли вліяніе на дальнѣйшее развитіе наукъ на Западѣ. Послѣ введенія христіанства, паденія Западной Римской имперіи, нашествія варваровъ и крестовыхъ походовъ, не только математическія науки, но и всѣ науки и искусства вообще, пришли въ совершенный упадокъ, большая часть сочиненій замѣчательныхъ философовъ древняго міра были затеряны и уничтожены. Въ этотъ длинный промежутокъ времени всеобщаго невѣжества появляются арабы, который съ замѣчательною любовью и умѣніемъ собираютъ все то, что имъ удается отыскать. Они создаютъ новую школу сначала въ Багдадѣ, откуда постепенно, шагъ за шагомъ, распространяется господство арабовъ. Багдадъ дѣлается центромъ всемірной умственной культуры, онъ пріобрѣтаетъ такое же значеніе, какое имѣла Александрія для древняго міра*). Въ сравнительно очень короткій промежутокъ времени создаются одна за другой школы математиковъ и академіи ученыхъ въ Испаніи, Раккѣ, Гератѣ, Самаркандѣ; арабскіе астрономы проникаютъ въ Китай и въ Индію, оставляя вездѣ слѣды своего влія-

*) Мы уже выше упоминали, что арабскимъ ученымъ мы обязаны мыслью объ библіографическихъ словаряхъ. Также ими было составлено нѣсколько географическихъ словарей. По этому вопросу можно найти интересныя указанія въ статьѣ: *Reinaud*, Notices sur les dictionnaires géographiques arabes et sur le système primitif de la numération chez les peuples de race Berbère. Paris. 1861. in-8.

нія. Распространяя свое могущество на Западъ арабы основываютъ школы въ Каиро, Фецѣ, Марокко и Испаніи. Въ послѣдней, благодаря просвѣщеннымъ калифамъ, создается блестящая школа ученыхъ, между которыми есть выдающіеся математики, какъ напримѣръ: Ибнъ-Албанна, Алкалзади, Ибнъ-Халдунъ и др. Испанскій калифатъ пріобрѣтаетъ міровое значеніе, въ Толедо, Кордовѣ, Севильѣ, Гранадѣ и другихъ городахъ создаются академіи ученыхъ и школы, прототипы нашихъ университетовъ. При школахъ устраиваются библіотеки и обсерваторіи. Многія сочиненія, написанныя на отдаленномъ Востокѣ, дѣлаются прежде извѣстны Западу и изучаются въ многочисленныхъ спискахъ.

Усиѣшное развитіе наукъ въ Испаніи оказываетъ вліяніе на весь Западъ, такъ какъ слава о школахъ, основанныхъ маврами, распространяется по всей Европѣ. Въ Испанію стекаются изъ различныхъ государствъ Европы лица, желающія познакомиться съ науками арабовъ. Ученые эти знакомятся съ сочиненіями древнихъ греческихъ философовъ въ арабскихъ переводахъ. При этомъ они принуждены выучиться арабскому языку, или же прибѣгаютъ къ помощи переводчиковъ, которые обыкновенно евреи. Изъ ученыхъ, предпринимавшихъ путешествія въ Испанію, наиболѣе извѣстны: Платонъ Тивольскій, Герардъ Кремонскій, Кампанусъ Поварскій, Аделардъ Батскій и многіе другіе. Благодаря Кампанусу Поварскому и Аделарду Батскому на Западѣ становятся извѣстны „Начала" Евклида и „Альмагестъ" Птоломея. Платонъ Тивольскій и Герардъ Кремонскій даютъ латинскіе переводы сочиненій: Менелая, Теодосія, Аристотеля, Гипсикла, Архимеда и другихъ. Другіе ученые, какъ напримѣръ: Леонардъ Пизанскій, предпринимаютъ путешествія на Востокъ и также знакомятся съ сочиненіями арабовъ. Благодаря арабамъ европейцы знакомятся съ Алгеброй, переводчики знакомятъ европейцевъ съ „Алгеброй" Магомета-бенъ-Музы, латинскіе списки которой весьма распространены на Западѣ въ Средніе Вѣка. Появленіе сочиненія „Liber Abaci" Леонарда Пизанскаго, въ самомъ началѣ XIII вѣка, оказываетъ громадное вліяніе на все дальнѣйшее развитіе математическихъ наукъ на Западѣ и даетъ имъ новое направленіе. Содержаніе своего сочиненія Фибоначчи заимствовалъ, безъ сомнѣнія, изъ арабскихъ источниковъ во время своихъ далекихъ странствованій. Весьма интересно то, что въ сочиненіи Фибоначчи мы встрѣчаемъ нѣкоторые вопросы, заимствованные въ свою очередь арабами у другихъ народовъ. Одинъ изъ такихъ вопросовъ почти тождественъ съ вопросомъ, находящимся въ папирусѣ Ринда, написанномъ за много столѣтій до Р. Х. *).

*) Французскій ученый Родэ одинъ изъ вопросовъ, находящихся въ папирусѣ Ринда, отыскалъ въ извѣстномъ „Liber Abaci" Леонарда Пизанскаго. Фактъ этотъ весьма интере-

Изъ самостоятельныхъ сочиненій арабовъ по математическимъ наукамъ на Западѣ были наиболѣе извѣстны нѣкоторыя изъ сочиненій Табита-бенъ-Корра, „Геометрія“ трехъ братьевъ и сочиненія Албатани. Отъ арабовъ

сенъ въ томъ отношеніи, что указываетъ, какъ извѣстный вопросъ могъ сохраниться въ теченіи цѣлыхъ тысячелѣтій. Простое совпаденіе трудно было-бы допустить. Вопросъ, находящійся въ папирусѣ Ринда приведенъ нами выше (см. стр. 344—345), когда мы говорили о математическихъ познаніяхъ древнихъ египтянъ. Эйзенлоръ далъ неправильное толкованіе этому вопросу, сдѣлавъ невѣрное предположеніе, что названія: *изображеніе, кошка, мышь, ячмень* и *мѣра* выражаютъ собою названія пяти первыхъ степеней числа 7. При такомъ предположеніи онъ думалъ, что вопросъ относится къ геометрической прогрессіи—*лѣстницѣ*. Роде это мѣсто папируса Ринда объяснилъ иначе; съ объясненіемъ этимъ согласились Эйзенлоръ, а также Канторъ. Вопросъ объясненный Роде состоитъ въ слѣдующемъ: „семь писцовъ имѣютъ каждый по семи кошекъ; каждая кошка истребляетъ семь мышей; каждая изъ мышей истребила-бы семь колосьевъ, а каждый колосъ далъ-бы семь мѣръ пшеницы“. (См. *L. Rodet*, Les prétendus problèmes d'algèbre, ou Manuel du calculateur égyptien. Помѣщено въ Journal Asiatique, Septième Série, T. XVIII, № 2—Août—Septembre и № 3,—Octobre—Novembre—Décembre 1881, pag. 184—232, 390—459. О разсматриваемомъ вопросѣ говорится на стр. 450—454). Нѣкоторыя возраженія на статью Роде сдѣлалъ Эйзенлоръ, несогласный съ первымъ, утверждающимъ, что принятый Эйзенлоромъ методъ *hau* на рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ есть ни что иное, какъ методъ ложнаго положенія. (См. Note de M. Eisenlohr au sujet d'un article de M. Rodet. Помѣщено въ Journal Asiatique, Septième Série, T. XIX, № 3.—Avril—Mai—Juin 1882, pag. 515—518).

Въ сочиненіи Фибоначчи вопросъ предложенъ въ такой формѣ: „Septem vetule vadunt Romam; quarum qualibet habet burdones 7; et in quolibet burdone sunt saculi 7; et in quolibet saculo panes 7; et quilibet panis habet cultellos 7; et quilibet cultellus habet vaginas 7. Queritur summa omnium predictorum“. (См. Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Bald. Boncompagni. Vol. I, Roma 1854, in-4.—Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, pag. 311—312). Сравнивъ примѣры автора папируса Ринда и Фибоначчи легко видѣть, что они почти тождественны, только второй вмѣсто мышей, кошекъ и зеренъ вводитъ въ условіе задачи старыхъ женщинъ, ножи, мѣшки и хлѣбы. Въ рукописи „Liber Abbaci“ на поляхъ сдѣлана схема, въ которой выписаны числа, находящіяся въ предложенной задачѣ. Числа эти составляютъ геометрическую прогрессію. Итальянскій математикъ беретъ одной степенью выше египетскаго, именно до шестой степени числа семь. Схема эта слѣдующая:

137256
7
49
343
2401
16807
117649

Мы считали необходимымъ сдѣлать настоящее отступленіе, такъ какъ неправильное толкованіе Эйзенлора приведено нами на стр. 344—345. Объясненіе Роде появилось, когда глава объ развитіи математическихъ наукъ у Египтянъ была напечатана.

также вѣроятно перешли на Западъ нынѣ употребительныя цифры, извѣстныя подъ названіемъ *арабскихъ*, и десятичная система счисленія, хотя есть основанія предполагать, что систему эту они заимствовали у индусовъ *).

Знакомство съ сочиненіями древнихъ греческихъ философовъ, въ переводахъ на арабскій языкъ, снова обратило вниманіе Запада на цѣнное наслѣдство, оставленное знаменитыми представителями эллинской расы. Не будь арабовъ, весьма вѣроятно, что сочиненія многихъ греческихъ ученыхъ, пропали-бы безслѣдно. Только благодаря арабскимъ переводамъ до насъ дошли нѣкоторыя изъ книгъ „Коническихъ Сѣченій" Аполлонія и „Леммы" Архимеда.

Въ виду всего вышесказаннаго, мы считали не лишнимъ остановиться болѣе подробно надъ разсмотрѣніемъ различныхъ математическихъ сочине-

---

*) Къ числу ученыхъ, раздѣлявшихъ мнѣніе объ арабскомъ происхожденіи нынѣшнихъ цифръ, принадлежалъ также извѣстный Седильо. Даже названія девяти первыхъ знаковъ, встрѣчающіеся въ Шартрской рукописи XI вѣка (см. стр. 199) и въ другой рукописи, содержащей сочиненіе „Объ абакусѣ", принадлежащей Британскому Музею, Седильо производитъ отъ арабскихъ словъ. Мнѣніе его по этому вопросу высказано имъ въ статьѣ: *L. Am. Sédillot*, Sur l'origine de nos chiffres; lettre a M. le prince Balt. Boncompagni. Roma, 1865, in-4.

Совершенно иное мнѣніе было высказано Венсеномъ относительно происхожденія девяти знаковъ Шартрской рукописи. Происхожденіе этихъ знаковъ и ихъ названій онъ ищетъ въ еврейскихъ и греческихъ словахъ. Онъ полагаетъ, что названія цифръ, происходящихъ отъ греческихъ словъ, имѣютъ символическій характеръ. Въ формѣ и самыхъ названіяхъ цифръ Венсенъ видитъ вліяніе воззрѣній неопиѳагорейцевъ и кабалистовъ, и думаетъ, что цифры получили начало у какой нибудь еврейской философской секты, или у гностиковъ, или кабалистовъ. Мнѣніе свое онъ высказалъ въ статьѣ: *Vincent*, Note sur l'origine de nos chiffres et sur l'Abacus des Pythagoriciens. Помѣщено въ Journal de Mathématiques pures et appliqueés. T. IV, 1839, pag. 261—280.

Самое древнее изъ извѣстныхъ кабалистическихъ сочиненій есть „Sepher jetzira". Оно не древнѣе VIII-го вѣка.

Десятичную систему счисленія и форму цифръ приписываетъ индусамъ. Подобное воззрѣніе раздѣлялъ уже византійскій монахъ Максимъ Плануда (см. стр. 165, 444), жившій въ началѣ XIV вѣка. Фибоначчи и Ибнъ-Эзра также приписываютъ десятичную систему и форму цифръ индусамъ. Такое же мнѣніе раздѣляетъ Марръ въ своей статьѣ: *Ar. Marre*, Notice sur les systèmes de numération naturels quinaire, dénaire, vigénaire; напечатано въ Journal de Mathématiques pures et appliqués. T. XIII, 1848, pag. 233—240. Вопросъ объ индусскомъ происхожденіи нашей системы счисленія и цифръ много занималъ извѣстнаго Вепке, который написалъ по этому предмету два замѣчательныхъ мемуара (см. примѣч. стр. 471). Обращаемъ вниманіе читателей, желающихъ познакомиться съ вопросомъ о системѣ счисленія и происхожденіи цифръ, на мемуары: Гумбольдта, Мартена, Шаля, Рено, Герхардта, Фридлейна, Треутлейна и многихъ другихъ. Точныя заглавія этихъ сочиненій будутъ даны въ концѣ настоящаго труда.

нiй, написанныхъ арабами и извѣстныхъ въ настоящее время. Знакомство съ сочиненiями арабовъ чрезвычайно важно и могло-бы пролить много свѣта на историческое развитiе математическихъ наукъ на Западѣ. Только въ недавнее время на вопросъ этотъ было обращено должное вниманiе, благодаря неутомимымъ трудамъ Седильо, Штейншнейдера Вепке и Марра. На необходимость изученiя развитiя математическихъ наукъ у арабовъ и изученiе многочисленныхъ арабскихъ рукописей, разсѣянныхъ въ различныхъ библiотекахъ Европы, а въ особенности въ библiотекѣ Эскурiала, обратилъ уже вниманiе знаменитый авторъ „Исторiи математическихъ наукъ“ Монтукла. Онъ одинъ изъ первыхъ выразилъ сожалѣнiе, что между лицами знакомыми съ арабскимъ языкомъ весьма мало знающихъ математику и обратно *). Въ настоящее время намъ извѣстно содержанiе только немногихъ арабскихъ рукописей, такъ какъ ученыхъ, совмѣщающихъ знанiе математики и арабскаго языка, весьма мало. Дальнѣйшее изученiе многочисленныхъ сохранившихся арабскихъ рукописей весьма желательно, оно можетъ пролить много свѣта на науки арабовъ и сообщить множество весьма интересныхъ фактовъ. Къ сожалѣнiю многiе относятся недовѣрчиво къ мнѣнiю о высокомъ развитiи математическихъ наукъ у арабовъ. Прошло почти столѣтiе, съ тѣхъ поръ какъ Монтукла обратилъ вниманiе на рукопись, содержащую изслѣдованiя Омара Алхайями, и указалъ, что предметъ ея относиться къ рѣшенiю уравненiй третьей степени, но только весьма недавно рукопись эта была изслѣдована и издана Вепке.

Математическимъ наукамъ арабскiе ученые придавали особенное значенiе. Знакомство съ первоначальными основами этихъ наукъ они считали необходимымъ для всякаго образованнаго человѣка. Различныя сочиненiя постоянно комментировались учеными, которые вели между собою переписки и желая сдѣлать свои сочиненiя болѣе доступными, а правила изложенныя въ нихъ болѣе памятными для учащихся, перелагали ихъ въ стихотворную форму. Обычай этотъ перешелъ также на Западъ.

Начиная съ XIII вѣка математическiя науки у арабовъ начинаютъ терять свое значенiе, самостоятельное развитiе прекращается и ученые болѣе заняты составленiемъ руководствъ, въ которыхъ собраны правила для рѣшенiя различныхъ вопросовъ. Изъ числа такихъ руководствъ мы разсмотрѣли сочиненiя Ибнъ-Албанны, Алкалзади и Бега-Еддина. Первыя два сочиненiя были написаны западными арабами, а второе—восточнымъ. Сто-

*) Вполнѣ справедливо замѣтилъ Монтукла: „Il est fort à regretter que parmi ceux, qui savent l'arabe, personne n'ait le goût des mathématiques et que parmi ceux, qui possédent les mathématiques, personne n'ait le goût de la littérature arabe, (См. *Montucla*, Histoire des mathématiques. T. I. pag. 383, nouv. ed.).

пень познаній арабовъ во всѣхъ наукахъ вообще въ XIV вѣкѣ прекрасно изображена въ энциклопедическомъ трудѣ Ибнъ-Халдуна, о которомъ мы говорили въ своемъ мѣстѣ. Послѣднимъ выдающимся математикомъ на Востокѣ, былъ Улу-Бекъ, внукъ знаменитаго Тамерлана. Основанная имъ коллегія ученыхъ въ Самаркандѣ и астрономическая обсерваторія долгое время считались однимъ изъ чудесъ свѣта и обращали на себя всеобщее вниманіе. Со смертью Улу-Бека начинается окончательное распаденіе восточнаго калифата и прекращается развитіе математическихъ наукъ; Бега-Еддинъ заканчиваетъ собою рядъ арабскихъ математиковъ.

Съ появленіемъ на Западѣ сочиненія Фибоначчи и латинскихъ переводовъ „Алгебры" Магомета-бенъ-Музы многіе ученые начинаютъ заниматься Алгеброй. Цѣлый рядъ математиковъ, изъ которыхъ наиболѣе извѣстны: Дагомари, Каначчи, Данти, Біаджіо-ди-Парма, Люнисъ, Просдоцимо и многіе другіе занимаются Алгеброй и пишутъ по этому предмету трактаты. Съ постепеннымъ развитіемъ Алгебры и попытками приложить ее къ Геометріи математическія науки начинаютъ дѣлать большіе успѣхи и затронуто множество новыхъ вопросовъ, которыми занимаются математики эпохи возрожденія наукъ на Западѣ. Въ новомъ направленіи самыхъ блестящихъ результатовъ достигаютъ италіанскіе математики, создавшіе школу ученыхъ, самыми видными представителями которой были Леонардо-да-Винчи, Пачіоли, Ферро, Тарталія, Кардано и множество другихъ.

Конецъ перваго тома.